មុខវិជ្ជាៈ
ពីជគណិតទូទៅ

កញ្ចប់សមត្ថភាពទី ១
ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់

ការពណ៌នាអំពីមុខវិជ្ជា

គណិតវិទ្យាគណនាគឺជាមុខវិជ្ជាគ្រឹះមួយដែលដើរតួនាទីសំខាន់ក្នុងការយល់ដឹងស៊ីជម្រៅពីវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិស្វកម្ម ក៏ដូចជាវិស័យសំខាន់ផ្សេងៗទៀត។ មុខវិជ្ជានេះផ្តោតសំខាន់ទៅលើការគណនាដេរីវេ ការគណនាអាំងតេក្រាល និងអត្ថន័យ និងការអនុវត្តរបស់វា។ ប្រធានបទសំខាន់ៗរួមមាន អនុគមន៍ លីមីត ដេរីវេ អាំតេក្រាលកំណត់និងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា និងការអនុវត្តក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែង។

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក៖

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនចំណេះវិជ្ជាសម្បទាដូចខាងក្រោម ៖

CLO1: កំណត់និយមន័យនៃអនុគមន៍ លីមីត ដេរីវេ និងអាំតេក្រាលកំណត់បានច្បាស់លាស់។

CLO2: បកស្រាយបានត្រឹមត្រូវពីអត្ថន័យនៃដេរីវេ និងអាំតេក្រាលកំណត់តាមបែបធរណីមាត្រ និងតាមបែបរូប

CLO3: ពន្យល់ពីទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា និងប្រើប្រាស់វាដើម្បីគណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនបំណិនសម្បទាដូចខាងក្រោម៖

CLO4: បង្កើតគម្រូគណិតវិទ្យាដើម្បីប៉ាន់ស្មាន និងព្យាករណ៍ពីទំនាក់ទំនងរវាងអថេរពីរដោយប្រើអនុគមន៍

CLO5: ប្រើប្រាស់ដេរីវេដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបរិមាទាក់ទងនឹងជីវភាពជាក់ស្តែងបានត្រឹមត្រូវ

CLO6: បម្លែងបញ្ហាក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែងឲ្យទាក់ទងនឹងដេរីវេ និងអាំងតេក្រាល
និងប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រសមស្របដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានោះ

CLO7: ប្រើប្រាស់បច្ចេកវិទ្យា និងកម្មវិធីគណិតវិទ្យាបានសមស្របក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាស្មុគស្មាញទាក់ទងនឹងគណិតវិទ្យា

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនចរិយាសម្បទាដូចខាងក្រោម៖

CLO8: មានស្មារតីបន្តការស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជានេះកាន់តែស៊ីជម្រៅ

CLO9: ទទួលស្គាល់សារសំខាន់ និងភាពចាំបាច់នៃមុខវិជ្ជានេះក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាជាក់ស្តែង

CLO10: ចេះសហការណ៍គ្នាក្នុងការងារជាក្រុមដោយផ្អែកលើផ្នត់គំនិតយកវិធីសាស្ត្រនិងយន្តការជាគោល

វាយតម្លៃសិក្សា

ដើម្បីបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ អ្នកសិក្សាត្រូវ

១. វត្តមានចូលសិក្សា ១០%

២. ការចូលរួមសកម្មភាពសិក្សា ២០%

៣. ការវាយតម្លៃកំឡុងពេលសិក្សា ៣០%

៤. ការប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជាសិក្សា ៤០%

អារម្ភកថា

វិស័យអប់រំ ត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាចាត់ទុកថាជាវិស័យអាទិភាព និងត្រូវបានធ្វើកំណែទម្រង់ជាប្រចាំ ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការសិក្សានៅគ្រប់កម្រិត។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាបាននិងកំពុងពិនិត្យឡើងវិញកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន និងជំរុញកំណែទម្រង់សាលារៀននៅគ្រប់កម្រិត ដើម្បីធានាថាសាលារៀនមានដំណើរការប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាពសម្រាប់ការសិក្សារៀនសូត្ររបស់សិស្ស និងផ្តល់ដល់សិស្សនូវវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា កាយសម្បទា ឆ្លើយតបបានទៅតាមតម្រូវការទីផ្សារការងារ និងចូលរួមចំណែកពេញលេញក្នុងការអភិវឌ្ឍសហគមន៍ និងប្រទេសជាតិ ឈានឆ្ពោះទៅសម្រេចបានចក្ខុវិស័យកម្ពុជាឆ្នាំ២០៣០ និងឆ្នាំ២០៥០ ។

ជាផ្នែកមួយនៃកំណែទម្រង់ការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណវុឌ្ឍិគ្រូបង្រៀនតាមរយៈគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ក្រសួងបានរៀបចំ "ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សាសម្រាប់ការបណ្តុះបណ្តាលបរិញ្ញាបត្រអប់រំ វិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀន ឯកទេសទាំង ៦ (អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ, គណិតវិទ្យា, គីមីវិទ្យា, ជីវវិទ្យា, រូបវិទ្យា, ប្រវត្តិវិទ្យា) ដើម្បីប្រើប្រាស់ក្នុងកម្មវិធីវិក្រឹតការគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅតាមសាលារៀនចំណេះទូទៅ។ ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះជាឯកសាររស់ ដែលនឹងអាចមានការកែសម្រួលទៅតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង ជាពិសេសនៅដំណាក់កាលអន្តរកាលនៃការអនុវត្តយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន។

ក្រសួងមានជំនឿយ៉ាងមុតមាំ លើប្រសិទ្ធភាពនៃការអនុវត្តក្របខណ្ឌកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលនេះ ដែលនឹងនាំគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅគ្រប់ភូមិសិក្សា សម្រេចបានគោលដៅអប់រំ ដែលនឹងចូលរួមចំណែកក្នុងការសម្រេចបានចក្ខុវិស័យរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជា។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងសូមកោតសរសើរដ៏ស្មោះចំពោះ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យនាយកគម្រោង និងក្រុមការងារគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ជាពិសេសក្រុមការងារនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញដែលបានខិតខំផលិតឯកសារក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះឡើង សម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលក្នុងគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ។

ថ្ងៃ ចន្ទ ៧រោច ខែទុតិយាសាឍ ឆ្នាំថោះ បញ្ចស័ក ព.ស ២៥៦៧
រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០៧ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០២៣
រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ហង់ជួន ណារ៉ុន

គណៈកម្មការ

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន** រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ណាត ប៊ុនរឿន** រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
៣. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **ជេត ជាលី** សាកលវិទ្យាធិការសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត **ឈុន ហុក** សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក **ប៉ាល់ ដែល** សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត **សំអោ អឡារតន៍** អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
៧. លោក **ទ្រឹង មរកត** ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រង

១ .លោកបណ្ឌិត **សុខ សុត្រា** ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក **មាក ភាមេរ៉ាន** ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៣. លោកបណ្ឌិត **ជ័យ ចាន់អឿន** ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត **ម៉ម សុជាតិ** ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក **សុត វិសាល** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់សិក្សាអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត **ឃុន គីមលាង** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៧. លោកស្រីបណ្ឌិត **ស៊ូ កល្យាណ** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៨. លោក **ហង់ ស៊ីម** សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៩. លោក **ដួង ម៉េងអាន** អ្នកសម្របសម្រួលកម្មវិធីមធ្យមសិក្សា មហាវិទ្យាល័យអប់រំ
១០. កញ្ញា **ហុង ខ្សែហៀក** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
១១. លោក **សើ ពន្លក** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

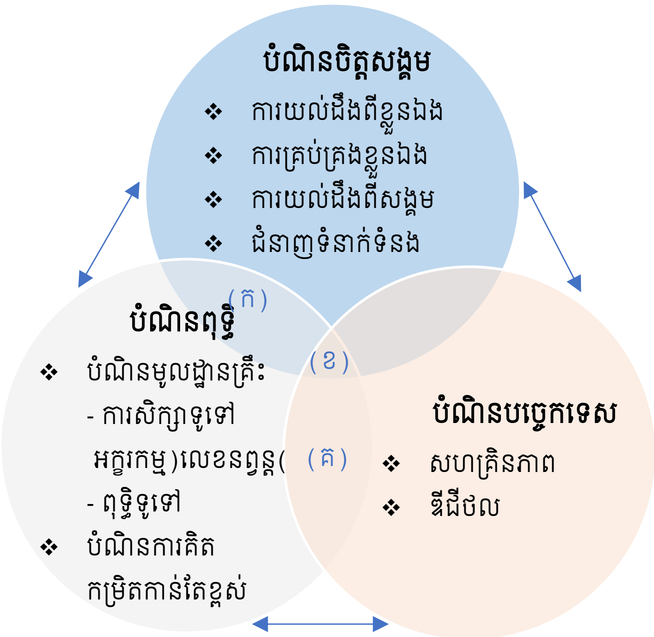
១. លោកបណ្ឌិត **សំអោ អឡារតន៍** អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
២. លោក **ទ្រឹង មរកត** ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា
៣. លោក **ង៉ោ ម៉េងឡុង** ប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៤. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សិត សេង** នាយកវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ
៥. លោកបណ្ឌិត **ឈុក ច័ន្ទនាយ៉ា** អនុប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៦. លោក **កែវ សារ៉ាត់** ទីប្រឹក្សាបច្ចេកទេសគម្រោងកែលម្អការអប់រំបំណេះទូទៅ

៤. ការរិះគុំព្យូទ័រ

១. លោក **ម៉ៅ ម៉ារ៉ាឌី** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក **ឌន សំណាង** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក

ការសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនេះគឺផ្តោតលើប្រតិបត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាដែលអនុវត្តផ្ទាល់នៅសាលារៀន។ ទាំងអ្នកសិក្សា និងសិស្ស (ដែលអ្នកសិក្សានឹងធ្វើការជាមួយផ្ទាល់) ចាំបាច់មាន (១) បំណិនចិត្តសង្គម (២) បំណិនពុទ្ធិ និង (៣) បំណិនបច្ចេកទេស ជាមូលដ្ឋាន (ដូចក្នុងរូបទី១)។ កញ្ចប់សមត្ថភាពទាំងបីខាងដើមនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សា អភិវឌ្ឍបំណិនចិត្តសង្គម បំណិនពុទ្ធិ និងពង្រឹងសមត្ថភាពផ្នែក (ក)ការសម្រេចចិត្ត ទំនាក់-ទំនង សេចក្តីអំណត់ ទឹកចិត្តអាណិតអាសូរ និងការគ្រប់គ្រងខ្លួនឯង ថែមទាំងអាចអនុវត្តការបង្រៀនមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យាប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងនវានុវត្តន៍ដោយប្រើប្រាស់ឧត្តមានុវត្តន៍ផ្សេងៗ (ខ) ការដោះស្រាយបញ្ហា និង ការរៀបចំនិងការចាត់ចែង (គ) បច្ចេកទេសកម្រិតមធ្យម និងកម្រិតខ្ពស់។



រូបភាពទី១
ប្រភព៖ WDR2018 (p.103)

ដោយឡែក សម្រាប់អ្នកសិក្សាកម្មវិធីនេះផ្ទាល់ នឹងទទួលបាន៖

(១) ចំណេះដឹងឯកទេសគណិតវិទ្យាកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ

- ❖ មុខវិជ្ជា ពីជគណិតលីនេអ៊ែ
- ❖ ចិត្តសង្គម ភាពជាអ្នកដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រង
- ❖ សន្លឹកកិច្ចការស្វ័យសិក្សានៅមធ្យមសិក្សា
- ❖ ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យា

(២) ចំណេះដឹងវិធីគរុកោលស្យ សាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំរូបវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សា

- ❖ វិធីសាស្ត្របង្រៀន
- ❖ វិធីសាស្ត្រវាយតម្លៃ
- ❖ ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ

- ❖ ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ
- ❖ បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ

(៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង

- ❖ អនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន
- ❖ ការអនុវត្តកម្មវិធីស្វ័យសិក្សារូបវិទ្យា ពីទីថ្នាក់៧-ទី១២
- ❖ របាយការណ៍នៃការអនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុកសម្រាប់បរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

វិជ្ជាសម្បទា

PLO1- ពន្យល់អំពីទ្រឹស្តី និងគោលការណ៍នៃការអប់រំក្នុងបរិបទសកលលោក និងបរិបទប្រទេសដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំងទៅនឹងការអនុវត្តជាក់ស្តែងនៃការបង្រៀន។

PLO2- បកស្រាយអំពីដំណើរការអនុវត្តកិច្ចការសម្រាប់ការបង្វឹកលើការរៀបចំកម្មវិធីសិក្សា និងការបង្រៀនរូបវិទ្យាប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។

បំណិនសម្បទា

PLO3- អនុវត្តបំណិនចិត្តសង្គម និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថលសម្រាប់បង្កើនការប្រាស្រ័យទាក់ទងគ្នាក្នុងការងារ និងជីវភាពប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងដោះស្រាយបញ្ហាប្រកបដោយភាពច្នៃប្រឌិត និងការទទួលខុសត្រូវ។

PLO4- បង្កើតគន្លឹះ និងទម្រង់សម្រាប់ដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រងការបង្រៀនដោយផ្តោតលើផលសម្រេចនៃការសិក្សារបស់សិស្សឆ្ពោះទៅរកស្តង់ដាសាលារៀនមានប្រសិទ្ធភាព និងនិរន្តភាពសាលារៀនតាមរយៈការសិក្សា ការអនុវត្តជាក់ស្តែង និងការស្រាវជ្រាវ។

PLO5- អនុវត្តការងារអភិវឌ្ឍកម្មវិធីសិក្សា ការរៀននិងការបង្រៀនរូបវិទ្យា និងការសិក្សាបែបគម្រោងភ្ជាប់នឹងបំណិនរកចំណូលសម្រាប់សាលារៀនប្រកបដោយក្រមសីលធម៌វិជ្ជាជីវៈ។

ចរិយាសម្បទា

PLO6- អភិវឌ្ឍឥរិយាបថវិជ្ជមាន និងវប្បធម៌រៀនពេញមួយជីវិតសម្រាប់បំពេញការងារ និងទាក់ទងជាមួយអ្នកដទៃប្រកបដោយគុណតម្លៃ មនុស្សធម៌ សាមគ្គីភាព និងការចែករំលែកគ្នា។

PLO7- បង្កើតបង្ហាញ/ការដឹកនាំបណ្តាញសម្រាប់កសាងភ្នាក់ងារពង្រីកឧត្តមានុវត្តន៍សម្រាប់ការរៀន និងការបង្រៀន។

សម្គាល់៖ Program Learning Outcome (PLO) លទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំ

ក. ញ្ចប់សមត្ថភាព និង រចនាសម្ព័ន្ធកម្មវិធីសិក្សា

កម្មវិធីបរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ តម្រូវឱ្យអ្នកសិក្សាសិក្សាចំនួន ៦៣ ក្រេឌីតដែលមានរយៈពេលចន្លោះពី ១២ ទៅ ១៨ខែ។ ការសិក្សានិងធ្វើឡើងតាមរយៈការរៀនពីចម្ងាយ (ភាគច្រើនចន្លោះពី ៦០%

ទៅ ៧០%) និងសិក្សាផ្ទាល់នៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញនិង សាលាហាត់ការ (ភាគតិចចន្លោះពី ៤០% ទៅ ៣០%)។ ការសិក្សាផ្តោតលើបណ្តុំមុខវិជ្ជា (១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៣៦ ក្រេឌីត) (២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (១២ (+៣) ក្រេឌីត) (៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង(១២ ក្រេឌីត)។ បន្ថែមពីលើនេះទៀតអ្នកសិក្សាត្រូវអនុវត្តខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនៅសាលាសាមីផ្ទាល់តែម្តងដោយមានការណែនាំពីគ្រូបង្វឹក ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ គ្រូបង្រៀននៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងមន្ត្រីអប់រំមកពីនាយកដ្ឋានជំនាញផ្សេងៗរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលមានបទពិសោធន៍អនុវត្តជាក់ស្តែងកន្លងមក ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	ចំនួនក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	៣៦
២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	១២ (+៣)
៣)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	១២
សរុប	៦០ (+៣)

សម្គាល់៖ *សម្រាប់កញ្ចប់សមត្ថភាពចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សាបានបន្ថែមមុខវិជ្ជាបំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំចំនួន ៣ក្រេឌីត*

លក្ខណៈទូទៅនៃមុខវិជ្ជាសិក្សា

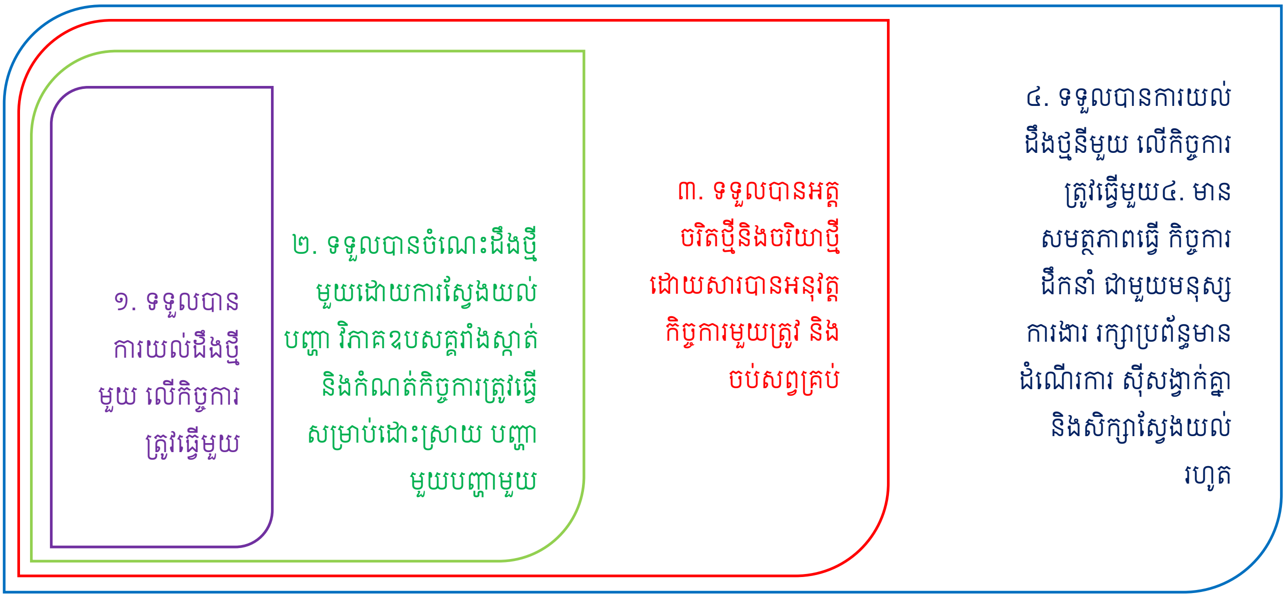
មុខវិជ្ជាសិក្សាសម្រាប់កម្រិតបរិញ្ញាបត្រអប់រំនេះនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សាបំពេញកញ្ចប់សមត្ថភាពដូចខាងក្រោម ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងលទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំហើយឱ្យអ្នកសិក្សាមានសមត្ថភាពសម្រាប់បំពេញការងារប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	មុខវិជ្ជាសិក្សា	ក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	មុខវិជ្ជាឯកទេស១	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស២	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៣	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៤	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៥	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត១ (ចងចាំ)	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត២ (យល់ដឹង)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៣ (ហ្វឹកហាត់)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៤ (វាយតម្លៃ)	៣
	ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស	៩
(៣)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និង ការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	វិធីសាស្ត្របង្រៀន បត់បែនតាមសមត្ថភាពសិស្ស និងទស្សនទានអប់រំថ្មីៗ	៣
	ប្រឹក្សា និងហ្វឹកហ្វឺនគរុសល្យលើយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះវង្វាយតម្លៃអប់រំ	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ	៣

	បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ *	៣
៤)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សា គរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	ការអនុវត្ត ស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី១)	៣
	ការអនុវត្ត ស្តង់ដានៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី២)	៦
	របាយការណ៍និងការការពារស្តីពីការអនុវត្តស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
សរុប		**៦៣**

លំហូរបង្រៀន និងរៀន

លំហូរបង្រៀននិងរៀន ១មេរៀន ឬកិច្ចការមួយ រួមជាមួយបំណិនមួយ និងចរិយាមួយ



ការវាយតម្លៃលើការសិក្សា

ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាគឺផ្តោតលើលទ្ធផលសិក្សាជាគោល។ ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមានបីដំណាក់កាលធំៗ គឺ ការវាយតម្លៃលើការសរសេរ (២) ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមុខវិជ្ជា (១) ឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស និង ការវាយតម្លៃសរុបដោយពិនិត្យលើការបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌ (៣) សម្រាប់បញ្ចប់ការសិក្សា។

៦.៤.១ គោលការណ៍វាយតម្លៃ

គោលការណ៍រួមសម្រាប់ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាមានដូចតទៅ៖

១) អ្នកសិក្សាតម្រូវឱ្យមានវត្តមានក្នុងការសិក្សាតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ មិនតិចជាង៧០%។ ក្នុងករណីអ្នកសិក្សាមានវត្តមានតិចជាង៧០% នឹងមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជានោះទេ

២) ក្នុងករណីដែលអ្នកសិក្សាធ្លាក់មុខវិជ្ជាណាមួយក្នុងឆមាស នឹងមិនអនុញ្ញាតឱ្យបន្តការសិក្សាទៅឆ្នាំបន្ទាប់ និងប្រឡងបញ្ចប់ឡើយ

៣) អ្នកសិក្សាទាំងអស់ត្រូវធ្វើកិច្ចការស្រាវជ្រាវសំខាន់ៗតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ និងប្រគល់ជូនគ្រូឧទ្ទេសតាមមុខវិជ្ជាដែលបានកំណត់

៤) អ្នកសិក្សាត្រូវប្រឡងបញ្ចប់ការសិក្សាដែលធ្វើឡើងបន្ទាប់ពីចប់ឆមាសនីមួយៗ តាមការកំណត់ក្នុងកម្មវិធីសិក្សា

៥) អ្នកសិក្សាត្រូវចងក្រងឯកសារវឌ្ឍនភាពនៃកិច្ចការស្ទូលរួមមានការហាត់ការ និងកម្មសិក្សាដែលផ្តោតលើ (ក) សកម្មភាពប្រតិបត្តិ (ខ) លទ្ធផលដែលសម្រេចបាន និង (គ) ការឆ្លុះបញ្ចាំង និងមេរៀនបទពិសោធន៍ និង

៦) អ្នកសិក្សាត្រូវតែជាប់មធ្យមភាគនៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានិងការធ្វើកម្មសិក្សា ដើម្បីទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។

ការផ្តល់ពិន្ទុ និងប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់

អ្នកសិក្សាអាចទទួលពិន្ទុចាប់ពី 00 ដល់ 100 ទៅតាមការវាយតម្លៃផ្អែកលើលក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដែលបានកំណត់ក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជា ការបំពេញកម្មសិក្សា និងការសរសេរនិងការការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។ ពិន្ទុដែលជាប់ត្រូវចាប់ផ្តើមពីមធ្យមភាគពិន្ទុ 50% ឬពិន្ទុនិទ្ទេស 2.00 ឡើងទៅ។

ពិន្ទុគឺកំណត់ពី 00.00 ដល់ 100 (មធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប ឬ Grade Point Average–GPA)។ រូបមន្តគណនារកមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) គឺមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) ស្មើផលបូកសរុបរវាងផលគុណនៃពិន្ទុនិទ្ទេស (Grade Point–P) និងតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកនៃមុខវិជ្ជានីមួយៗ (Attempted Credit Value–C) ចែកនឹងផលបូកសរុបនៃតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកគ្រប់មុខវិជ្ជា។

ប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់កម្មវិធី គឺផ្អែកទៅលើតម្លៃនៃពិន្ទុអតិបរមា 100% និង 50% នៃពិន្ទុអប្បបរមា។ ប្រព័ន្ធដាក់ពិន្ទុនេះ ត្រូវបានបកប្រែទៅជា «ពិន្ទុជានិទ្ទេស» និង «ពិន្ទុជាតម្លៃលេខ» ដូចដែលពិពណ៌នាខាងក្រោម៖

ពិន្ទុជាភាគរយ%	និទ្ទេស	ពិន្ទុនិទ្ទេស	មូលវិចារណ៍
85%-100%	A	4.00	ល្អប្រសើរ
80%-84%	B+	3.50	ល្អណាស់
70%-79%	B	3.00	ល្អ
65%-69%	C+	2.50	ល្អបង្គួរ
50%-64%	C	2.00	មធ្យម
<49%	F	1.50	ធ្លាក់

៦.៥ គោលការណ៍ប្រតិបត្តិ

ដើម្បីជានានូវការផ្តល់សេវាអប់រំប្រកបដោយគុណភាព និងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ មហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញអនុវត្តតាមគោលការណ៍ បទបញ្ញត្តិ និងបទដ្ឋានគតិយុត្តិរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ព្រមទាំងគោលការណ៍ច្បាប់នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ជាមួយគ្នានេះដែរ អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវគោរពតាមបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងឈរលើស្មារតីស្មោះត្រង់ ទទួលខុសត្រូវខ្ពស់ និងភាពម្ចាស់ការ និងគោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា។ សម្រាប់គោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានវាយតម្លៃលើចំណុចសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

៦ ១.៥.ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយា

ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានប្រមូលផ្តុំលើការគោរពវិន័យចាត់តាំង ការមករៀនទៀងទាត់ ការយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការសិក្សា ការខិតខំស្រាវជ្រាវ ការអនុវត្តភារកិច្ច និងស្មារតីសាមគ្គីភាពនៅក្នុងថ្នាក់ ក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងក្រៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា។ ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានធ្វើឡើងតាមរយៈយោបល់ឯកភាពពីមតិភាគច្រើនដាច់ខាតរបស់ក្រុមប្រឹក្សាវិន័យ ដោយផ្អែកលើលក្ខណសម្បត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ និងបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ។

៦ ២.៥.ការក្លែងបន្លំឯកសារ

អ្នកសិក្សាដែលក្លែងបន្លំឯកសារ នឹងត្រូវលុបឈ្មោះចេញពីបញ្ជីនិស្សិតដោយស្វ័យប្រវត្តិ ព្រមទាំងទទួលទោសតាមច្បាប់ជាធរមាន។ អ្នកសិក្សាត្រូវចាំថា ការលួចចម្លងស្នាដៃ ការលួចកម្មសិទ្ធិបញ្ញា និងគំនិតរបស់អ្នកដទៃគឺជាបទល្មើសសិក្សាធ្ងន់ធ្ងរដែលអាចឈានដល់ការបញ្ឈប់បុគ្គលដែលប្រព្រឹត្តបទល្មើសពីកម្មវិធី។ ត្រូវសម្រេចឱ្យធ្លាក់ជាស្ថាពរ បើអ្នកសិក្សារូបណាចម្លងដោយផ្ទាល់ពីអ្នកសិក្សាដទៃទៀត ឬប្រភពផ្សេងៗ ឬការប្រើសម្ភារៈ ឬឯកសារផ្សេងទៀត ដែលមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតក្នុងការប្រឡង។

៦.៥.៣ ឯកសារជំនួយស្មារតី/របាយការណ៍/កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

អ្នកសិក្សាត្រូវបង្ហាញនូវសុចរិតភាពនៃការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្លួនឱ្យបានខ្ជាប់ខ្ជួន ចាប់តាំងពីពេលចូលរៀនរហូតដល់ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គបណ្តុះបណ្តាល។ រាល់សំណេរការងារសិក្សាទាំងអស់ មិនត្រូវដកស្រង់គំនិត សរសេរ ឬចម្លងស្នាដៃផ្សេងៗរបស់អ្នកដទៃមកធ្វើជាគំនិត ជាស្នាដៃ ឬជាកម្មសិទ្ធិរបស់ខ្លួនដោយគ្មានការបញ្ជាក់ពីប្រភពច្បាស់លាស់នៃឯកសារយោង ឯកសារពិគ្រោះ ឬការអនុញ្ញាតពីម្ចាស់ប្រភព។

ក្នុងករណីរកឃើញមានការលួចចម្លងស្នាដៃអ្នកដទៃ អ្នកសិក្សានឹងត្រូវប្រឈមមុខចំពោះក្រុមប្រឹក្សាបច្ចេកទេស និងក្រុមប្រឹក្សាវិន័យរបស់មហាវិទ្យាល័យអប់រំ ឬសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដោយត្រូវទទួលពិន័យឱ្យរៀនត្រួតថ្នាក់ ឬអាចត្រូវបញ្ឈប់ពីកម្មវិធីដោយគ្មានសំណងប្រាក់សិក្សាដែលបានបង់រួចហើយ និងមិនមានការចេញលិខិតស្នាមបញ្ជាក់ការសិក្សាអ្វីដែរ។

សម្គាល់៖ កម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលសូមរក្សាសិទ្ធិក្នុងការកែប្រែការអនុវត្តជាក់ស្តែងឱ្យឆ្លើយតបទៅនឹងវឌ្ឍនភាពការរៀននិងបង្រៀន សមត្ថភាពរៀននិងការអនុវត្តជាក់ស្តែង និង ស្ថានភាពរៀននិងបង្រៀនជាក់ស្តែង ដើម្បីសម្រេចបានលទ្ធផលសិក្សាល្អបំផុត និងសម្រេចស្តង់ដាសហគមន៍សាលារៀននៃគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ (GEIP) ។

តក្កវិទ្យា

- សំណើតក្កវិទ្យា — Propositional Logics
- ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា — Logical Operators
- សំណើសមមូល — Logical Equivalences

សំណើតក្កវិទ្យា

សំណើ គឺជាអំណះអំណាងដែលអាចសន្និដ្ឋានបានថាពិត ឬមិនពិត តែមិនមែនទាំងពីរ។

ឧទាហរណ៍៖ (សំណើ)

$2+2=4$ ពិត (T)

$3\times 3=8$ មិនពិត (F)

787009911 ជាចំនួនបឋម ??

ឧទាហរណ៍៖ (មិនមែនសំណើ)

តើអ្នកសុខសប្បាយជាទេ? ✖

$x+y>3$ ✖

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់មិនៈ ¬

P	¬P
T	
F	

ឧទាហរណ៍ៈ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, ¬P: ខ្ញុំមិនមែនជានិស្សិតTUP

P: 2 ជាចំនួនគត់សេស, ¬P: 2 មិនមែនជាចំនួនគត់សេស

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់មិនៈ ¬

P	¬P
T	F
F	T

ឧទាហរណ៍ៈ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, ¬P: ខ្ញុំមិនមែនជានិស្សិតTUP

P: 2 ជាចំនួនគត់សេស, ¬P: 2 មិនមែនជាចំនួនគត់សេស

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់និង $\wedge$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

ឧទាហរណ៍៖ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, Q: ខ្ញុំរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា

$P \wedge Q$: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP និង រៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

៤

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់និង $\wedge$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ឧទាហរណ៍៖ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, Q: ខ្ញុំរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា

$P \wedge Q$: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP និង រៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

៤

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់ឬ $\vee$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

ឧទាហរណ៍៖ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, Q: ខ្ញុំរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា

$P \vee Q$: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP ឬ រៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

៩

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់ឬ $\vee$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ឧទាហរណ៍៖ P: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP, Q: ខ្ញុំរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា

$P \vee Q$: ខ្ញុំជានិស្សិតTUP ឬ រៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

៩

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់នាំអោយ $\Rightarrow$

$P \Rightarrow Q$ P នាំអោយ Q

បើ P នោះ Q

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

ឧទាហរណ៍៖

$P \Rightarrow Q$: បើខ្ញុំជាប់ឆ្នោត នោះខ្ញុំនឹងបញ្ចុះតម្លៃសាំង។

$P \Rightarrow Q$: បើប្រលងបញ្ចប់បានពិន្ទុពេញ នោះនឹងបាននិទ្ទេស A។

៦

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់នាំអោយ $\Rightarrow$

$P \Rightarrow Q$ P នាំអោយ Q

បើ P នោះ Q

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ឧទាហរណ៍៖

$P \Rightarrow Q$: បើខ្ញុំជាប់ឆ្នោត នោះខ្ញុំនឹងបញ្ចុះតម្លៃសាំង។

$P \Rightarrow Q$: បើប្រលងបញ្ចប់បានពិន្ទុពេញ នោះនឹងបាននិទ្ទេស A។

៦

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់សមមូល $\Leftrightarrow$

$P \Leftrightarrow Q$: P លុះត្រាតែ Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

ឧទាហរណ៍៖

$P \Leftrightarrow Q$: x ជាចំនួនគត់គូ លុះត្រាតែ x^2 ជាចំនួនគត់គូៗ

x ជាចំនួនវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ x^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន??

៧

ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ឈ្នាប់សមមូល $\Leftrightarrow$

$P \Leftrightarrow Q$: P លុះត្រាតែ Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ឧទាហរណ៍៖

$P \Leftrightarrow Q$: x ជាចំនួនគត់គូ លុះត្រាតែ x^2 ជាចំនួនគត់គូៗ

x ជាចំនួនវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ x^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន??

៧

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ។

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F			
T	F	T			
F	T	F			
F	F	T			

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ។

ចូរគូសតារាងភាពពិតនៃសំណើ $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
T	T	F	T		
T	F	T	T		
F	T	F	F		
F	F	T	T		

ចូរគូសតារាងភាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ៗ

ចូរគូសតារាងភាពពិតនៃសំណើ $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	F	F	
F	F	T	T	F	

ចូរគូសតារាងភាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ៗ

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $(p \lor \neg q) \rightarrow (p \land q)$

p	q	$\neg q$	$p \lor \neg q$	$p \land q$	$(p \lor \neg q) \rightarrow (p \land q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \lor (q \land r)$ ។

៨

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \lor (q \land r)$ ។

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

៨

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ។

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	
T	T	F	F	
T	F	T	F	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	T	F	F	
F	F	T	F	
F	F	F	F	

ចូរគូសតារាងតាពពិតនៃសំណើ $p \vee (q \wedge r)$ ។

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T				
T	F	T				
F	T	T				
F	F	F				

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F			
T	F	T	F			
F	T	T	F			
F	F	F	T			

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F		
T	F	T	F	F		
F	T	T	F	T		
F	F	F	T	T		

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	
T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	
F	F	F	T	T	T	

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

$P \equiv Q$ បើ $P \Leftrightarrow Q$ ពិត

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

ឧទាហរណ៍៖ 783477841 ចែកដាច់នឹង 7 ឬ 11។

783477841 មិនចែកដាច់នឹង 7 និងមិនចែកដាច់នឹង 11។

៩

សំណើសមមូលគ្នា

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

ឧទាហរណ៍៖ ខ្ញុំជានិស្សិតLUP និងរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។
ខ្ញុំមិនមែនជានិស្សិតLUP ឬមិនមែនជារៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

១០

សំណើសមមូលគ្នា

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	T	
F	F	T	

ឧទាហរណ៍៖ ខ្ញុំជានិស្សិតLUP និងរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។
ខ្ញុំមិនមែនជានិស្សិតLUP ឬមិនមែនជារៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

១០

សំណើសមមូលគ្នា

លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

ឧទាហរណ៍៖ ខ្ញុំជានិស្សិតLUP និងរៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។
ខ្ញុំមិនមែនជានិស្សិតLUP ឬមិនមែនជារៀនជំនាញគណិតវិទ្យា។

១០

តើសំណើសមមូលខាងក្រោមត្រឹមត្រូវឬទេ?

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ $\qquad$ $p \to q \equiv \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (\neg q \to \neg p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$

១១

ចូរបង្ហាញតាពសមមូលគ្នានៃសំណើខាងក្រោម

សំណើសមមូលគ្នា	ឈ្មោះ
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	លក្ខណ:ខ្លួនឯង
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	លក្ខណ:លប់
$\neg(\neg p) \equiv p$	លក្ខណ:ទ្វេមិន
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	លក្ខណ:ត្រលប់

ចូរបង្ហាញតាពសមមូលគ្នានៃសំណើខាងក្រោម

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	លក្ខណ:ផ្តុំ
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	លក្ខណ:បំបែក
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	លក្ខណ:ដឺម័រហ្គេន
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	លក្ខណ:មិន

ចូរបង្ហាញភាពសមមូលគ្នានៃសំណើខាងក្រោម

$p \to q \equiv \neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$	$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$	$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$	
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$	
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$	
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$	
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$	

១៤

ចូរបង្ហាញថា $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$ **ដោយមិនប្រើតារាងភាពពិត។**

ដំណោះស្រាយ

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$$
$$\equiv (\neg\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \qquad \text{លក្ខណៈដឺម័រហ្គេន}$$
$$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$$
$$\equiv p \vee (\neg q \wedge q) \qquad \text{លក្ខណៈបំបែក}$$
$$\equiv p \vee \text{False}$$
$$\equiv p$$

១៥

ចូរបង្ហាញថា $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ដោយមិនប្រើតារាងតាពពិត។

ចូរបង្ហាញថា $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \mathbf{T}$ ដោយមិនប្រើតារាងតាពពិត។

១៦

វិធីសាស្ត្របញ្ជាក់ការពិត

បើគ្រប់សម្មតិកម្មពិត នោះការសន្និដ្ឋានក៏ពិតដែរ។

សម្មតិកម្ម

ការសន្និដ្ឋាន

p	q	p→q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

ឧទាហរណ៍៖ បើថ្ងៃនេះជាថ្ងៃពុធ នោះម្សិលមិញជាថ្ងៃអង្គារ។

ថ្ងៃនេះជាថ្ងៃពុធ

ដូច្នេះ ម្សិលមិញជាថ្ងៃអង្គារ។

១៧

វិធីសាស្ត្របញ្ជាក់ការមិនពិត

សម្មតិកម្ម ការសន្និដ្ឋាន

p	q	p→q	~q	~p
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

ឧទាហរណ៍៖ បើថ្ងៃនេះជាថ្ងៃបុណ្យជាតិ នោះសាលារៀនបិតទ្វា។

សាលារៀនមិនបានបិតទ្វា

ដូច្នេះ ថ្ងៃនេះមិនមែនជាថ្ងៃបុណ្យជាតិទេ។

សម្រាយបញ្ជាក់

- សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់ — Direct Proof
- សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម — Contraposition
- សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត — Contradiction
- សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន — Induction

១

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់
Direct Proof

ស្រាយបញ្ជាក់ សំណើ $p \Rightarrow q$ ថាពិត ដោយវិធីសាស្ត្រដូចខាងក្រោម៖

- ឧបមាថា សំណើ p ជាសំណើពិត។
- ប្រើប្រាស់ពត៏មានចេញពី p និងលក្ខណៈសំខាន់មួយចំនួន ដើម្បីទាញបញ្ជាក់បានថាសំណើ q ជាសំណើពិត

ដូចនេះ៖ យើងអាចបញ្ជាក់បានថា $p \Rightarrow q$ ជាសំណើពិត

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T

២

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

Direct Proof

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ស្រាយបញ្ជាក់ឲ្យបានថា "បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ"។

ឧបមាថា n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $n = 2k+1 \qquad ; k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= \boxed{2(2k^2+2k)+1} \end{aligned}$$

ជាចំនួនគត់សេស

ដូច្នេះ សំណើ "បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ" ជាសំណើពិត។

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

Direct Proof

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា "បើ a, b, c ជាចំនួនគត់ ដែល b ចែកដាច់នឹង a ហើយ c ចែកដាច់នឹង a នោះ b+c ក៏ចែកដាច់នឹង a"។

ឧបមាថា b ចែកដាច់នឹង a នោះ $b = ak$

c ចែកដាច់នឹង a នោះ $c = al$

យើងបាន $\boxed{b + c = (ak) + (al) = a(k+l)}$ b+c ចែកដាច់នឹង a

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

Direct Proof

លំហាត់ទី១៖ បើ m និង n ជាចំនួនសេស នោះ mn ក៏ជាចំនួនសេសដែរ។

លំហាត់ទី២៖ បើ m និង n ជាការេប្រាកដ នោះ mn ក៏ជាការេប្រាកដដែរ។

លំហាត់ទី៣៖ បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ 7n+4 ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ។

លំហាត់ទី៤៖ បើ m ជាចំនួនគត់គូ ហើយ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ m+n ជាចំនួនគត់សេស។

លំហាត់ទី៥៖ បើ m ជាចំនួនគត់គូ ហើយ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ mn ជាចំនួនគត់គូ។

លំហាត់ទី៦៖ បើ a, b, c ជាចំនួនគត់ ដែល b ចែកដាច់នឹង a ហើយ c ចែកដាច់នឹង b នោះ c ចែកដាច់នឹង a។

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

Contraposition

ស្រាយបញ្ជាក់ សំណើ $p \Rightarrow q$ ថាពិត គឺយើងត្រូវស្រាយ $\neg q \Rightarrow \neg p$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	**T**	**T**
T	F	T	F	**F**	**F**
F	T	F	T	**T**	**T**
F	F	T	T	**T**	**T**

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

Contraposition

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា "បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ"។

សម្រាយដោយផ្ទាល់

n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ $n^2 = 2k \Rightarrow n = \pm\sqrt{2k}$

៧

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

Contraposition

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា "បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ"។

យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់បានថា "បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ជាចំនួនគត់សេស"។

ឧបមាថា n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= \boxed{2(2k^2+2k)+1} \end{aligned}$$ ជាចំនួនគត់សេស

៨

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

Contraposition

លំហាត់ទី៧៖ បើ x^2-6x+5 ជាចំនួនគូ នោះ x ជាចំនួនសេសៗ

លំហាត់ទី៨៖ បើ n^2 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់សេសៗ

លំហាត់ទី៩៖ បើ $a^2(b^2-2b)$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ a *និង* b ជាចំនួនគត់សេសៗ

៩

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

Contradiction

ស្រាយបញ្ជាក់ សំណើ p ថាពិត គឺយើងត្រូវស្រាយ $\neg p$ មិនពិត

p	$\neg q$
T	F

១០

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

Contradiction

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា "$\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន "។

ឧបមាថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន នោះ $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ ដែល m, n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

យើងបាន

$$\sqrt{2}n = m$$

$$\boxed{2n^2 = m^2}$$

m^2 ជាចំនួនគត់គូ

m ជាចំនួនគត់គូ នោះ m = 2k

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$\boxed{n^2 = 2k^2}$$

n^2 ជាចំនួនគត់គូ

ផ្ទុយពីការពិតដែលថា m,n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

Contradiction

លំហាត់ទី១០៖ បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ។

លំហាត់ទី១១៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា "$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន "។

លំហាត់ទី១២៖ បើ n^3+5 ជាចំនួនគត់សេស នោះ n ជាចំនួនគត់គូ។

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

បើ m ជាចំនួនសេស នោះ m^k ជាចំនួនសេស ចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k

តាង $p(i)$ ជាសំណើ : m^i ជាចំនួនសេស

$$\forall k \in N \ \ P(k)$$

$$\underline{P(1)} \wedge \underline{P(2)} \wedge \ldots \wedge \underline{P(n)} \ldots$$

១៣

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសំណើ $p(n)$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ជាសំណើពិត

យើងត្រូវស្រាយថា៖

1. ចំពោះ $n = 1,\ p(1)$ ពិត
2. ឧបមាថា $n = k,\ p(k)$ ពិតៗ យើងត្រូវស្រាយថា $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ ពិត

១៤

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ ស្រាយបញ្ជាក់ឲ្យបានថា $n \in \mathbb{N}, 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

តាង $p(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ចំពោះ $n = 1,\ p(1) = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ ពិត

ឧបមាថា $n = k,\ p(k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយថា $p(k+1) = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

១៥

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

$$
\begin{aligned}
p(k+1) &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\
&= p(k)+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{ពិត}
\end{aligned}
$$

១៦

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ ស្រាយបញ្ជាក់ប្បាថា $n^3 + 2n$ ចែកដាច់នឹង 3 គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

ចំពោះ $n = 0$ យើងបាន $0^3 + 2(0) = 0 = 3\ (0)$ ដូច្នេះ $p(0)$ ពិត

ឧបមាថា $n = k, p(k)$ ពិត មានន័យថា $n^3 + 2n = 3(m)$

យើងត្រូវស្រាយថា $p(k+1) = (n+1)^3 + 2(n+1)$ ចែកដាច់នឹង 3

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3m + 3(k^2 + k + 1) \\ &= \boxed{3(m + k^2 + k + 1)}\end{aligned}$$

$\Downarrow$

ចែកដាច់នឹង 3

សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារកំណើន

Induction

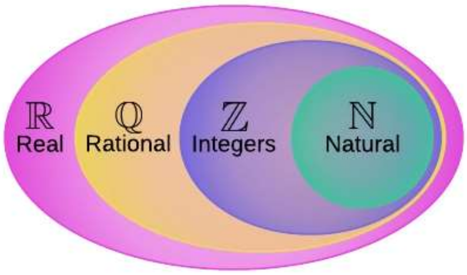
លំហាត់ទី១៣៖ បង្ហាញថា $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

លំហាត់ទី១៤៖ បង្ហាញថា $9^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 8

លំហាត់ទី១៥៖ បង្ហាញថា $(1\times 2) + (2\times 3) + (3\times 4) + \cdots + (n\times(n+1)) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

លំហាត់ទី១៦៖ បង្ហាញថា $2^{n+1} > n^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន

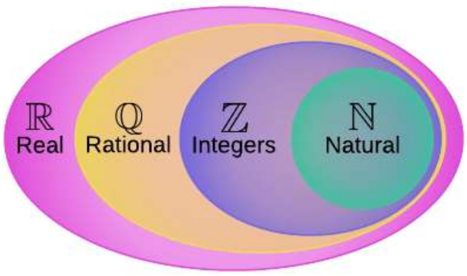
ទ្រឹស្តីសំណុំ និងចំនួន



- និយមន័យនៃសំណុំ
- លក្ខណៈនៃសំណុំ
- ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

- ភាពចែកដាច់
- ចំនួនបឋម
- តួចែករួមធំបំផុត

សំណុំ



- និយមន័យនៃសំណុំ
- លក្ខណៈនៃសំណុំ
- ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

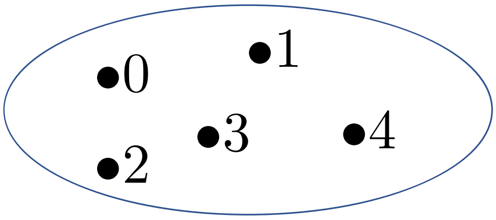
សំណុំ

និយមន័យនៃសំណុំ

សំណុំ គឺជាបណ្តុំនៃវត្ថុដែលមានលក្ខខ័ណ្ឌជាក់លាក់ៗ

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង៥ $A=\{0,1,2,3,4\}$

ដ្យាក្រាមវិន



ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $A=\{0,1,2,3,4\}$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

ទម្រង់រាយធាតុ

ការសរសេរសំណុំតាមទម្រង់រួមធាតុ

$$\{\ x \mid \text{លក្ខខណ្ឌជាក់លាក់នៃ } x\ \}$$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនសូន្យដែលតូចជាង១០០ គឺ

$$\{\ x \mid x \in \mathbb{Z} \ \text{ និង } 1 < x < 100\ \}$$

ឬអាចសរសេរម្យ៉ាងទៀតដូចខាងក្រោម

$$\{\ x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 100\ \}$$

ការសរសេរសំណុំតាមទម្រង់រួមធាតុ

$$\{\ x \mid \text{លក្ខខណ្ឌជាក់លាក់នៃ } x\ \}$$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនសនិទានគឺ

$$\mathbb{Q} = \left\{\ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\ \right\}$$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ

$$\mathbb{C} = \{\ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\ \}$$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនពិតដែលតំណាងដោយចន្លោះ

$$(a, b) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\ \}$$

$$(a, b] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\ \}$$

$$[a, b) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\ \}$$

$$[a, b] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \}$$

ឧទាហរណ៍៖ សំណុំនៃចំនួនពិតដែលតំណាងដោយចន្លោះ

$$(-\infty, a) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x < a\ \}$$

$$(-\infty, a] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\ \}$$

$$(a, \infty) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x > a\ \}$$

$$[a, \infty) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\ \}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

ធាតុនៃសំណុំ

សំណុំ A មានផ្ទុក a នោះគេថា a ជាធាតុរបស់សំណុំ A $(a \in A)$

សំណុំ A មិនមានផ្ទុក b នោះគេថា b មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ A $(b \notin A)$

ឧទាហរណ៍៖

$$a \in \{\ a, b, c, d, e\ \}$$

$$4 \notin \{\ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\ \}$$

$$1 \in \{1, 2\}$$

$$1 \in \{2, 1\}$$

$$1 \in \{1, 1, 1, 2\}$$

$$1 \in \{1, 1, 1, 2, 2, 27\}$$

$$3 \notin \{1, 1, 1, 2\}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

សំណុំស្មើគ្នា

សំណុំ A និងសំណុំ B ជាសំណុំស្មើគ្នា បើ គ្រប់ធាតុរបស់ A ជាធាតុរបស់ B ហើយគ្រប់ធាតុរបស់ B ជាធាតុរបស់ A។

$$A = B \quad \text{if} \quad \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

ឧទាហរណ៍៖

$$\underbrace{\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,1,2\} = \{2,1,2,1,1,1,1,2,1,2,1,2,2\}}_{\text{គ្រប់ធាតុរបស់សំណុំ គឺត្រូវតែមានធាតុខុសៗគ្នា}}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

សំណុំទទេ

សំណុំទទេគឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុ ហើយ យើងតាងសំណុំទទេដោយ $\emptyset$។

ឧទាហរណ៍៖

$$\varnothing = \{\}$$

$$\varnothing = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$$

$$\varnothing = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

សំណុំរង

សំណុំ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B (យើងសរសេរ $A \subseteq B$) បើ

គ្រប់ធាតុរបស់សំណុំ A ជាធាតុរបស់សំណុំ B ។

ឧទាហរណ៍៖

$$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$$

$$\{c,e\} \subseteq \{a,b,c,e,y,z\}$$

$$\{2,4,6\} \subseteq \{2,4,6\}$$

$$\{\text{foo},\text{bar}\} \subseteq \{\text{bar},\text{buzz},\text{foo}\}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

សំណុំរង

សម្គាល់៖

១. សំណុំទទេ ជាសំណុំរងនៃគ្រប់សំណុំទាំងអស់ ។

២. សំណុំ A= សំណុំ B បើ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ ។

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

ចំនួនធាតុនៃសំណុំ

ចំនួនធាតុនៃសំណុំរាប់អស់ A គឺសំដៅទៅលើចំនួនធាតុដែលខុសៗគ្នាទាំងអស់របស់សំណុំ A ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $|A|$ ។

ឧទាហរណ៍៖

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \ |A| = 5$$

B ជាសំណុំនៃ ព្យញ្ជនៈនៃភាសាខ្មែរ $\Rightarrow \ |B| = 33$

$$C = \{ \ x \in \mathbb{Z} \mid x < 100 \ \wedge \ 3x > -33 \ \} \Rightarrow \ |C| = ???$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

គ្រួសារនៃសំណុំរង ឬ សំណុំស្វ័យគុណ

សំណុំស្វ័យគុណ នៃសំណុំ A គឺជាសំណុំ នៃសំណុំរងទាំងអស់របស់ A។

យើងកំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{P}(A)$ ។

$$\mathcal{P}(A) = \{ \ S \mid S \subseteq A \ \}$$

ឧទាហរណ៍ៈ $A = \{a, b, c\}$ **នោះធាតុរបស់** $\mathcal{P}(A)$ **គឺ**

1. $\varnothing$
2. $\{a\}$
3. $\{b\}$
4. $\{c\}$
5. $\{a, b\}$
6. $\{a, c\}$
7. $\{b, c\}$
8. $\{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

សំណុំ

លក្ខណៈនៃសំណុំ

គ្រួសារនៃសំណុំរង ឬ សំណុំស្វ័យគុណ

ចំពោះសំណុំរាប់អស់ A ដែល $|A| = n$

នោះ $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ ។

សំណុំ

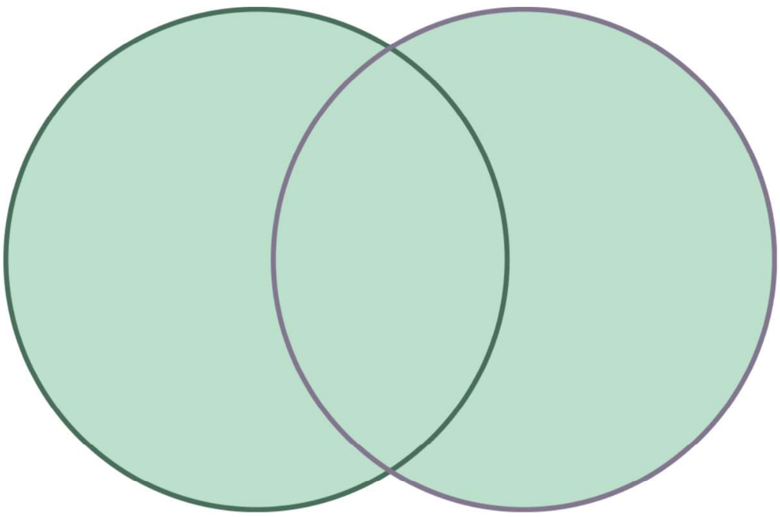
ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

ប្រជុំ៖

ប្រជុំនៃសំណុំពីរ A និង B គឺជាសំណុំនៃធាតុ ដែលជាធាតុរបស់ A ឬធាតុរបស់ Bៗ យើងកំណត់សរសេរដោយ

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \vee\ x \in B\ \}$$

$$A \cup B = \{\ x \mid x \in A \vee\ x \in B\ \}$$



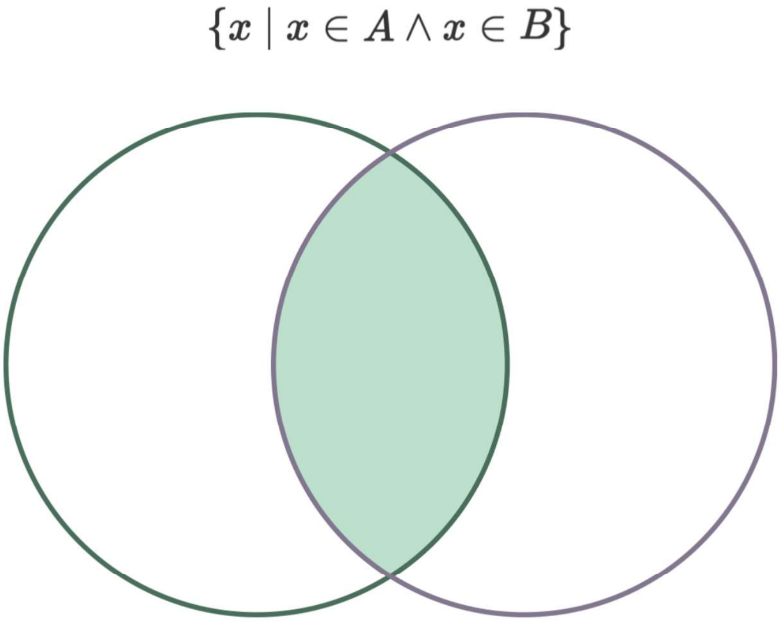
សំណុំ

ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

ប្រសព្វ៖

ប្រសព្វនៃសំណុំពីរ A និង B គឺជាសំណុំនៃធាតុ ដែលជាធាតុរបស់ A និងជាធាតុរបស់ Bៗ យើងកំណត់សរសេរដោយ

$$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \wedge\ x \in B\ \}$$



ឧទាហរណ៍៖

$$A = \{1, 2, a, b, c\}$$

$$B = \{2, 4, 6, x, a\}$$

នោះ៖

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, a, b, c, x\}$$

$$A \cap C = \{2, a\}$$

ឧទាហរណ៍៖

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9\}$, and $C = \{1,3,5,7,9\}$.

$$(A \cup B) \cap C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \cap C = \{1,3,5,7,9\}$$

$$A \cup (B \cap C) = A \cup \{5,7,9\} = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

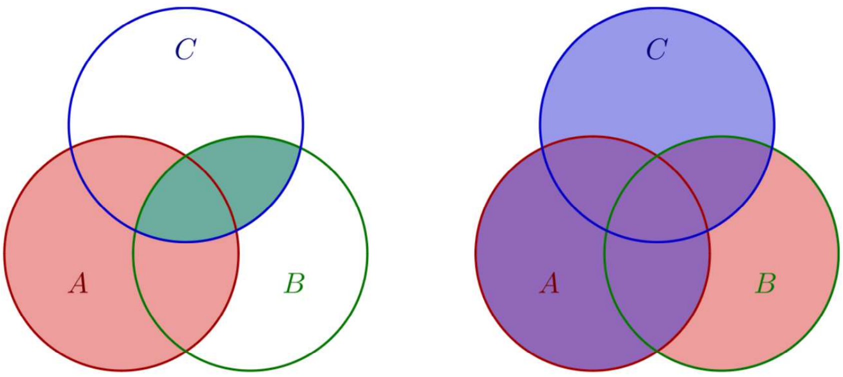


Fig. 2.10 $A \cup (B \cap C)$

Fig. 2.11 $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. $A \cup B$ is shown in red and purple, $A \cup C$ in blue and purple, and $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ in purple.

សំណុំ

ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ឧទាហរណ៍៖ $A = \{1, 2, a, b, c\}$

$B = \{2, 4, 6, x, a\}$

នោះ៖ $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, a, b, c, x\}$

$A \cap C = \{2, a\}$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 5 + 5 - 2 = 8$$

សំណុំ

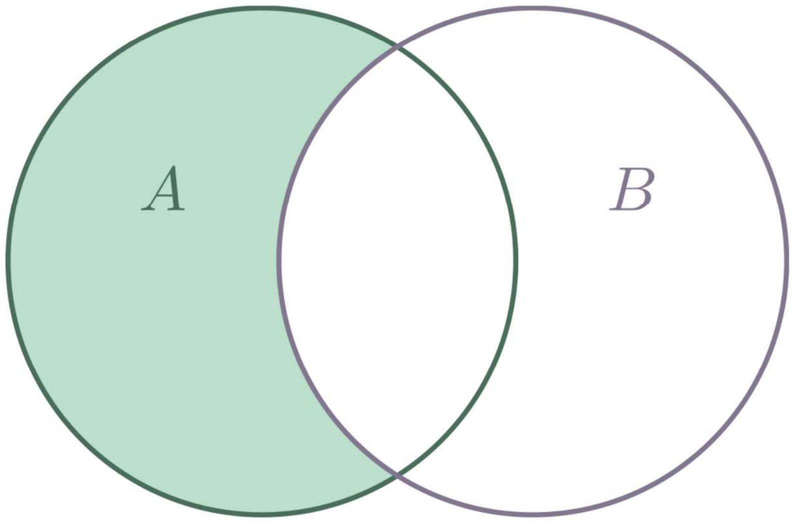
ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

សំណុំផលដក

ផលដករវាងសំណុំ A និង សំណុំB គឺជាសំណុំនៃធាតុ ដែលជាធាតុរបស់ A តែ មិនមែនជាធាតុរបស់ B។ យើងកំណត់សរសេរដោយ

$$A \setminus B = \{\ x \mid x \in A \wedge x \notin B\ \}$$

$$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



សំណុំ

- ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

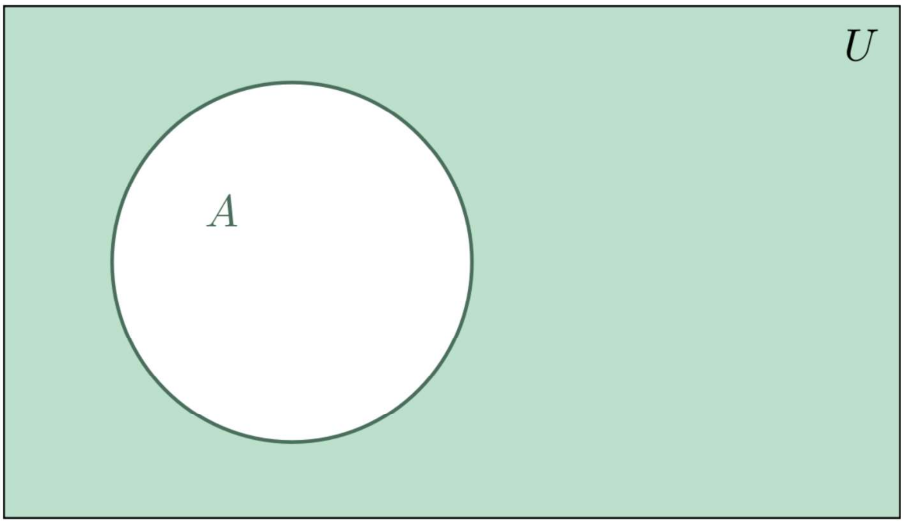
សំណុំបំពេញ

សំណុំបំពេញនៃ សំណុំ A គឺជាសំណុំនៃធាតុ ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ A។

កំណត់សរសេរដោយ $\bar{A}$ ឬ A^c ។

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$\{x \in U \mid x \notin A\}$$



ឧទាហរណ៍៖

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \geq 4\}$

$$A \setminus \{a, b\} = \{c\}$$

$$A \setminus B = \{a, b, c\} = A$$

$$B \setminus \mathbb{Z} = \varnothing$$

$$\overline{C} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

សំណុំ

- ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

ច្បាប់ដឺម័រហ្គេន

$$\overline{(A\cup B)} = \overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{(A\cap B)} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

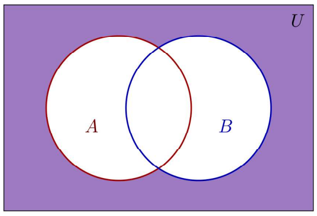


Fig. 2.12 $\overline{A\cup B}$

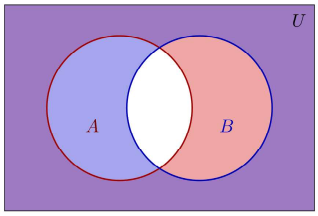
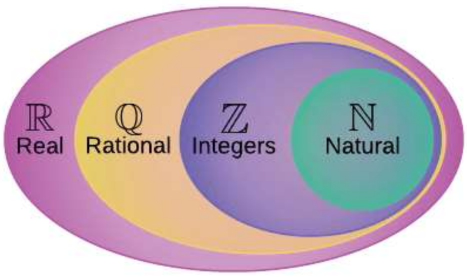


Fig. 2.13 $\overline{A}\cap\overline{B}$. $\overline{A}$ is shaded red, $\overline{B}$ is shaded blue, and their intersection is shaded purple.

ទ្រឹស្តីចំនួន



- ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត
- ចំនួនបឋម
- តួចែករួមធំបំផុត និងពហុគុណរួមតូចបំផុត

ទ្រឹស្តីចំនួន

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត
- ចំនួនបឋម
- តួចែករួមធំបំផុត និងពហុគុណរួមតូចបំផុត

ទ្រឹស្តីចំនួន

- ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត

និយមន័យភាពចែកដាច់

ចំពោះ $a, b \in \mathbb{Z}$ ហើយ $a \neq 0$ នោះគេថា a ចែកដាច់ b $(a|b)$ បើមានចំនួនគត់ q ដែល $b = aq$ ។

ឧទាហរណ៍៖

$3 \mid 9$	$3 \nmid 17$	$3 \mid 315$

ទ្រឹស្តីចំនួន

ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺក្លីត

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ហើយ $a \neq 0$ នោះ

1. បើ $a|b$ ហើយ $a|c$ នោះ $a|(b+c)$
2. បើ $a|b$ នោះ $a|bc$
3. បើ $a|b$ ហើយ $b|c$ នោះ $a|c$

ទ្រឹស្តីចំនួន

ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺក្លីត

ឧទាហរណ៍៖ ដោយមិនចាំបាច់គណនាផលបូក និងផលដក បង្ហាញថា ៖

ក. $777777 + 4136$ និង $777777 - 4136$ ចែកដាច់នឹង 11

ខ. $1097894 + 17633$ និង $1097894 - 17633$ ចែកដាច់នឹង 7

គ. បង្ហាញថា $8^{2007} - 1$ និង $8^{2008} - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺក្លីត

និយមន័យ : ធ្វើវិធីចែកបែបអឺក្លីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ b គឺកំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប q និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ r ដែល $a = bq + r$ ដោយ $0 \leq r < b$ ។ a ហៅថាតំណាំងចែក b ហៅថាតួចែក q ហៅថាផលចែក និង r ហៅថាសំណល់ ។

ប្រមាណវិធីម៉ូឌុលឡូ

$a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a - b) \quad \Leftrightarrow \quad a \bmod n = b \bmod n.$

ទ្រឹស្តីចំនួន

ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺក្លីត

ឧទាហរណ៍៖

$12 \equiv 2 \pmod{10}$	$12 \bmod 10 = 2$
$107 \equiv 207 \pmod{10}$	$207 \bmod 10 = 7$
$7 \equiv 3 \pmod{2}$	$7 \bmod 2 = 1$
$7 \equiv -1 \pmod{2}$	$-1 \bmod 2 = 1$
$13 \equiv -1 \pmod{7}$	$-1 \bmod 7 = 6$
$-15 \equiv 10 \pmod{5}$	$-15 \bmod 5 = 0$

ប្រមាណវិធីបូកម៉ូឌុលឡូ

បើ $a \equiv c \pmod n$ ហើយ $b \equiv d \pmod n$ នោះ $a+b \equiv c+d \pmod n$។

ឧទាហរណ៍៖

$13 \equiv 1 \pmod 3$, $25 \equiv 1 \pmod 3$

=> $13 + 25 \pmod 3 \equiv 1 + 1 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$

$87 \equiv 2 \pmod{17}$, $222 \equiv 1 \pmod{17}$

=> $87 + 222 \pmod{17} \equiv 2 + 1 \pmod{17} \equiv 3 \pmod{17}$

$101 \equiv 2 \pmod{11}$, $141 \equiv -2 \pmod{11}$

=> $101 + 141 \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11}$

ចំណាំ៖ ពេលគណនា a+b mod n យើងអាចជំនួសដោយ a ដោយ a mod n ហើយ b ដោយ b mod n ដើម្បីអោយការគណនាបានលឿន។

ប្រមាណវិធីគុណម៉ូឌុលឡូ

បើ $a \equiv c \pmod n$ ហើយ $b \equiv d \pmod n$ នោះ $ab \equiv cd \pmod n$

ឧទាហរណ៍៖

$9876 \equiv 6 \pmod{10}$, $17642 \equiv 2 \pmod{10}$

=> $9876 * 17642 \pmod{10} \equiv 6 * 2 \pmod{10} \equiv 2 \pmod{10}$

$10987 \equiv 1 \pmod 2$, $28663 \equiv 1 \pmod 2$

=> $10987 * 28663 \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2$

$1000 \equiv -1 \pmod 7$, $1000000 \equiv 1 \pmod 7$

=> $1000 * 1000000 \pmod 7 \equiv -1 * 1 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$

ចំណាំ៖ ពេលគណនា ab mod n យើងអាចជំនួសដោយ a ដោយ a mod n ហើយ b ដោយ b mod n ដើម្បីអោយការគណនាបានលឿន។

144^4 mod 713

= 144 * 144 * 144 * 144 mod 713

= 20736 * 144 * 144 mod 713

= 59 * 144 * 144 mod 713

= 8496 * 144 mod 713

= 653 * 144 mod 713

= 94032 mod 713

= 629 mod 713

20736 * 20736 mod 713

= 59 * 59 mod 713

= 3481 mod 713

= 629 mod 713

ព្រោះ៖ 20736 ≡ 59 (mod 713)

ព្រោះ៖ 653 ≡ 8496 (mod 713)

110010

ដោយ 50 = 32 + 16 + 2

144^{50} mod 713

= 144^{32} 144^{16} 144^2 mod 713

= 648·485·59 mod 713

= 242

144^2 mod 713 = 59

144^4 mod 713
= $144^2 \cdot 144^2$ mod 713
= 59·59 mod 713
= 629

144^8 mod 713
= $144^4 \cdot 144^4$ mod 713
= 629·629 mod 713
= 639

144^{16} mod 713
= $144^8 \cdot 144^8$ mod 713
= 639·639 mod 713
= 485

144^{32} mod 713
= $144^{16} \cdot 144^{16}$ mod 713
= 485·485 mod 713
= 648

ទ្រឹស្តីចំនួន

ចំនួនបឋម

និយមន័យ : ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $n>1$ ហើយ n មានតួចែករួមតែពីរគត់គឺ 1 និង n ខ្លួនឯង ។ ករណីផ្សេងពីនេះ គេហៅថា ចំនួនមិនបឋម ។

ទ្រឹស្តីបទ : បើ $n\in\mathbb{N}$ ហើយ n មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋម b ដែល $b|n$ និង $b^2\le n$ ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

ចំនួនបឋម

ទ្រឹស្តីបទ : បើ $n\in\mathbb{N}$, n ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមដែលមានការេតូចជាង ឬស្មើ n នោះ n ជាចំនួនបឋម ។

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថា 173 ជាចំនួនបឋម ។

ចម្លើយ : 173 ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម 2, 3, 5, 7, 11 និង 13 ទេ ។

13 ជាចំនួនបឋមធំបំផុត ដែល $13^2 = 169\le 173$

ដូចនេះ 173 ជាចំនួនបឋម ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

ចំនួនបឋម

ទ្រឹស្តីបទ Fermat (Fermat´s little theorem)

ចំពោះចំនួនគត់ពីរ គឺ a និង p បើ p ជាចំនួនបឋម ហើយ $p \nmid a$ នោះ

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

ឧទាហរណ៍៖ តើចំនួន 997 ជាចំនួនបឋមឬទេ?

$$2^{997-1} \quad \bmod 997 = 1??$$

ឧទាហរណ៍៖ តើចំនួន 997 ជាចំនួនបឋមឬទេ?

1 111 100 101

$$996 = 4 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$$

$$2^{997-1} \quad \bmod 997$$

$$= 2^{512} 2^{256} 2^{128} 2^{64} 2^{32} 2^{4} \quad \bmod 997$$

$2^{996} \bmod 997$

$= 2^{512}\ 2^{256}\ 2^{128}\ 2^{64}\ 2^{32}\ 2^{4} \bmod 997$

$= 565.668.299.961 \cdot 966 \cdot 16 \bmod 997$

$= 1$

$2^4 \bmod 997 = 16$

$2^{32} \bmod 997$
$= 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 . 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \bmod 997$
$= 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \bmod 997$
$= 966$

$2^{64} \bmod 997$
$= 2^{32} \cdot 2^{32} \bmod 997$
$= 966 \cdot 966 \bmod 997$
$= 961$

$2^{128} \bmod 997$
$= 2^{64} \cdot 2^{64} \bmod 997$
$= 961 \cdot 961 \bmod 997$
$= 299$

$2^{256} \bmod 997$
$= 2^{128} \cdot 2^{128} \bmod 997$
$= 299 \cdot 299 \bmod 997$
$= 668$

$2^{512} \bmod 997$
$= 2^{256} \cdot 2^{256} \bmod 997$
$= 668 \cdot 668 \bmod 997$
$= 565$

ដូច្នេះ ចំនួន 997 ជាចំនួនបឋម

ទ្រឹស្តីចំនួន

តួចែករួមធំបំផុត

និយមន័យ 1៖ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ d ជាតួចែករួម នៃ a និង b កាលណា d ជាតួចែកនៃ a ផងនិងជាតួចែកនៃ b ផង ។

ឧទាហរណ៍ ៖ 20 ជាតួចែករួមនៃ 40 និង 500 ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

តួចែករួមធំបំផុត

និយមន័យ 2 : តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាងគេក្នុងចំណោមតួចែករួមនៃ a និង b ហើយតាងដោយ $\delta = PGCD(a, b)$ ឬ $\delta = GCD(a, b)$ ។

ឧទាហរណ៍ : តួចែកនៃ 42 គឺ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

តួចែកនៃ 30 គឺ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

តួចែករួមនៃ 42 និង 30 គឺ 1, 2, 3 និង 6 នោះគេបាន $GCD(42, 30) = 6$ ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

តួចែករួមធំបំផុត

របៀបរកតួចែករួមធំបំផុត : ដើម្បីរកតួចែករួមធំបំផុតនៃពីរចំនួន a និង b គេត្រូវបំបែក a និង b ជាកត្តាបឋម ។ តួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ជាផលគុណកត្តាបឋមដែលដូចគ្នានិងមាននិទស្សន្តតូចនៃ a និង b ។

ឧទាហរណ៍ : $60 = 2\times 3\times 5$ និង $90 = 2\times 3^2\times 5$

ដូចនេះ $GCD(60, 90) = 2\times 3\times 5 = 30$ ។

ទ្រឹស្តីចំនួន

តួចែករួមធំបំផុត

ទ្រឹស្តីបទ : បើ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $a = bq + r$ ដោយ $0 < r < b$ នោះ $GCD(a,\ b) = GCD(b,\ r)$ ។

រក $GCD(213,\ 63)$ ។

រក $GCD(213,\ 63)$ ។

$213 = 3 \times 63 + 24$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(63,\ 24)$

$63 = 2 \times 24 + 15$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(63,\ 24) = GCD(24,\ 15)$

$24 = 1 \times 15 + 9$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(63,\ 24) = GCD(24,\ 15)$
$= GCD(15,\ 9)$

$15 = 1 \times 9 + 6$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(63,\ 24) = GCD(24,\ 15)$
$= GCD(15,\ 9) = GCD(9,\ 6)$

$9 = 1 \times 6 + 3$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(6,\ 3)$

$6 = 2 \times 3 + 0$ នាំឱ្យ $GCD(213,\ 63) = GCD(6,\ 3) = 3$

3 ជាសំណល់ចុងក្រោយបំផុតខុសពីសូន្យ ។

អាល់ក្កូរីតអឺគ្លីត

$a = bq + r$ នាំឱ្យ $GCD(a, b) = GCD(b, r)$

- បើ b ចែកដាច់នឹង r នោះ r ជា GCD នៃ a និង b
- បើ b ចែកមិនដាច់នឹង r នោះ $b = rq_1 + r_1$

គេបាន $GCD(a, b) = GCD(b, r) = GCD(r, r_1)$

ដោយ $b > r > r_1 > \dots$ វិធីចែកបន្តបន្ទាប់ត្រូវតែចប់ត្រង់កន្លែងណាមួយ ។

បើវិធីចែកនៃ r_{n-1} និង r_n ត្រង់តម្លៃ n ណាមួយ បានសំណល់ 0 នោះ r_n ជា GCD នៃ r_{n-1} និង r_n ។

ដូចនេះ r_n ជា GCD នៃ a និង b បានន័យថា

$GCD(a, b) = GCD(b, r) = GCD(r, r_1) = \dots = GCD(r_{n-1}, r_n) = r_n$ ។

វិធីចែកបន្តបន្ទាប់បែបនេះហៅថា ***អាល់ក្កូរីតអឺគ្លីត*** ។

របៀបរក GCD តាមអាល់ក្កូរីតអឺគ្លីត

លំហាត់គំរូ : រក GCD នៃ 5664 និង 984 ។

ចម្លើយ : គេយក 5664 ចែកនឹង 984 បាន 5 និងសំណល់ 744 ។ បន្ទាប់មកយក 984 ចែកនឹង 744 បាន 1 និងសំណល់ 240 ... ។ គេធ្វើតារាងខាងក្រោម :

	5	1	3	10	ផលចែក
5664	984	744	240	24	
744	240	24	0		សំណល់
r_1	r_2	r_3			

តាមតារាង គេបាន $GCD(5664, 984) = 24$ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលជាពហុគុណរួមវិជ្ជមាន ហើយតូចជាងគេនៃ a និង b ។

គេកំណត់សរសេរ : $\mu = PPCM(a, b)$ ឬ $\mu = LCM(a, b)$ ។

ឧទាហរណ៍ : $LCM(3, 4) = 12$ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

ជាទូទៅ : ដើម្បីរកពហុគុណរួមតូចបំផុត គេត្រូវគណនាតាមជំហានដូចខាងក្រោម :

> ***ជំហានទី1*** : បំបែកចំនួន a និង b ជាផលគុណកត្តាបឋម
>
> ***ជំហានទី2*** : គណនាផលគុណនៃកត្តាបឋមទាំងអស់ ដោយយកកត្តាដែលមាននិទស្សន្តធំចំពោះកត្តាណាដែលដូចគ្នា។ ផលគុណនេះ ជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ a និង b ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

លំហាត់គំរូ1 : រក $LCM(168,\ 180)$ ។

ចម្លើយ :

- ***ជំហានទី1*** : បំបែកចំនួនទាំងពីរជាផលគុណកត្តាបឋម

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

- ***ជំហានទី2*** : គណនាផលគុណនៃកត្តាបឋមទាំងអស់ ដោយយកកត្តាដែលមាននិទស្សន្ត ធំចំពោះកត្តាណាដែលដូចគ្នា :

ដូចនេះ គេបាន $LCM(168,\ 180) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

ទំនាក់ទំនងរវាង LCM (a, b) និង GCD (a, b)

ទ្រឹស្តីបទ : ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b

គេបាន $GCD(a,\ b) \times LCM(a,\ b) = ab$ ឬ $\delta\mu = ab$ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

ទំនាក់ទំនងរវាង LCM (a, b) និង GCD (a, b)

លំហាត់គំរូ : រក *LCM* នៃចំនួន 1176 និង 252 ។

ចម្លើយ : - ***ជំហានទី1*** រក *GCD* តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត

	252	252	252	ផលចែក
1176	252	168	84	
168	84	0		សំណល់

គេបាន $GCD(1176,\ 168) = 84$

- ***ជំហានទី2*** រក $LCM(1176,\ 168) = \dfrac{1176 \times 252}{GCD(1176,\ 168)} = \dfrac{1176 \times 252}{84} = 3528$

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

២. ពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

២. ពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

ឧទាហរណ៍៖ បើយើងសន្សំលុយ ២០០ ០០០៛ រៀងរាល់ខែ នោះចំនួនលុយសរុបគឺអាស្រ័យនៅលើចំនួនខែដែលបានដាក់សន្សំៗ

បើយើងតាង ចំនួនខែ ដោយ t នោះចំនួនលុយសរុបគឺ $\boxed{២០០\ ០០០ \times t}$

កន្សោមពីជគណិត អថេរ

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

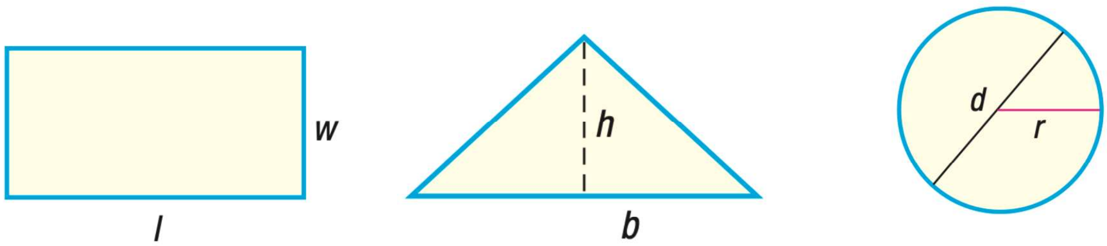
ឧទាហរណ៍៖ បើគណនីសន្សំរបស់យើងមាន ៤០០ ០០០៛ ហើយយើងដាក់សន្សំបន្ថែម ២០០ ០០០៛ រៀងរាល់ខែ នោះចំនួនលុយសរុបគឺអាស្រ័យទៅចំនួនខែៗ

បើយើងតាង ចំនួនខែ ដោយ t នោះចំនួនលុយសរុបគឺ $\boxed{២០០\ ០០០ \times t + ៤០០\ ០០០}$

កន្សោមពីជគណិត អថេរ

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

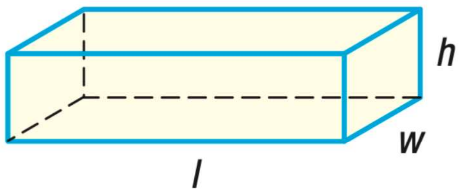
១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត



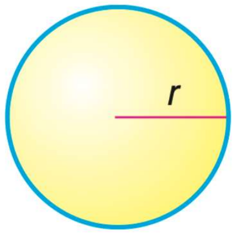
ក្រឡាផ្ទៃ $= lw$ ក្រឡាផ្ទៃ $= \frac{1}{2}bh$ ក្រឡាផ្ទៃ $= \pi r^2$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

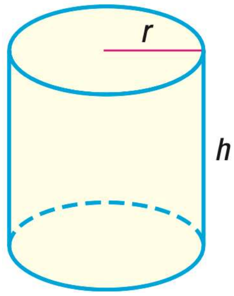
១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត



មាឌ $= lwh$



មាឌ $= \frac{4}{3}\pi r^3$



មាឌ $= \pi r^2 h$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

២. ពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

២. ពហុធា

ពហុធា ដែលមានមួយអថេរកំណត់ដោយ៖ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ជាចំនួនថេរ (មេគុណ)

$n \geq 0,$ x ជាអថេរ

បើ $a_n \neq 0$ នោះ n ជាដឺក្រេនៃពហុធា

ពហុធា ដែលមានច្រើនអថេរ

$$4x^2y^3 + 3xy^2 - 2x$$

ដឺក្រេនៃពហុធានេះគឺ 2+3=5

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

២. ពហុធា

ពហុធា	មេគុណ	ដឺក្រេ
$-8x^3 + 4x^2 - 6x + 2$	$-8, 4, -6, 2$	3
$3x^2 - 5 = 3x^2 + 0 \cdot x - 5$	$3, 0, -5$	2
$8 - 2x + x^2 = 1 \cdot x^2 - 2x + 8$	$1, -2, 8$	2
$5x + \sqrt{2} = 5x^1 + \sqrt{2}$	$5, \sqrt{2}$	1
$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$	3	0
0	0	No degree

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

២. ពហុធា

កន្សោមពីជគណិតខាងក្រោម៖

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{x} \\[2em] \dfrac{x^2+1}{x+5} \end{array}} \longrightarrow \text{មិនមែនជាពហុធាទេ}$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

២. ពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីបូកលើពហុធា

$$
\begin{aligned}
&(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2) + (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)\\
&= 3x^4 + (8x^3 - 2x^3) + (-2x^2 + x^2) + (6x + x) - 2\\
&= 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0\\
 & & 8x^3 & -\ 2x^2 & +\ 6x & -\ 2\\
+ & 3x^4 & -\ 2x^3 & +\ x^2 & +\ x & \\
\hline
 & 3x^4 & +\ 6x^3 & -\ x^2 & +\ 7x & -\ 2
\end{array}
$$

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីដកពហុធា

$$
\begin{aligned}
&(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1) - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 5)\\
&= 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1 + \underbrace{(-2x^4 + 8x^2 + 6x - 5)}_{\text{Be sure to change the sign of each term in the second polynomial.}}\\
&= (3x^4 - 2x^4) + (-4x^3) + (6x^2 + 8x^2) + 6x + (-1 - 5)
\end{aligned}
$$

Group like terms.

$$= x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 6x - 6$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីដកពហុធា

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & & & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 3x^4 & -4x^3 & +6x^2 & & -1 & = & & 3x^4 & -4x^3 & +6x^2 & & -1 \\
- & [2x^4 & & -8x^2 & -6x & +5] & = & + & -2x^4 & & +8x^2 & +6x & -5 \\
\hline
 & & & & & & & & x^4 & -4x^3 & +14x^2 & +6x & -6
\end{array}
$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីគុណពហុធា

$$(2x+5)(x^2-x+2) = 2x(x^2-x+2) + 5(x^2-x+2)$$

↑ Distributive Property

$$= (2x\cdot x^2 - 2x\cdot x + 2x\cdot 2) + (5\cdot x^2 - 5\cdot x + 5\cdot 2)$$

↑ Distributive Property

$$= (2x^3 - 2x^2 + 4x) + (5x^2 - 5x + 10)$$

↑ Law of Exponents

$$= 2x^3 + 3x^2 - x + 10$$

↑ Combine like terms.

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីគុណពហុធា

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & x^2 & -\ x & +\ 2 & \\
 & & 2x & +\ 5 & \\
\hline
 & 2x^3 & -\ 2x^2 & +\ 4x & \text{This line is } 2x(x^2 - x + 2). \\
(+) & & 5x^2 & -\ 5x\ +\ 10 & \text{This line is } 5(x^2 - x + 2). \\
\hline
 & 2x^3 & +\ 3x^2 & -\ x\ +\ 10 & \text{Sum of the above two lines}
\end{array}
$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(x^2+5x+6)\div(x+2)$

ជំហានទី១៖ $x+2\overline{)x^2+5x+6}$

ជំហានទី២៖ $\begin{array}{r} x \\ x+2\overline{)x^2+5x+6} \end{array}$ $\quad \dfrac{x^2}{x} = x$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(x^2+5x+6) \div (x+2)$

ជំហានទី៣៖

$$\begin{array}{r} x \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+5x+6} \\ \underline{x^2+2x} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x(x+2) = \\ \qquad x^2+2x \end{array}$$

ជំហានទី៤៖

$$\begin{array}{r} x \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+5x+6} \\ \longrightarrow \underline{x^2+2x} \\ 3x+6 \end{array}$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(x^2+5x+6) \div (x+2)$

ជំហានទី៥៖

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+5x+6} \\ \underline{x^2+2x} \\ 3x+6 \\ \underline{3x+6} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{3x}{x} = 3 \\ \\ 3(x+2) = \\ \qquad 3x+6 \end{array}$$

យើងបាន៖ $(x^2+5x+6) \div (x+2) = x+3$ ឬអាចសរសេរ $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

ប្រមាណវិធីចែកពហុធា $(7x^2 - 3x - 4) \div (x - 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7x + 11 \\
\hline
x - 2 & 7x^2 - 3x - 4 \\
 & \underline{7x^2 - 14x} \\
 & \qquad 11x - 4 \\
 & \qquad \underline{11x - 22} \\
 & \qquad\qquad 18 \quad \longleftarrow \text{A remainder of 18}
\end{array}
$$

យើងបាន៖ $\dfrac{7x^2 - 3x - 4}{x - 2} = 7x + 11 + \dfrac{18}{x - 2}$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

១. អថេរ និងកន្សោមពីជគណិត

២. ពហុធា

៣. ប្រមាណវិធីលើពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

កន្សោមដែលមានកត្តារួម៖

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2(x+2)^4 + 4(x-1)^3(x+2)^3 &= (x-1)^2(x+2)^3[3(x+2)+4(x-1)] \\ &= (x-1)^2(x+2)^3[3x+6+4x-4] \\ &= (x-1)^2(x+2)^3(7x+2) \end{aligned}$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ពហុធា	កត្តារួម	កត្តាដែលនៅសល់	ដាក់ជាផលគុណកត្តា
$2x+4$	2	$x+2$	$2x+4=2(x+2)$
$3x-6$	3	$x-2$	$3x-6=3(x-2)$
$2x^2-4x+8$	2	x^2-2x+4	$2x^2-4x+8=2(x^2-2x+4)$
$8x-12$	4	$2x-3$	$8x-12=4(2x-3)$
x^2+x	x	$x+1$	$x^2+x=x(x+1)$
x^3-3x^2	x^2	$x-3$	$x^3-3x^2=x^2(x-3)$
$6x^2+9x$	$3x$	$2x+3$	$6x^2+9x=3x(2x+3)$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

សមភាពសំខាន់ៗ

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ពហុធាដឺក្រេទី២៖ $x^2 + Bx + C$

$$a + b = B$$

$$ab = C$$

$$x^2 + Bx + C = (x+a)(x+b)$$

$$= x^2 + ax + bx + ab$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៨. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ពហុធាដឺក្រេទី២៖ $x^2 + 7x + 10$

1, 10	−1, −10	2, 5	−2, −5
11	−11	7	−7

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

មេរៀនទី៨៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៨. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ដាក់ជាកត្តាដោយប្រើលក្ខណៈផ្តុំ

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x - 8 &= (x^3 - 4x^2) + (2x - 8) \\ &= x^2(x-4) + 2(x-4) \\ &= (x-4)(x^2+2) \end{aligned}$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ពហុធាដឺក្រេទី២៖ $Ax^2 + Bx + C$

ជំហានទី១៖ រកតម្លៃ AC

ជំហានទី២៖ រកគូនៃចំនួនគត់ a, b ដែល $a \times b = AC$ ហើយ $a + b = B$

ជំហានទី៣៖ សរសេរ $Ax^2 + Bx + C = \boxed{Ax^2 + ax + bx + C}$

ជំហានទី៤៖ ដាក់កន្សោម $Ax^2 + ax + bx + C$ ដោយប្រើលក្ខណៈផ្តុំ

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ដាក់កន្សោម $2x^2 + 5x + 3$ ជាផលគុណកត្តា

$$\downarrow$$

$$AC = 2 \times 3 = 6$$

1, 6	−1, −6	2, 3	−2, −3
7	−7	5	−5

$$2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 3x + 3$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

ដាក់កន្សោម $2x^2 + 5x + 3$ ជាផលគុណកត្តា

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 3x + 3 &= (2x^2 + 2x) + (3x + 3) \\ &= 2x(x + 1) + 3(x + 1) \\ &= (x + 1)(2x + 3) \end{aligned}$$

$$2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$$

មេរៀនទី៤៖ កន្សោមពីជគណិត និងពហុធា

៤. ការដាក់ពហុធាជាផលគុណកត្តា

បំពេញជាការេចំពោះកន្សោម $x^2 + bx$ $\longrightarrow$ $x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

$y^2 + 8y$	$\left(\frac{1}{2}\cdot 8\right)^2 = 16$	$y^2 + 8y + 16$	$(y + 4)^2$
$x^2 + 12x$	$\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2 = 36$	$x^2 + 12x + 36$	$(x + 6)^2$
$a^2 - 20a$	$\left(\frac{1}{2}\cdot(-20)\right)^2 = 100$	$a^2 - 20a + 100$	$(a - 10)^2$
$p^2 - 5p$	$\left(\frac{1}{2}\cdot(-5)\right)^2 = \frac{25}{4}$	$p^2 - 5p + \frac{25}{4}$	$\left(p - \frac{5}{2}\right)^2$

មេរៀនទី៦ សមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់

លីម សីហា

Graduate School of Science
Royal University of Phnom Penh

July 12, 2024

មាតិកា

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ទ្រឹស្តីបទ 1. (ការចែកពហុធា)

បើ $f(x)$ ហើយ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ហើយបើ $g(x)$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេធំជាង 0 នោះ មានអនុគមន៍ពហុធា $q(x)$ នឹង $r(x)$ តែមួយគត់ ដែល

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \tag{1}$$

ឬ

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \tag{2}$$

ហើយ $r(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេតូចជាងដឺក្រេរបស់ $g(x)$ ។

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ទ្រឹស្តីបទ 2. (សំណល់)

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ពហុធា បើ $f(x)$ ត្រូវបានចែកនឹង $(x-c)$ នោះសំណល់នៃការចែកគឺ $f(c)$ ។

.

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

តាមទ្រឹស្តីបទ (ការចែកពហុធា) យើងអាចសរសេរ ការចែក $f(x)$ នឹង $(x-c)$ ដោយ

$$f(x) = q(x).(x-c) + r \tag{3}$$

ពេល $x = c$ យើងបាន $f(c) = r$ ។

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ឧទាហរណ៍ 1. ចូររកសំណល់នៃការចែក $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5$ និងកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $x - 3$
2. $x + 2$

ដំណោះស្រាយ៖

1. $r = f(3) = 3^3 - 4(3)^2 - 5 = 27 - 36 - 5 = -14$
2. $r = f(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 5 = -8 - 16 - 5 = -29$

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ទ្រឹស្តីបទ 3. (ចំនួននៃឫសចំនួនពិត)

អនុគមន៍ពហុធាមួយ មិនអាចមាន ចំនួននៃឫសចំនួនពិត លើសដឺក្រេនៃពហុធាឡើយ។

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ទ្រឹស្តីបទ 4. (សំណល់)

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ពហុធា។ $(x-c)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$ លុះត្រាតែ $f(c)=0$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ (ទុកជាកិច្ចការអនុវត្តន៍)

1. បើ $f(c)=0$ នោះ $(x-c)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$។
2. បើ $(x-c)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$ នោះ $f(c)=0$។

ទ្រឹស្តីបទសំណល់

ឧទាហរណ៍ 2. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទកត្តា ចូរកំណត់កន្សោមដែលជាកត្តាមួយនៃ

$$f(x)=2x^3-x^2+2x-3 \tag{4}$$

1. $x-1$
2. $x+2$

ដំណោះស្រាយ៖

1. $f(1)=2(1)^3-(1)^2+2(1)-3=2-1+2-3=0$
2. $f(-2)=2(-2)^3-(-2)^2+2(-2)-3=\cdots=-27\neq 0$

ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត

ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត គឺផ្តល់អោយយើងដឹងពីចំនួនឫសវិជ្ជមាន និងអវិជ្ជមាននៃ ពហុធា តាមរយៈការប្រែប្រួលសញ្ញានៃមេគុណរបស់ $f(x)$ ហើយនិង $f(-x)$ រៀងគ្នាៗ

ឧទាហរណ៍៖

$$f(x) = -3x^7 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1$$

$-$ ទៅ $+$ $\qquad$ $+$ ទៅ $-$

$$f(-x) = -3(-x)^7 + 4(-x)^4 + 3(-x)^2 - 2(-x) - 1$$

$$= 3x^7 + 4x^4 + 3x^2 + 2x - 1$$

$+$ ទៅ $-$

ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត

ទ្រឹស្តីបទ 5. (ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត)

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ពហុធាៗ

- ចំនួននៃ ឫសចំនួនពិតវិជ្ជមាន របស់ $f(x) = 0$ គឺស្មើនឹងចំនួននៃការប្រែប្រួលសញ្ញាក្នុង $f(x)$ ឬមិនដូច្នេះទេ វានឹងស្មើនឹងចំនួននោះដកចំនួនគត់គូណាមួយៗ
- ចំនួននៃ ឫសចំនួនពិតអវិជ្ជមាន របស់ $f(x) = 0$ គឺស្មើនឹងចំនួននៃការប្រែប្រួលសញ្ញាក្នុង $f(-x)$ ឬមិនដូច្នេះទេ វានឹងស្មើនឹងចំនួននោះដកចំនួនគត់គូណាមួយៗ

ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត

ឧទាហរណ៍ 3. ចូរកំណត់ចំនួនឫសចំនួនពិតនៃ

$$f(x) = 3x^7 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0 \tag{5}$$

ដំណោះស្រាយ

$$f(x) = 3x^7 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^7 - 4(-x)^4 + 3(-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 3 \\ &= -3x^7 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3 \end{aligned} \tag{7}$$

- ចំនួនឫសវិជ្ជមាន គឺ 3 ឬ 1
- ចំនួនឫសអវិជ្ជមាន គឺ 2 ឬ 0

ទ្រឹស្តីបទឫសសនិទាន

ទ្រឹស្តីបទ 6. (ឫសសនិទាន)

តាង f ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលមានដឺក្រេធំជាងឬស្មើ 1 ដែលមានទម្រង់៖

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, (\ a_n \neq 0, a_0 \neq 0) \tag{8}$$

ដែលគ្រប់មេគុណ គឺជាចំនួនគត់ៗ បើ $\frac{p}{q}$ (ទម្រង់តូចបំផុត) ជាឫសសនិទាននៃ $f(x) = 0$ នោះ p ជាតួចែកមួយនៃ a_0 ហើយ q ជាតួចែកមួយនៃ a_nៗ

ទ្រឹស្ដីបទឫសសនិទាន

ឧទាហរណ៍ 4. ចូររកចំនួនសនិទានដែលអាចជាឫសនៃ

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = 0 \tag{9}$$

ដំណោះស្រាយៈ

- តួចែកនៃ -6 ៖ $p: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
- តួចែកនៃ 2 ៖ $\quad q: \quad \pm1, \pm2$

យើងបាន

$$\frac{p}{q}: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \tag{10}$$

ដូច្នេះ បើ $f(x) = 0$ មានឫសមួយជាចំនួនសនិទាន
នោះឫសនោះជាចំនួនមួយក្នុងចំនោមចំនួនទាំង 12 ក្នុង (10)។

សមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍ 5. រកឫសនៃ

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 37x^2 + 60x - 36 = 0 \tag{11}$$

ដំណោះស្រាយ

- $f(x) = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន 5។
- ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត
  ចំនួនឫសវិជ្ជមានមាន $5, 3$ ឬ 1
  ចំនួនឫសអវិជ្ជមាន មាន 0 ព្រោះ

$$f(-x) = -x^5 - 7x^4 - 19x^3 - 37x^2 - 60x - 36 \tag{12}$$

- $\frac{p}{q}: \quad 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$ ព្រោះ

$$p: \quad 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \tag{13}$$

$$q: \quad 1 \tag{14}$$

សមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់មានមួយអញ្ញាត

- $f(1)=0$ នោះ $(x-1)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$
- $f(3)=0$ នោះ $(x-3)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$

យើងបាន

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5-7x^4+19x^3-37x^2+60x-36 && (15)\\
&= (x-1)(x-3)(................) && (16)\\
&= (x-1)(x-3)\left(x^3-3x^2+4x-12\right) && (17)\\
&= (x-1)(x-3)(x-3)(x^2+4) && (18)
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ $x=1, x=3$ ។

កិច្ចការអនុវត្តន៍

1. ចូររកសំណល់នៃការចែកពហុធាខាងក្រោម រួចសរសេរ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តាបើមាន៖
   - a. $f(x)=4x^3-3x^2-8x+4; \quad x-2$
   - b. $f(x)=5x^4-20x^3+x-4; \quad x-2$
   - c. $f(x)=2x^6+129x^3+64; \quad x+4$
   - d. $f(x)=4x^6-64x^4+x^2-15; \quad x+4$
   - e. $f(x)=2x^4-x^3+2x-1; \quad x-\frac{1}{2}$
   - f. $f(x)=-4x^3+5x^2+8; \quad x+3$
   - g. $f(x)=4x^4-15x^2-4; \quad x-2$
   - h. $f(x)=2x^6-18x^4+x^2-9; \quad x+3$
   - i. $f(x)=x^6-16x^4+x^2-16; \quad x+4$
   - j. $f(x)=3x^4+x^3-3x+1; \quad x+\frac{1}{3}$

កិច្ចការអនុវត្តន៍

2. ចូរដោះស្រាយសមីការ៖
   a. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$
   b. $3x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$
   c. $3x^3 - x^2 - 15x + 5 = 0$
   d. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$
   e. $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$
   f. $2x^4 - 19x^3 + 57x^2 - 64x + 20 = 0$
   g. $2x^3 - 3x^2 - 3x - 5 = 0$
   h. $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8 = 0$
   i. $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$
   j. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$
   k. $2x^4 + x^3 - 24x^2 + 20x + 16 = 0$

Thank You

សូមអរគុណ!

មេរៀនទី៧ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

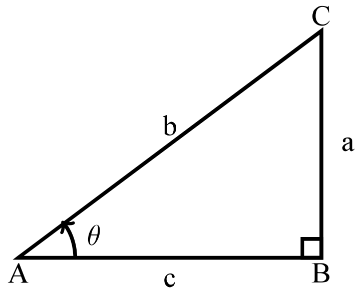
លឹម សីហា

Graduate School of Science
Royal University of Phnom Penh

July 19, 2024

មាតិកា

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំក្នុងត្រីកោណកែង



ស៊ីនុស $\sin(\theta) = \frac{a}{b}$

កូស៊ីនុស $\cos(\theta) = \frac{c}{b}$

តង់សង់ $\tan(\theta) = \frac{a}{c}$

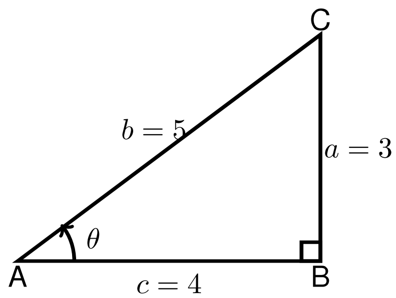
កូតង់សង់ $\cot(\theta) = \frac{c}{a}$

ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំក្នុងត្រីកោណកែង

ឧទាហរណ៍ 0.



ស៊ីនុស $\sin(\theta) = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

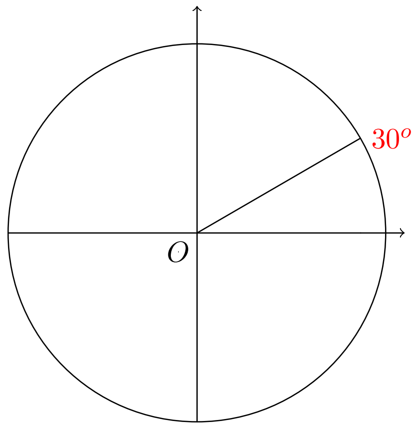
កូស៊ីនុស $\cos(\theta) = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$

តង់សង់ $\tan(\theta) = \frac{a}{c} = \frac{3}{4}$

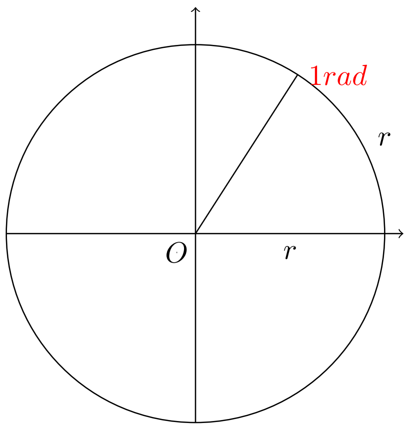
កូតង់សង់ $\cot(\theta) = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

រង្វាស់មុំគិតជាដឺក្រេ (^{o})



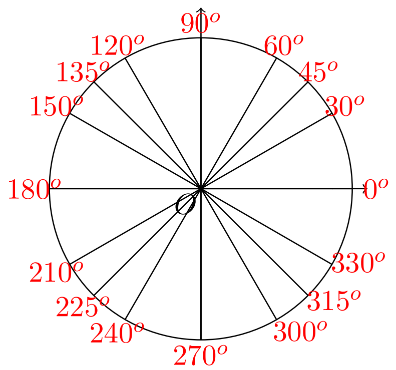
រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់ (rad)



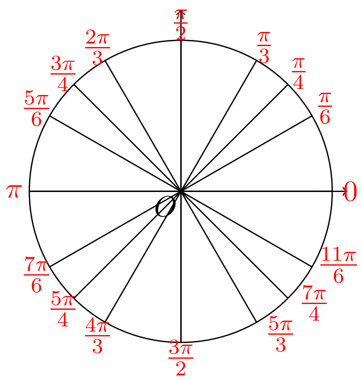
- $\pi\ (rad) = 180^o$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

រង្វាស់មុំគិតជាដឺក្រេ (^{o})



រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់ (rad)



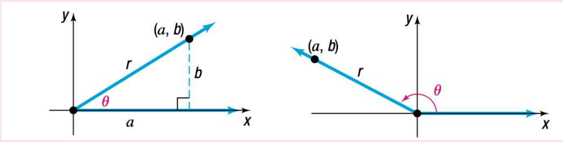
- $30^o = 30^o \times \dfrac{\pi}{180^o}\ (rad) = \dfrac{\pi}{6}\ (rad)$
- $\dfrac{\pi}{6}\ (rad) = \dfrac{\pi}{6}(rad) \times \dfrac{180^o}{\pi\ (rad)} = 30^o$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

និយមន័យ 1. (អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ)

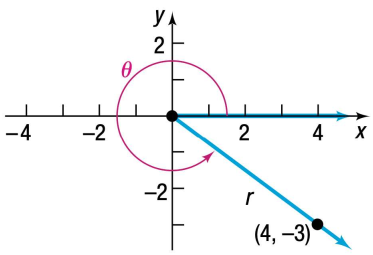
ឧបមាថា θ ជារង្វាស់មុំទូទៅ ហើយចំណុច (a,b) ស្ថិតនៅលើជ្រុងចុងនៃ θ (លើកលែង $(0,0)$)ៗ បើ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ (ប្រវែងពី $(0,0)$ ទៅ (a,b))
នោះអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រទាំង៤នៃ θ គឺកំណត់ដោយ៖

- $\sin(\theta)=\dfrac{b}{r}$
- $\cos(\theta)=\dfrac{a}{r}$
- $\tan(\theta)=\dfrac{b}{a}$
- $\cot(\theta)=\dfrac{a}{b}$



អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

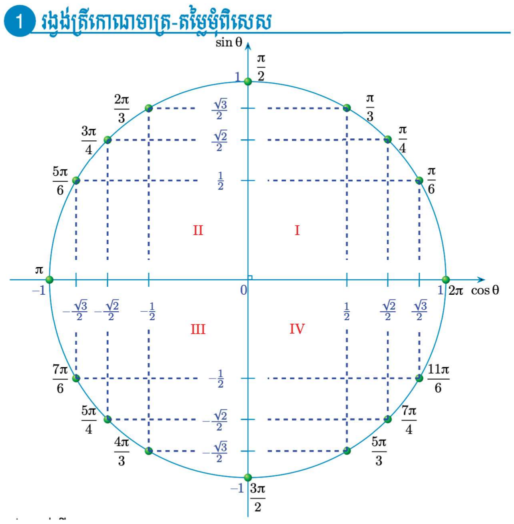
ឧទាហរណ៍ 1.



- $\sin(\theta)=\dfrac{b}{r}=-\dfrac{3}{5}$
- $\cos(\theta)=\dfrac{a}{r}=\dfrac{4}{5}$
- $\tan(\theta)=\dfrac{b}{a}=-\dfrac{3}{4}$
- $\cot(\theta)=\dfrac{a}{b}=-\dfrac{4}{3}$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

ចំពោះ $r = 1$ ៖



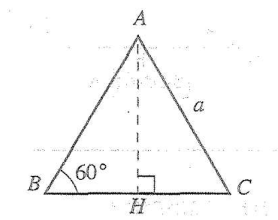
$$\cos(0) = 1 \quad (1)$$
$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$
$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$
$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \quad (4)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (5)$$
$$\vdots$$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$
$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (7)$$
$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \quad (8)$$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ



$AB = BC = AC = a$, $BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

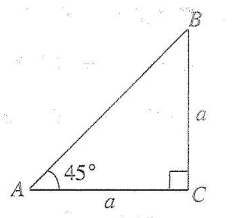
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$ នោះ $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

តាមនិយមន័យផលធៀបត្រីកោណមាត្រ គេបាន :

$$\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នៃមុំទូទៅ



គេមាន : $BC = AC = a$, $B = C = 45°$

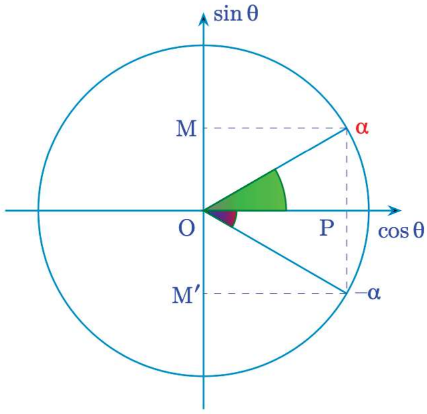
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ : $AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$AB = a\sqrt{2}$

$$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

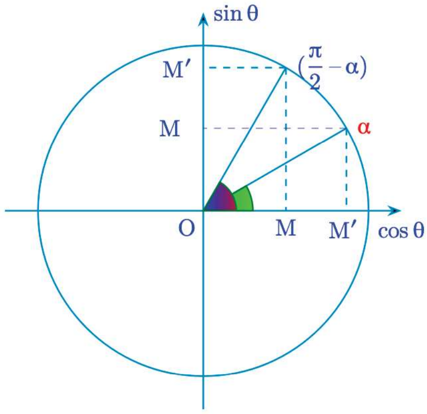
2 មុំផ្ទុយ



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

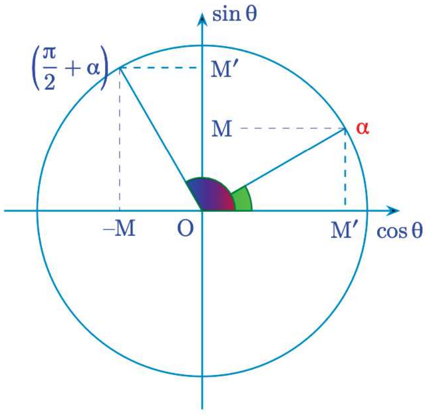
3 មុំបំពេញ



$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

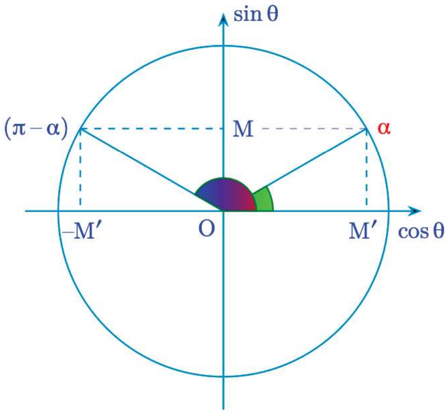
4 មុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

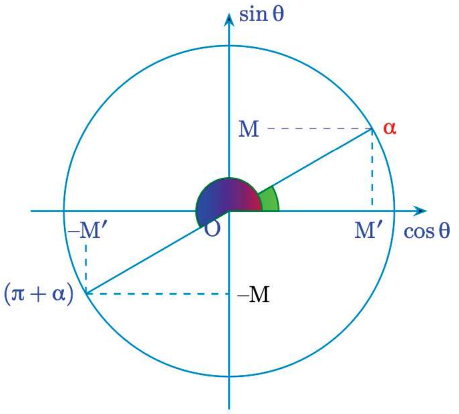
5 មុំបន្ថែម



$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

6 មុំដែលមានផលសងស្មើ π



$$
\begin{aligned}
\sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\
\tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha \\
\cot(\pi+\alpha) &= \cot\alpha
\end{aligned}
$$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

7 ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

- $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$
- $\boxed{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$
- $\boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1}$
- $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}}$
- $\boxed{\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}}$
- $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$
- $\boxed{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha}$
- $\boxed{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha}$
- $\boxed{1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$
- $\boxed{1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}}$
- $\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \;\; ; (k \in \mathbb{Z})}$
- $\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \;\; ; (k \in \mathbb{Z})}$
- $\boxed{\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \;\; ; (k \in \mathbb{Z})}$
- $\boxed{\cot(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \;\; ; (k \in \mathbb{Z})}$
- $\boxed{\sin(k\pi + \theta) = \begin{cases} \sin\theta & \text{បើ } k\text{គូ} \\ -\sin\theta & \text{បើ } k\text{សេស} \end{cases}}$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

8 រូបមន្តផលបូកនិងផលដកមុំ

- $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$
- $\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$
- $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$
- $\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}$
- $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$
- $\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$

9 រូបមន្តមុំឌុប

- $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$
- $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$
- $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$
- $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$
- $\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

10 រូបមន្តកន្លះមុំ

- $\boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\boxed{\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\boxed{\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$
- $\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$
- $\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\boxed{\tan^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
- $\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$

រូបមន្តសំខាន់ៗ

11 រូបមន្តបម្លែងពីផលគុណទៅជាផលបូក

- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

12 រូបមន្តបម្លែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ

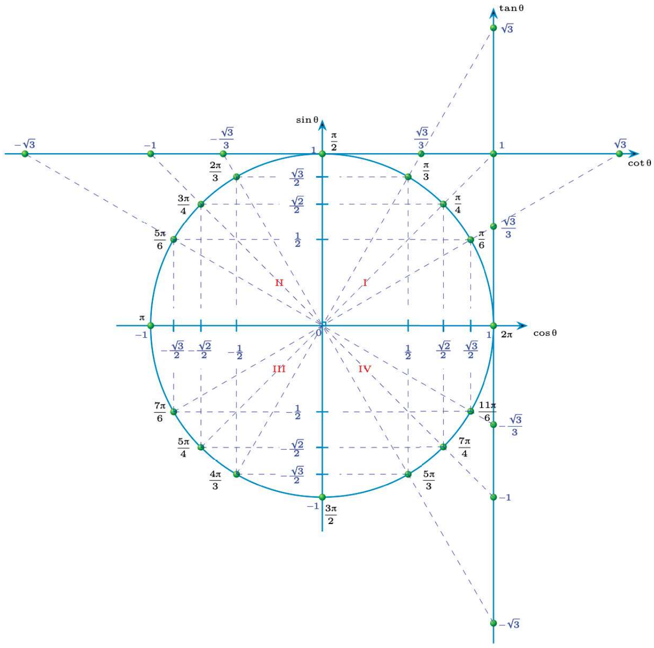
- $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
- $\tan p+\tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$
- $\tan p-\tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$
- $\cot p+\cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$
- $\cot p-\cot q = \frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

សមីការ និងវិសមីការ

13 សមីការត្រីកោណមាត្រ

ចំពោះ $k\in\mathbb{Z}$

- $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{array}\right.$
- $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right.$
- $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x=\alpha+k\pi$
- $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x=\alpha+k\pi$



សមីការ និងវិសមីការ

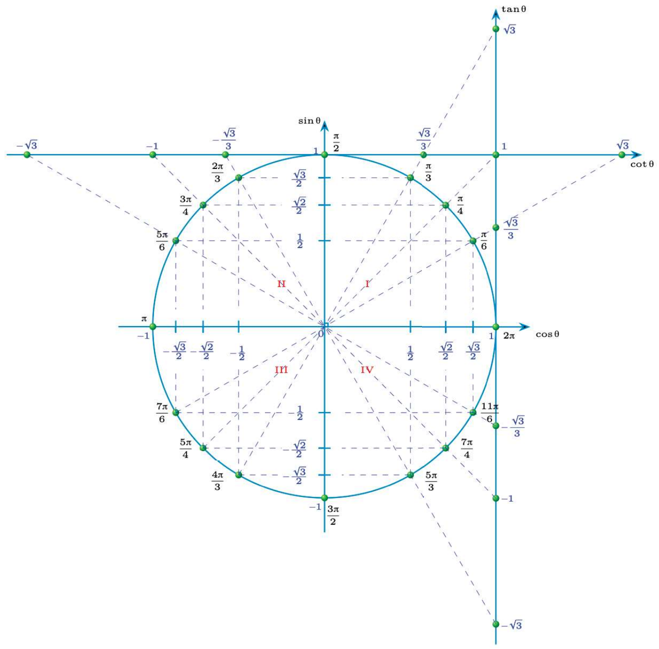
- $\boxed{\cos u(x) = \cos v(x) \quad \Rightarrow \left[\begin{aligned} u(x) &= v(x) + 2k\pi \\ u(x) &= -v(x) + 2k\pi \end{aligned}\right. \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\sin u(x) = \sin v(x) \quad \Rightarrow \left[\begin{aligned} u(x) &= v(x) + 2k\pi \\ u(x) &= \pi - v(x) + 2k\pi \end{aligned}\right. \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\tan u(x) = \tan v(x) \;\Rightarrow\; u(x) = v(x) + k\pi \; ; \; \left(u(x), v(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)}$
- $\boxed{\cot u(x) = \cot v(x) \quad \Rightarrow \; u(x) = v(x) + k\pi \; ; \; (u(x), v(x) \neq \pi + k\pi)}$

សមីការ និងវិសមីការ

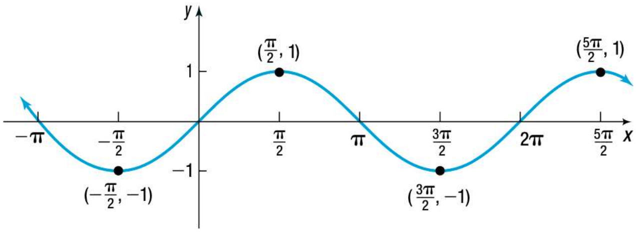
14 វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

- $\boxed{\sin x \le \sin\alpha \quad \Rightarrow \pi - \alpha + 2k\pi \le x \le \alpha + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\sin x \ge \sin\alpha \quad \Rightarrow \alpha + 2k\pi \le x \le \pi - \alpha + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\cos x \le \cos\alpha \quad \Rightarrow \alpha + 2k\pi \le x \le -\alpha + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$
- $\boxed{\cos x \ge \cos\alpha \quad \Rightarrow -\alpha + 2k\pi \le x \le \alpha + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{\tan x \le \tan\alpha \;\Rightarrow\; -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \alpha + k\pi}$ $\boxed{\tan x \ge \tan\alpha \;\Rightarrow\; \alpha + k\pi \le x \le k\pi}$

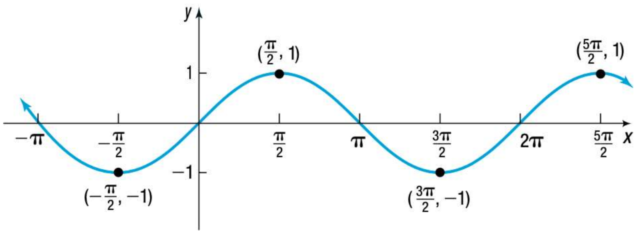


ក្រាបនៃ $y = \sin x$

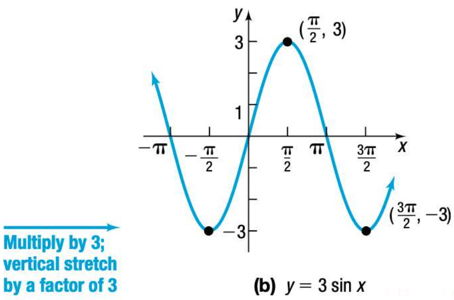


(a) $y = \sin x$

ក្រាបនៃ $y = A\sin x$

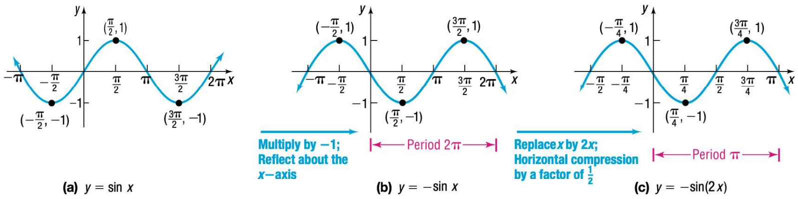


(a) $y = \sin x$



(b) $y = 3\sin x$

ក្រាបនៃ $y = A\sin\omega x$



ក្រាបនៃ $y = \cos x$

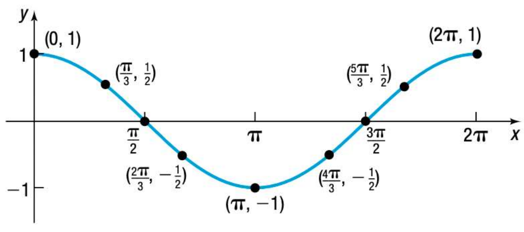


Figure 84 $y = \cos x, 0 \le x \le 2\pi$

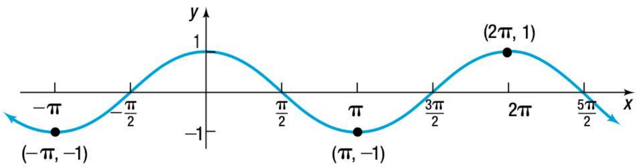
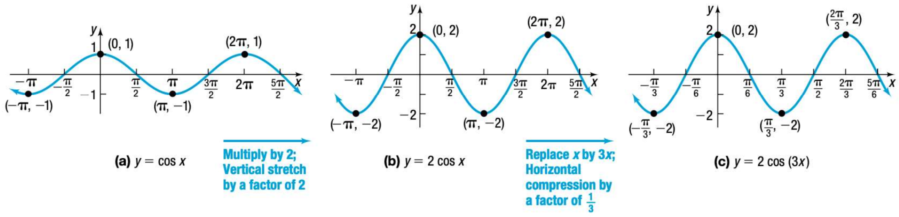


Figure 85 $y = \cos x, -\infty < x < \infty$

ក្រាបនៃ $y = A\cos \omega x$



Thank You

សូមអរគុណ!

មេរៀនទី៨ ចំនួនកុំផ្លិច

លឹម សីហា

Graduate School of Science
Royal University of Phnom Penh

July 27, 2024

មាតិកា

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

លក្ខណៈសំខាន់មួយក្នុងចំនួនពិត គឺការេនៃចំនួនពិតជាចំនួនវិជ្ជមាន។ ជាឧទាហរណ៍ មិនមានចំនួនពិត x ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2 = -1 \tag{1}$$

ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានេះ គេបង្កើតចំនួនថ្មីមួយដែលហៅថា ចំនួននិមិត្ត ឬឯកតានិមិត្ត។

និយមន័យ 1. (ឯកតានិមិត្ត)

ឯកតានិមិត្ត កំណត់តាងដោយ i ជាចំនួនដែលការេរបស់វាស្មើ -1។ មានន័យថា

$$i^2 = -1 \tag{2}$$

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

និយមន័យ 2. (ប្រព័ន្ធចំនួនកុំផ្លិច)

ចំនួនកុំផ្លិច ជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $a + bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ a ហៅថា ផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច b ហៅថា ផ្នែកនិមិត្តនៃចំនួនកុំផ្លិច ហើយ i ជាឯកត្តានិមិត្ត ដែល $i^2 = -1$។

ឧទាហរណ៍ 1. ចំនួន $-6 + 5i$ ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែលមាន

- ផ្នែកពិតស្មើ -6
- ផ្នែកនិមិត្តស្មើ 5

ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា៖ $a + bi = c + di$ លុះត្រាតែ $a = c$ ហើយ $b = d$

ប្រមាណវិធីបូក៖ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

ប្រមាណវិធីដក៖ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

ប្រមាណវិធីគុណ៖ $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

និយមន័យ 3. (ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់)

បើ $z = a + bi$ ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z គឺកំណត់ដោយ $\bar{z} = a - bi$

ទ្រឹស្តីបទ 1. (ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច និង ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់)

ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច ជាមួយចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា គឺជាចំនួនពិតៗ មានន័យថា បើ $z = a + bi$ នោះ

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \tag{3}$$

ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ប្រមាណវិធីចែក៖ $$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

លំហាត់ 1. ចូរគណនា

1. $(3 + 5i) + (-2 + 3i)$
2. $(6 + 4i) - (3 + 6i)$
3. $(5 + 3i)(2 + 7i)$
4. $\dfrac{1}{3 + 4i}$
5. $\dfrac{1 + 4i}{5 - 12i}$
6. $\dfrac{2 - 3i}{4 - 3i}$

ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

លំហាត់ 2. បើ $z = 2 - 3i$ ហើយ $w = 5 + 2i$ ចូរគណនា

1. $\dfrac{z}{w}$
2. $\overline{z + w}$
3. $z + \bar{z}$

ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ទ្រឹស្តីបទ 2.

- កុំផ្លិចឆ្លាស់នៃកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ជាចំនួនកុំផ្លិច z ។ មានន័យថា
$$\bar{\bar{z}} = z \tag{4}$$
- កុំផ្លិចឆ្លាស់នៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចពីរ គឺស្មើនឹងផលបូកនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ៗ
$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \tag{5}$$
- កុំផ្លិចឆ្លាស់នៃផលគុណចំនួនកុំផ្លិចពីរ គឺស្មើនឹងផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ៗ
$$\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w} \tag{6}$$

ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ស្វ័យគុណនៃ i ៖

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 &= -1 & i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i & i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 & i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \end{aligned}$$

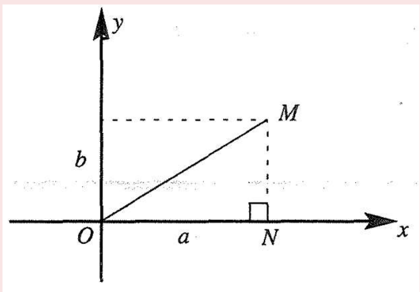
លំហាត់ 3. ចូរគណនា

1. i^{27}
2. i^{101}
3. $(2+i)^3$

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

និយមន័យ 4. (ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច)

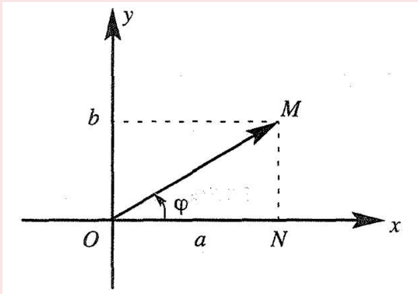
ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ កំណត់ដោយ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។



ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

និយមន័យ 5. (អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច)

ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ស្ថិតក្នុងប្លង់កុំផ្លិច កំណត់ដោយ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃ z។ មុំដែលកំណត់ដោយ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ ហៅថា អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ($\arg z = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$)។



ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដើម្បីដោះស្រាយរកអាគុយម៉ង់នៃ z យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}$។

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

លំហាត់ 4. ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

1. $z = 1 + i\sqrt{3}$
2. $z = -1 + i\sqrt{3}$
3. $z = -i$
4. $z = -1 + i$

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ 3. (ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ)

ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2. បម្លែងចំនួនកុំផ្លិច $z = -4 + 4i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

មាន $a = -4$ និង $b = 4$

- ម៉ូឌុល $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- អាគុយម៉ង់ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = -\dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

  នោះ $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

ដូចនេះ $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ។

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

លំហាត់ 5. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

1. $z = 2\sqrt{3} - 2i$
2. $z = 2\cos\dfrac{7\pi}{4} - 2i\sin\dfrac{\pi}{4}$
3. $z = -2$
4. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

ប្រមាណវិធីគុណ និងចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ 4.

បើ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{7}$$

ទ្រឹស្តីបទ 5.

បើ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{8}$$

ប្រមាណវិធីគុណ និងចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

លំហាត់ 6. ចូរដោះស្រាយលំហាត់ខាងក្រោម៖

1. គេមាន $z_1 = 6\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។
   គណនា z_1z_2 រួចសរសេរជាទម្រង់ $a + bi$ ។
2. សរសេរចំនួន $z = \dfrac{-1+i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 + i$ ។
   គណនា $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ ។

ប្រមាណវិធីគុណ និងចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

កិច្ចការអនុវត្តន៍

- ចូរធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 1-5។
- ចូរធ្វើដំណោះស្រាយលើលំហាត់ 1-6 ។

Thank You

សូមអរគុណ!

3 ផ្នែកដំណោះស្រាយ

1

១. ប្តូរមុំ 30^o; 45^o; 135^o; 270^o; 330^o; -100^o ; 570^o; 630^o ទៅជារ៉ាដ្យង់ៗ

២. ប្តូរមុំ $\frac{\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{3}$; 3π; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{-7\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{7}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{-11\pi}{6}$ ទៅជាដឺក្រេៗ

សម្រាយ.

១. ប្តូរមុំពីដឺក្រេទៅជារ៉ាដ្យង់

- $30^o = \frac{30^o \times \pi}{180^o} = \frac{30^o \times \pi}{6 \times 30^o} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \boxed{30^o = \frac{\pi}{6}}$
- $45^o = \frac{45^o \times \pi}{180^o} = \frac{45^o \times \pi}{4 \times 45^o} = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \boxed{45^o = \frac{\pi}{4}}$
- $135^o = \frac{135^o \times \pi}{180^o} = \frac{3 \times 45^o \times \pi}{4 \times 45^o} = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \boxed{135^o = \frac{3\pi}{4}}$
- $270^o = \frac{270^o \times \pi}{180^o} = \frac{3 \times 90^o \times \pi}{2 \times 90^o} = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \boxed{270^o = \frac{3\pi}{2}}$
- $330^o = \frac{330 \times \pi}{180^0} = \frac{11 \times 30^o \pi}{6 \times 30^o} = \frac{11\pi}{6}$ $\qquad \boxed{330^o = \frac{11\pi}{6}}$
- $-100^o = \frac{-100^o \times \pi}{180^o} = \frac{-5 \times 2 \times 10^o \pi}{9 \times 2 \times 10^o} = -\frac{5\pi}{9}$ $\qquad \boxed{-100^o = -\frac{5\pi}{9}}$
- $570^o = \frac{570^o \times \pi}{180^o} = \frac{57 \times 10^o \times \pi}{18 \times 10^o} = \frac{57\pi}{18}$ $\qquad \boxed{570^o = \frac{57\pi}{18}}$
- $630^o = \frac{630^o \times \pi}{180^o} = \frac{9 \times 7 \times 10^o \times \pi}{9 \times 2 \times 10^o} = \frac{7\pi}{2}$ $\qquad \boxed{630^o = \frac{7\pi}{2}}$

ទំព័រទី 40

២. ប្តូរម៉ុំពីរ៉ាដ្យង់ទៅជាដឺក្រេ

- $\frac{\pi}{5} = \frac{180^0}{5} = 36^o$ $\boxed{\frac{\pi}{5} = 36^o}$
- $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\times 180^o}{3} = 120^o$ $\boxed{\frac{2\pi}{3} = 120^o}$
- $3\pi = 3\times 180^o = 540^o$ $\boxed{3\pi = 540^o}$
- $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\times 180^o}{3} = 240^o$ $\boxed{\frac{4\pi}{3} = 240^o}$
- $\frac{7\pi}{4} = \frac{7\times 180^o}{4} = 315^o$ $\boxed{\frac{7\pi}{4} = 315^o}$
- $\frac{-7\pi}{2} = \frac{-7\times 180^o}{2} = -630^o$ $\boxed{\frac{-7\pi}{2} = -630^o}$
- $\frac{5\pi}{4} = \frac{5\times 180^o}{4} = 225^o$ $\boxed{\frac{5\pi}{4} = 225^o}$
- $\frac{5\pi}{7} = \frac{5\times 180^o}{7} = 128.5^o$ $\boxed{\frac{5\pi}{7} = 128^o30'}$
- $\frac{\pi}{9} = \frac{180^o}{9} = 20^o$ $\boxed{\frac{\pi}{9} = 20^o}$
- $\frac{-11\pi}{6} = -\frac{11\times 180^o}{6} = -330^o$ $\boxed{\frac{-11\pi}{6} = -330^o}$

ទំព័រទី 41

2

គណនាកន្សោម៖

$$A = 2\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{6} - 3\tan\frac{\pi}{3} + 4\cot\frac{\pi}{4}$$

$$B = \frac{5 - 4\tan^2 45^o + \cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o - 2\sin^3 90^o + 4\tan 45^o}$$

$$C = 2\sin\frac{2\pi}{4} - 3\tan^2\frac{\pi}{6} + 2\cos^4\frac{\pi}{2} + 3\cot^2\frac{\pi}{4}$$

សម្រាយ.

គណនាកន្សោម៖

$$A = 2\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{6} - 3\tan\frac{\pi}{3} + 4\cot\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\sqrt{3}\right) + 4(1)$$

$$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4 = 4$$ ដូចនេះ $\boxed{A = 4}$

$$B = \frac{5 - 4\tan^2 45^o + \cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o - 2\sin^3 90^o + 4\tan 45^o} = \frac{5 - 4(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(1)^3 + 4(1)} = \frac{1 + \frac{3}{9}}{\frac{1}{2} + 2}$$

$$= \frac{\frac{9+3}{9}}{\frac{1+4}{2}} = \frac{12}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$ ដូចនេះ $\boxed{B = \frac{8}{15}}$

$$C = 2\sin\frac{2\pi}{4} - 3\tan^2\frac{\pi}{6} + 2\cos^4\frac{\pi}{2} + 3\cot^2\frac{\pi}{4} = 2(1) - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2(0)^4 + 3(1)^2$$

$$= 2 - 1 + 3 = 4$$ ដូចនេះ $\boxed{C = 4}$

3

១. តើមុំ x នៅកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះវិសមីការ $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$?

២. តើមុំ x នៅកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះវិសមីការ $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \end{cases}$?

៣. តើនៅកាដ្រង់ណាដែល $\tan x$ និង $\cot x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា?

សម្រាយ.

១. ចំពោះ $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$ លុះត្រាតែ មុំx ស្ថិតនៅកាដ្រង់ទីIII

២. ចំពោះ $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \end{cases}$ លុះត្រាតែ មុំx ស្ថិតនៅកាដ្រង់ទីI

៣. កាដ្រង់ដែល $\tan x$ និង $\cot x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា គឺ

- កាដ្រង់ទីI និងទីIII $(\tan x > 0,\ \cot > 0)$
- កាដ្រង់ទីII និងទីIV $(\tan x < 0,\ \cot < 0)$

4

១. ចូរគណនាតម្លៃ $\cos\theta\,;\tan\theta;\cot\theta$។ ដោយស្គាល់ $\sin\theta = \frac{8}{17}$ និងមុំ θ នៅកាដ្រង់ទីI។

២. ចូរគណនាតម្លៃ $\cos\alpha;\ \tan\alpha;\ \cot\alpha$។ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = -\frac{3}{12}$ និង $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$។

ទំព័រទី 43

សម្រាយ.

១. គណនាតម្លៃ $\cos\theta$; $\tan\theta$; $\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta = \dfrac{8}{17}$ និងមុំ θ នៅកាដ្រង់ទី I

តាម $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2 = 1-\dfrac{64}{289} = \dfrac{289-64}{289} = \dfrac{225}{289}$

$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\dfrac{225}{289}} = \dfrac{15}{17}$ (កាដ្រង់ទី I $\cos\theta > 0$)

ដូចនេះ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{15}{17}}$

តាមទំនាក់ទំនង $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \dfrac{8}{15}$ ដូចនេះ $\boxed{\tan\theta = \dfrac{8}{15}}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \dfrac{15}{8}$ ដូចនេះ $\boxed{\cot\theta = \dfrac{15}{8}}$

២. គណនាតម្លៃ $\cos\alpha$; $\tan\alpha$; $\cot\alpha$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = -\dfrac{3}{12}$ និង $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\dfrac{3}{12}\right)^2 = 1-\dfrac{9}{144} = \dfrac{135}{144}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{135}{144}} = \dfrac{\sqrt{135}}{12}$ $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{135}}{12}}$ $\left(\cos\alpha > 0 \text{ ព្រោះ } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right)$

តាមទំនាក់ទំនង $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{-3}{12}}{\frac{\sqrt{135}}{12}} = \dfrac{-3\sqrt{135}}{135}$ $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{-3\sqrt{135}}{135}}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{135}}{12}}{\frac{-3}{12}} = -\dfrac{\sqrt{135}}{3}$ $\boxed{\cot\alpha = -\dfrac{\sqrt{135}}{3}}$

5

១. គណនា $\dfrac{5\sin\alpha+7\cos\alpha}{6\cos\alpha-3\sin\alpha}$ ដោយដឹងថា $\tan\alpha=\dfrac{4}{15}$ ។

២. គណនា $\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ និង $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ។

សម្រាយ.

១. គណនា $\dfrac{5\sin\alpha+7\cos\alpha}{6\cos\alpha-3\sin\alpha}$ ដោយដឹងថា $\tan\alpha=\dfrac{4}{15}$

$$\frac{5\sin\alpha+7\cos\alpha}{6\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{5\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+7\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{6\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{5\tan\alpha+7}{6-3\tan\alpha}=\frac{5\left(\dfrac{4}{15}\right)+7}{6-3\left(\dfrac{4}{15}\right)}=\frac{\dfrac{4+21}{3}}{\dfrac{30-4}{5}}=\frac{25\times5}{3\times26}=\frac{125}{78}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{5\sin\alpha+7\cos\alpha}{6\cos\alpha-3\sin\alpha}=\dfrac{125}{78}}$

២. គណនា $\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ និង $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{\dfrac{25-18}{25}}=\frac{25}{7}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}=\dfrac{25}{7}}$

ទំព័រទី 45

6

១. គេដឹងថា $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$ ។ គណនា $\cos\frac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)$ ។

២. ចូរគណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$; $\sin\frac{11\pi}{3}$; $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$; $\tan\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$ ។

សម្រាយ.

១. គណនា $\cos\frac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{65\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{64\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(16\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{65\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{-39\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{-40\pi+\pi}{4}\right)=\sin\left(-10\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

២. គណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$; $\sin\frac{11\pi}{3}$; $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$; $\tan\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$

- $\sin 6\pi=\sin(6\pi+0)=\sin 0=0$ ដូចនេះ $\boxed{\sin 6\pi}$
- $\sin\frac{11\pi}{3}=\sin\left(3\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ដូចនេះ $\boxed{\sin\frac{11\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\frac{5\pi}{6}=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  ដូចនេះ $\boxed{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\tan\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=-\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$ ដូចនេះ $\boxed{\tan\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=-1}$

ទំព័រទី 46

7

គេមាន $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ហើយ $\pi<\theta<2\pi$ ។

ក. $\sin\theta\cos\theta$ ខ. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ គ. $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

សម្រាយ.

ក. $\sin\theta\cos\theta$

យើងមាន $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$\Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{4}-1=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{-\frac{3}{4}}{2}=-\frac{3}{8}$$ ដូចនេះ $\boxed{\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}}$

ខ. $$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{8}{3}}$

គ. $$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)\left(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$$
$$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$$

តែ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយ $\pi<\theta<2\pi\Rightarrow \sin\theta<0$; $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}<0 \Rightarrow \cos\theta>0$

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$ គេបាន $\sin\theta-\cos\theta<0$

$$\Rightarrow \sin^3\theta-\cos^3\theta=-\left(\sqrt{1-2\left(-\frac{3}{8}\right)}\right)\left(1+\left(-\frac{3}{8}\right)\right)=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{5}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^3\theta-\cos^3\theta=-\frac{5\sqrt{7}}{16}}$

ទំព័រទី 47

8

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម៖

$A = \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$

$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$C = \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$

$E = \tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}$

$F = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y)$

សម្រាយ.

$$\begin{aligned} A &= \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \\ &= \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= \cos\theta - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta - \cos\theta = 0 \quad \text{ដូចនេះ } \boxed{A = 0} \end{aligned}$$

$$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ដូចនេះ } \boxed{B = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{aligned} C &= \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin x + \sin x - \cos x + \cos x = 0 \quad \text{ដូចនេះ } \boxed{C = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x = \cos x - \cos x = 0 \quad \text{ដូចនេះ } \boxed{D = 0} \end{aligned}$$

$$E = \tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = -1$$

ដូចនេះ $\boxed{E = -1}$

$F = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(x+y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y) = 0$ ដូចនេះ $\boxed{F = 0}$

9

១. ចូរគណនាកន្សោម $\dfrac{\cos(-288^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o$ ។

២. ចូរគណនាកន្សោម $\dfrac{(\cot 44^o + \tan 226^o)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o$ ។

សម្រាយ.

១. គណនាកន្សោម $\dfrac{\cos(-288^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(-288^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o &= \frac{\cos(-360^o + 72^o)\cot 72^o}{\tan(-180^o + 18^o)\sin(90^o + 18^o)} - \tan 18^o \\
&= \frac{\cos 72^o \cot 72^o}{\tan 18^o \cos 18^o} - \tan 18^o \\
&= \frac{\cos(90^o - 18^o)\cot(90^o - 18^o)}{\tan 18^o \cos 18^o} - \tan 18^o \\
&= \frac{\sin 18^o \tan 18^o}{\tan 18^o \cos 18^o} - \tan 18^o = \tan 18^o - \tan 18^o = 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\cos(-288^o)\cot 72^o}{\tan(-162^o)\sin 108^o} - \tan 18^o = 0}$

២. គណនាកន្សោម $\dfrac{(\cot 44^o + \tan 226^o)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\cot 44^o + \tan 226^o)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o \\
&= \frac{(\cot(90^o - 46^o) + \tan(180^o + 46^o))\cos(360^o + 46^o)}{\cos(360^o - 44^o)} - \cot(72^o)\cot 18^o \\
&= \frac{(\tan 46^o + \tan 46^o)\cos 46^o}{\cos(-44^o)} - \cot(90^o - 18^o)\cot 18^o
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\tan 46^o \cos 46^o}{\cos 44^o} - \tan 18^o \cot 18^o = \frac{2\tan 46^o \cos 46^o}{\cos(90^o - 46^o)} - 1$$

$$= \frac{2\tan 46^o \cos 46^o}{\sin 46^o} - 1 = 2\tan 46^o \cot 46^o - 1 = 2 - 1 = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{(\cot 44^o + \tan 226^o)\cos 406^o}{\cos 316^o} - \cot 72^o \cot 18^o = 1}$

10

ចូររកតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

$A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = 2$ ។

$B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$ ។

សម្រាយ.

រកតម្លៃនៃកន្សោម៖

$A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = 2$

$$= \frac{\frac{8\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{2\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}} = \frac{8 - 2\tan^3\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}}{2\frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^3\alpha}$$

$$= \frac{8 - 2\tan^3\alpha + 1 + \tan^2\alpha}{2(1+\tan^2\alpha) - \tan^3\alpha} = \frac{8 - 2(2)^3 + 1 + (2)^2}{2(1+2^2) - 2^3} = \frac{-3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = -\frac{3}{2}}$

$B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = \frac{-2+1}{1-(-2)} = \frac{-1}{3}$$ ដូចនេះ $\boxed{\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = -\frac{1}{3}}$

ទំព័រទី 50

11

ចូររកតម្លៃនៃកន្សោម $A=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\cot\alpha=3$ ។

សម្រាយ.

គណនា $A=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\cot\alpha=3$

$$A=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{1-\cot^2\alpha}{1-2\cot^2\alpha}=\frac{1-3^2}{1-2(3)^2}=\frac{8}{17}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\dfrac{8}{17}}$

12

ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2}$

ខ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

សម្រាយ.

សម្រួលកន្សោម៖

ក. $\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2}$

$$=\sqrt{\tan^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha+\cot^2\alpha}=\sqrt{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2}=|\tan\alpha+\cot\alpha|$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2}=|\tan\alpha+\cot\alpha|}$

ខ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cot\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\tan\alpha}$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)} = |\sin\alpha + \cos\alpha|}$

13

ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$ ខ. $\dfrac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha}$

សម្រាយ.

សម្រួលកន្សោម៖

ក. $$\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$
$$= \frac{-\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha\right)}{-\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha\right)} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\alpha}$$
$$= \frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} = \tan^6\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \tan^6\alpha}$

ខ. $$\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(1+\cot^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)} = \cot^2\alpha\cdot\frac{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$$
$$= \cot^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha\cdot\cot^2\alpha = \cot^4\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha} = \cot^4\alpha}$

14

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

ខ. $\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x$

សម្រាយ.

ក. $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

ដោយ $\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$\Leftrightarrow\ (1+\sin x)(\sin x+\cos x-1)=\cos x(\sin x-\cos x+1)$

$\Leftrightarrow\ \sin x+\cos x-1+\sin^2 x+\sin x\cos x-\sin x=\sin x\cos x-\cos^2 x+\cos x$

$\Leftrightarrow\ \cos x-1+\sin^2 x+\sin x\cos x-\sin x\cos x+\cos^2 x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow\ -1+1=0 \quad \Leftrightarrow\ 0=0$ **ពិត** ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}}$

ខ. $\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x$

$$\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=\dfrac{\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}-\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}}=\dfrac{\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sin x\cos x}}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}}$$

$$=\dfrac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x\right)}{\cos x-\sin x}$$

$=1+\sin x\cos x$ **ពិត**

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\cos x\cot x-\sin x\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}}=1+\sin x\cos x}$

15

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម៖

ក. $(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$

ខ. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

សម្រាយ.

ក. $(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$

$$\begin{aligned}(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2&=\tan^2\theta-2\tan\theta\sin\theta+\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1+\tan^2\theta-\frac{2\sin\theta\cdot\sin\theta}{\cos\theta}+1-2\cos\theta\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}+1-2\cos\theta\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)+1\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-2\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)+1\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-2\frac{1}{\cos\theta}+1=\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2\quad\text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{(\tan\theta-\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)^2}$

ខ. $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}&=\frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{-\sin\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta-1)}{\sin\theta(2\sin\theta-1)}\\&=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}\quad\text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}}$

ទំព័រទី 54

16

ចូរគណនាតម្លៃ

ក. $\cos 15^{\circ}$

ខ. $\sin 15^{\circ}$

គ. $\cos 75^{\circ}$

ឃ. $\sin 75^{\circ}$

ង. $\sin \dfrac{5\pi}{12}$

ច. $\cos \dfrac{5\pi}{12}$

ឆ. $\sin \dfrac{\pi}{12}$

ជ. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

សម្រាយ.

គណនាតម្លៃ   របៀបទី១   (ប្រើរូបមន្តផលបូក ផលដកមុំ)

ក. $\cos 15^{\circ} = \cos(45^{\circ} - 30^{\circ}) = \cos 45^{\circ}\cos 30^{\circ} + \sin 45^{\circ}\sin 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos 15^{\circ} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

ខ. $\sin 15^{\circ} = \sin(45^{\circ} - 30^{\circ}) = \sin 45^{\circ}\cos 30^{\circ} - \sin 30^{\circ}\cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin 15^{\circ} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

គ. $\cos 75^{\circ} = \cos(30^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 30^{\circ}\cos 45^{\circ} - \sin 30^{\circ}\sin 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos 75^{\circ} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

ឃ. $\sin 75^{\circ} = \sin(30^{\circ} + 45^{\circ}) = \sin 30^{\circ}\cos 45^{\circ} + \sin 45^{\circ}\cos 30^{\circ} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin 75^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

ង. $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{2\pi+3\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

ច. $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

ឆ. $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

ជ. $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

របៀបទី២ (ប្រើរូបមន្ត មុំឌុប)

ក. $\cos 15^{o}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+1)$

គេបាន $\cos^2 15^{o}=\frac{1}{2}(\cos 30^{o}+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow\quad \cos 15^{o}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ដូចនេះ $\boxed{\cos 15^{o}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

ខ. $\sin 15^{o}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

គេបាន $\sin^2 15^{o}=\frac{1}{2}(1-\cos 30^{o})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow\quad \sin 15^{o}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 15^{o}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

គ. $\cos 75^{\circ}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

គេបាន $\cos^2 75^{\circ} = \frac{1}{2}(\cos 150^{\circ} + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \cos 75^{\circ} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 75^{\circ} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

ឃ. $\sin 75^{\circ}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

គេបាន $\sin^2 75^{\circ} = \frac{1}{2}(1 - \cos 150^{\circ}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \sin 75^{\circ} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 75^{\circ} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

ង. $\sin \frac{5\pi}{12}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

គេបាន $\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\times 5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

ច. $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

គេបាន $\cos^2\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\times 5\pi}{12} + 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

ឆ. $\sin\dfrac{\pi}{12}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

គេបាន $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2\times\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

ជ. $\cos\dfrac{\pi}{12}$

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

គេបាន $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\times\pi}{12} + 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

ទំព័រទី 58

17

ក. បង្ហាញថា $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$ ។

សម្រាយ.

ក. បង្ហាញថា $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

ដោយ
$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\sin a\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos a\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos a\right)\\ &= \sin a + \cos a \quad \text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\cos\beta}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta}{\cos\theta\cos\alpha}\\ &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \quad \text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0}$

18

១. បង្ហាញថា $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ។

២. ចូរគណនាតម្លៃ

ក. $\tan 105^o$ ខ. $\tan\dfrac{\pi}{12}$ គ. $\sin 105^o$ ឃ. $\cos 105^o$

សម្រាយ.

១. បង្ហាញថា $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ដោយ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

២. ចូរគណនាតម្លៃ

ក. $\tan 105^o$

តាមរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

គេបាន $\tan 105^o=\tan(60^o+45^o)=\dfrac{\tan 60^o+\tan 45^o}{1-\tan 60^o\tan 45^o}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$

$$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}=-2-\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan 105^o=-2-\sqrt{3}}$

ខ. $\tan\frac{\pi}{12}$

តាមរូបមន្ត $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

គេបាន $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$

គ. $\sin 105^o$

តាមរូបមន្ត $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

គេបាន $\sin(105^o)=\sin(60^o+45^o)=\sin 60^o\cos 45^o+\sin 45^o\cos 60^o$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 105^o=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

ឃ. $\cos 105^o$

តាមរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

គេបាន $\cos 105^o=\cos(60^o+45^o)=\cos 60^o\cos 45^o-\sin 60^o\sin 45^o$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 105^o=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

19

១. គេមាន $0<\alpha<\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}<\beta<0$ និង $\tan\alpha=2;\ \tan\beta=-3$ ។

ក. គណនា $\tan(\alpha-\beta)$ ខ. គណនាមុំ $(\alpha-\beta)$

២. ចូរសម្រួលកន្សោម $\dfrac{\tan 3\theta-\tan\theta}{1+\tan\theta\tan 3\theta}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)$ ។

សម្រាយ.

១. ក. គណនា $\tan(\alpha-\beta)$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-(-3)}{1+2(-3)}=\frac{5}{-5}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=-1}$

ខ. គណនាមុំ $(\alpha-\beta)$

ដោយ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (1) ; $-\frac{\pi}{2}<\beta<0 \Leftrightarrow 0<-\beta<\frac{\pi}{2}$ (2)

$$\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ 0<-\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\overline{0<\alpha-\beta<\pi}$ មានន័យថា $(\alpha-\beta)$នៅកាដ្រង់ទី$I; II$

គេបាន $\tan(\alpha-\beta)=-1$ លុះត្រាតែ $(\alpha-\beta)=\dfrac{3\pi}{4}$ ដូចនេះ $\boxed{(\alpha-\beta)=\dfrac{3\pi}{4}}$

២. ចូរសម្រួលកន្សោម $\dfrac{\tan 3\theta-\tan\theta}{1+\tan\theta\tan 3\theta}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)$

$$\frac{\tan 3\theta-\tan\theta}{1+\tan\theta\tan 3\theta}+\cot\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=\tan(3\theta-\theta)-\tan 2\theta=\tan 2\theta-\tan 2\theta=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\tan 3\theta-\tan\theta}{1+\tan\theta\tan 3\theta}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)=0}$

20

១. គណនា $\tan(a+b+c)$ ដោយប្រើរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$ ។

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ ។

សម្រាយ.

១. គណនា $\tan(a+b+c)$ ដោយប្រើរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$

តាមរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ បើ $\alpha=a+b;\ \beta=c$

គេបាន $$\tan(a+b+c)=\frac{\tan(a+b)+\tan c}{1-\tan(a+b)\tan c}=\frac{\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}+\tan c}{1-\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\cdot\tan c}$$
$$=\frac{\dfrac{\tan a+\tan b+\tan c(1-\tan a\tan b)}{1-\tan a\tan b}}{\dfrac{1-\tan a\tan b-(\tan a+\tan b)\tan c}{1-\tan a\tan b}}$$
$$=\frac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-\tan a\tan b-\tan a\tan c-\tan b\tan c}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(a+b+c)=\dfrac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-\tan a\tan b-\tan a\tan c-\tan b\tan c}}$

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

ដោយ $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$

ទំព័រទី 63

21

១. រក $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$ និង $\tan 2\alpha$ បើ $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ និង $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ។

២. គណនា $\sin 3\alpha$ និង $\cos 3\alpha$ ។

៣. បង្ហាញថា $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1$ ។

សម្រាយ.

១. រក $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$ និង $\tan 2\alpha$ បើ $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ និង $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}\sin\alpha$$

តាមរូបមន្ត $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(-\dfrac{4}{5}\right) = 1-\dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

$\Longrightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{3}{5}$ តែ $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\alpha > 0$ គេបាន $\sin\alpha = +\dfrac{3}{5}$

$\sin 2\alpha = -\dfrac{8}{5}\sin\alpha = -\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = -\dfrac{24}{25}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin 2\alpha = -\dfrac{24}{25}}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\frac{-24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\dfrac{24}{7}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\tan 2\alpha = -\dfrac{24}{7}}$

២. គណនា $\sin 3\alpha$ និង $\cos 3\alpha$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha = \left(-\frac{24}{25}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{7}{25}\right)$$

$= \dfrac{96}{125} + \dfrac{21}{125} = \dfrac{117}{125}$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin 3\alpha = \dfrac{117}{125}}$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \frac{7}{25}\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{24}{25}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{-28}{125}+\frac{72}{125}=\frac{44}{125}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos 3\alpha = \frac{44}{125}}$

៣. បង្ហាញថា $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1$

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \frac{1-2\sin^2\alpha}{\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)^2}$$

$$= \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1}$

22

១. គណនា $\sin 22^\circ 30'$; $\sin\dfrac{\pi}{12}$ និង $\tan\dfrac{3\pi}{8}$

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$

សម្រាយ.

១. គណនា $\sin 22^o30'$; $\sin\dfrac{\pi}{12}$ និង $\tan\dfrac{3\pi}{8}$

$(30' = 30'\cdot\dfrac{1^o}{60'} = \dfrac{1^o}{2})$ គេបាន

$$\sin 22^o30' = \sin(22^o+30') = \sin(22^o+\frac{1^o}{2}) = \sin\left(\frac{45^o}{2}\right)$$

ដោយ $\cos\alpha = 1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ គេបាន $\cos 45^o = 1-2\sin^2\dfrac{45^o}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{45^o}{2} = \frac{1-\cos 45^o}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{45^o}{2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 22^o30' = \sin\dfrac{45^o}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

- $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \sin^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \boxed{\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$
- $\tan\dfrac{3\pi}{8} = \tan\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}+1}$

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}}$

23

១. គេមាន $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ហើយ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ។ គណនា $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$ ។

២. គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = \frac{24}{7}$ និង $180^o < \alpha < 270^o$ ។

៣. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\cos 75^o \cos 45^o$

ខ. $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$

សម្រាយ.

១. គណនា $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$ $\left(\cos\alpha = -\frac{3}{5}\ ;\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

តាមរូបមន្ត $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

តែ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ នាំឲ្យ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

តាមរូបមន្ត $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$\Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

តែ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$ នាំឲ្យ $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

២. គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ $\left(\tan\alpha = \frac{24}{7};\quad 180^o < \alpha < 270^o\right)$

តាមរូបមន្ត $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$ ដែល $t = \tan\frac{\alpha}{2}$

គេបាន $1-t^2 = \dfrac{2t}{\tan\alpha} \Rightarrow 1-t^2 = \dfrac{2t}{\frac{24}{7}} \Leftrightarrow -t^2 - \dfrac{7}{12}t + 1 = 0 \Leftrightarrow 12t^2 + 7t - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(12)(-12) = 49 + 576 = 625$

$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-\sqrt{625}}{2(12)} = \dfrac{-7-25}{24} = \dfrac{-32}{24} = \dfrac{-4}{3}$

$t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+25}{24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

គេបាន $\tan\frac{\alpha}{2} = -\dfrac{4}{3};\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{4}$

តែដោយ $180^o < \alpha < 270^o \Leftrightarrow \frac{180^o}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{270^o}{2} \Leftrightarrow 90^o < \frac{\alpha}{2} < 135^o$

គេបាន $\frac{\alpha}{2}$ នៅកាដ្រង់ទីII គឺ $\tan\frac{\alpha}{2} < 0$ **ដូចនេះ** $\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = -\dfrac{4}{3}}$

៣. គណនាកន្សោមៈ

- រូបមន្ត $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
- រូបមន្ត $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

ក. $\cos 75^o\cos 45^o = \frac{1}{2}\left[\cos(75^o+45^o) + \cos(75^o-45^o)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 120^o + \cos 30^o\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 75^o\cos 45^o = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}}$

ខ. $\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$

24

ក. ចូរសរសេរកន្សោម $1+\cos a+\cos 2a$ ជាផលគុណកត្តា។

ខ. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $2\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)=\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ។

សម្រាយ.

ក. សរសេរកន្សោម $1+\cos a+\cos 2a$ ជាផលគុណកត្តា

$$1+\cos a+\cos 2a = 1+\cos a+2\cos^2 a-1=\cos a\,(1+2\cos a)$$

ដូចនេះ $\boxed{1+\cos a+\cos 2a=\cos a\,(1+2\cos a)}$

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $2\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)=\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)&=2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)=2\left(\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)=2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=2\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{2\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)=\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

25

១. គេមាន A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ។
ចូរបង្ហាញថា $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ។

២. A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ។
ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ ។

ទំព័រទី 69

សម្រាយ.

១. បង្ហាញថា $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

- (រូបមន្ត $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$)
- (រូបមន្ត $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$)
- (រូបមន្ត $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$)
- A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ គេបាន $A+B+C=180^o \quad\Rightarrow\ C=180^o-(A+B)$

$$\Rightarrow\ A+B=180^o-C$$

$$\begin{aligned}
\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(180^o-(A+B))\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{2(A+B)}{2}\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{180^o-C}{2}\left(2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)\\
&= 4\sin\left(90^o-\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{-B}{2}\right)\right)\\
&= 4\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \text{ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

២. បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\begin{aligned}
\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos(180^o-(A+B))\\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)\\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{2(A+B)}{2}\\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)\\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1\\
&= 2\cos\frac{180^o-C}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\sin\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)+1\\
&= -4\cos\left(90^o-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)+1\\
&= 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1 \quad \text{ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

26

គេមាន $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{5}{4}$ និង $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{5}{4}$ ហើយ $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right);\left(0\le\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$។
គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha+\beta)$ ។

សម្រាយ.

គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ យើងមាន $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{5}{4}$ និង $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{5}{4}$

គេបាន $(\sin\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{25}{16}$ (1)

$(\cos\alpha+\sin\beta)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{25}{16}$ (2)

ទំព័រទី 71

យក $(1)+(2)$ គេបាន $1+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+1=\frac{50}{16}$

$$\Longrightarrow 2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{25}{8}-2$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{9}{16}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{9}{16}}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

ដោយ $\cos^2(\alpha+\beta)=1-\sin^2(\alpha+\beta)=1-\left(\frac{9}{16}\right)^2=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{\frac{175}{256}}=\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

ដោយ $\sin\alpha+\cos\beta=\cos\alpha+\sin\beta=\frac{5}{4}$ គេបាន $\alpha=\beta$

- បើ $0\le\alpha\le\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow\ 0\le\beta\le\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow 0\le\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow\ \cos(\alpha+\beta)>0$
- បើ $\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow\ \frac{\pi}{4}\le\beta\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\pi \quad \Rightarrow\ \cos(\alpha+\beta)<0$

គេបាន $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$

នាំឲ្យ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{9}{16}}{\pm\frac{5\sqrt{7}}{16}}=\pm\frac{9}{5\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}$

ដូច្នេះ $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\pm\frac{9\sqrt{7}}{35}}$

27

១. គេមាន $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ និង $\sin\beta = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$ ។
ចូរគណនា ៖

ក. $\sin(\alpha+\beta)$

ខ. $\cos(\alpha-\beta)$

គ. $\tan(\alpha-\beta)$

ឃ. $\cot(\alpha-\beta)$ ។

២. គេមាន $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ ។ គណនា $\cos 2\theta$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\sin 3\theta$ ។

សម្រាយ.

១. ក. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{1}{3}\cos\alpha$

រក $\cos\alpha$; $\cos\beta$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ដោយ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \cos\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{ដោយ } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\,;\ \cos\beta < 0$$

$$\Rightarrow \cos\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

គេបាន $\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}}$

ទំព័រទី 73

ខ. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}}$

គ. $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\frac{1-2\sqrt{6}}{6}}=\frac{\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}}{\frac{1-2\sqrt{6}}{6}}$

$$=\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{6}}\times\frac{1+2\sqrt{6}}{1+2\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{18}-2\sqrt{2}-4\sqrt{12}}{1-4(6)}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{-23}=\frac{9\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{23}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{9\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{23}}$

ឃ. $\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{1-2\sqrt{6}}{6}}{\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}}=\frac{1-2\sqrt{6}}{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\times\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

$$=\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{18}-4\sqrt{12}}{3-4(2)}=\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{-5}$$

$$=\frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cot(\alpha-\beta)=\frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}}$

២. គណនា $\cos 2\theta$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{-1}{9}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\cos 2\theta = -\frac{1}{9}}$

គណនា $\sin\frac{\theta}{2}$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$ តែ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}}$

គណនា $\sin 3\theta$

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta = -\frac{1}{9}\cdot\sin\theta - \frac{2}{3}\sin 2\theta$$

រក $\sin\theta$; $\sin 2\theta$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

តែ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$; $\sin\theta > 0$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{80}{81} \quad \Rightarrow \sin 2\theta = \pm\sqrt{\frac{80}{81}} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

តែ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad \Leftrightarrow \pi < 2\theta < 2\pi$; $\sin 2\theta < 0$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

គេបាន $\sin 3\theta = -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4\sqrt{5}}{9}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{27} + \frac{8\sqrt{5}}{27} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 3\theta = \frac{7\sqrt{5}}{27}}$

28

គេមាន $t=\tan\frac{\theta}{2}$ $(t\neq\pm1)$; $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ និង $\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ ។

តាមសមភាព $2\cos 2\theta-\cos\theta+2=0$ ។ ចូរគណនា $\tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

សម្រាយ.

គណនា $\tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

យើងមាន $2\cos\theta-\cos\theta+2=0\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2\theta-1\right)-\cos\theta+2=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\theta-\cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\,(4\cos\theta-1)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\theta=0\\ 4\cos\theta-1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\theta=0\\ \cos\theta=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

ដោយ $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; ហើយ $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ $(t\neq\pm1)$ គេបាន

- ចំពោះ $\cos\theta=0 \quad\Rightarrow \dfrac{1-t^2}{1+t^2}=0 \quad\Leftrightarrow 1-t^2=0 \quad\Rightarrow t=\pm1$ មិនយក
- ចំពោះ $\cos\theta=\dfrac{1}{4} \quad\Rightarrow \dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1}{4} \quad\Leftrightarrow 4-4t^2=1+t^2 \quad\Leftrightarrow 5t^2=3$

$$\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

គេបាន $\tan\dfrac{\theta}{2}=t=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$

ទំព័រទី 76

29

គេមាន $\theta = 36^o$ និង $2\theta = 180^o - 3\theta$។ តាមលក្ខណៈនេះ គណនា $\cos 36^o$។

សម្រាយ.

គេមាន $\theta = 36^o$ និង $2\theta = 180^o - 3\theta$ តាមលក្ខណៈនេះ គណនា $\cos 36^o$

- $\theta = 36 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \cos 36^o$
- $2\theta = 180^o - 3\theta \quad \Rightarrow \quad \sin 2\theta = \sin(180^o - 3\theta) = \sin 3\theta$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos\theta = 3 - 4\sin^2\theta \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos\theta = 3 - 4\left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0
\end{aligned}$$

តាង $t = \cos\theta \quad ; \quad t > 0$ ព្រោះ $\cos\theta = \cos 36^o > 0$

$4t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(4)(-1) = 20 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) - 2\sqrt{5}}{2(4)} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ មិនយក

$t_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) + 2\sqrt{5}}{2(4)} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} > 0$ យក

ដូចនេះ $\boxed{\cos 36^o = \cos\theta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}}$

30

ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$

ខ. $\tan(a+b) - \tan a - \tan b = \tan a \tan b \tan(a+b)$

គ. $\dfrac{\sin^4 \alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$

សម្រាយ.

បង្ហាញសមភាព

ក. $\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cos(a \pm b)}{\sin(a \pm b)} = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a} = \frac{\frac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} \mp \frac{\sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\sin a \cos b}{\sin a \sin b} \pm \frac{\sin b \cos a}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}}$

ខ. $\tan(a+b) - \tan a - \tan b = \tan a \tan b \tan(a+b)$

$$\tan(a+b) - \tan a - \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} - \tan a - \tan b$$

$$= \frac{\tan a + \tan b - \tan a(1 - \tan a \tan b) - \tan b(1 - \tan a \tan b)}{1 - \tan a \tan b}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b - \tan a + \tan^2 a \tan b - \tan b + \tan a \tan^2 b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$= \frac{\tan a \tan b(\tan a + \tan b)}{1 - \tan a \tan b}$$

$$= \tan a \tan b \tan(a+b) \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(a+b) - \tan a - \tan b = \tan a \tan b \tan(a+b)}$

គ. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha$

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}&=\frac{\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\sin\alpha\cos\alpha}{\tan 2\alpha-1}\\&=\frac{-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot 1+\sin 2\alpha}{\tan 2\alpha-1}\\&=\frac{-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}\\&=\cos 2\alpha \quad \text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha}$

31

ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x$

ខ. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

គ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$

ឃ. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$

សម្រាយ.

ក. $\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x$

$$\begin{aligned}\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x&=\sin 4x+6\sin 2x-4(\sin 3x+\sin x)\\&=2\sin 2x\cos 2x+6\sin 2x-4\cdot 2\cdot\sin 2x\cos x\\&=2\sin 2x(\cos 2x+3-4\cos x)\end{aligned}$$

$$= 2\sin 2x\left(2\cos^2 x - 1 + 3 - 4\cos x\right)$$
$$= 2\sin 2x\left(2\cos^2 x + 2 - 4\cos x\right)$$
$$= 4\sin 2x\left(\cos^2 x - 2\cos x + 1\right)$$
$$= 4\sin 2x\left(\cos x - 1\right)^2$$
$$= 4\sin 2x\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)^2$$
$$= 16\sin 2x\sin^2\frac{x}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin 4x - 4\sin 3x + 6\sin 2x - 4\sin x = 16\sin 2x\sin^2\frac{x}{2}}$

ខ. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$

តាមរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$

តាមរូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$

យើងបាន $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$

$$= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos 2\alpha\cos 2\beta$$
$$= 2\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\beta}{2}\right) + 2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$$
$$= \frac{2 + 2\cos 2\alpha\cos 2\beta}{2} - \cos 2\alpha\cos 2\beta$$
$$= 1 + \cos 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\cos 2\beta$$
$$= 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta = 1}$

គ. $$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin5\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos5\alpha+\cos3\alpha}$$
$$=\frac{2\sin3\alpha\cos2\alpha+\sin3\alpha}{2\cos3\alpha\cos2\alpha+\cos3\alpha}$$
$$=\frac{\sin3\alpha\,(2\cos2\alpha+1)}{\cos3\alpha\,(2\cos2\alpha+1)}$$
$$=\tan3\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\tan3\alpha}$

ឃ. $$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin7\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos7\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}$$
$$=\frac{2\sin4\alpha\cos3\alpha+2\sin4\alpha\cos\alpha}{2\cos4\alpha\cos3\alpha+2\cos4\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin4\alpha\,(2\cos3\alpha+2\cos\alpha)}{\cos4\alpha\,(2\cos3\alpha+2\cos\alpha)}$$
$$=\tan4\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}=\tan4\alpha}$

32

ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\sin3a=4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

ខ. $\cos3a=4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

គ. $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin^2\alpha-3$

ឃ. $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

ទំព័រទី 81

ង. $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$

បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

ក. $\sin 3a = 4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

យើងមាន $4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

$$=4\sin a\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos a+\sin a\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos a-\sin a\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\sin a\left(\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2 a-\sin^2 a\cos^2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\sin a\left(\frac{3}{4}\cos^2 a-\frac{1}{4}\sin^2 a\right)$$

$$=3\sin a\cos^2 a-\sin^3 a$$

$$=3\sin a\left(1-\sin^2 a\right)-\sin^3 a$$

$$=3\sin a-4\sin^3 a \quad (1)$$

ដោយ $\sin 3a=\sin(a+2a)=\sin a\cos 2a+\sin 2a\cos a$

$$=\sin a\left(1-2\sin^2 a\right)+2\sin a\cos a\cos a$$

$$=\sin a-2\sin^3 a+2\sin a\left(1-\sin^2 a\right)$$

$$=\sin a-2\sin^3 a+2\sin a-2\sin^3 a$$

$$=3\sin a-4\sin^3 a \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) ដូចនេះ $\boxed{\sin 3a=4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)}$

ខ. $\cos 3a=4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

យើងមាន $4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$

$$=4\cos a\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos a-\sin\frac{\pi}{3}\sin a\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos a+\sin\frac{\pi}{3}\sin a\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4\cos a\left(\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 a - \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 a\right)\\
&= 4\cos a\left(\frac{1}{4}\cos^2 a - \frac{3}{4}\sin^2 a\right)\\
&= \cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a\\
&= \cos^3 a - 3\cos a\left(1-\cos^2 a\right)\\
&= \cos^3 a - 3\cos a + 3\cos^3 a\\
&= 4\cos^3 a - 3\cos a \quad (1)
\end{aligned}$$

ដោយ $\cos 3a = \cos(a+2a) = \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a$

$$\begin{aligned}
&= \cos a\left(2\cos^2 a - 1\right) - 2\sin^2 a\cos a\\
&= 2\cos^3 a - \cos a - 2\left(1-\cos^2 a\right)\cos a\\
&= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a\\
&= 4\cos^3 a - 3\cos a \quad (2)
\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) ដូចនេះ $\boxed{\cos 3a = 4\cos a\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)}$

គ. $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin^2\alpha - 3$

យើងមាន $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
&= 4\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha\right)\\
&= 4\left(\sin^2\alpha\cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha\right)\\
&= 4\left(\frac{1}{4}\sin^2\alpha - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)\\
&= \sin^2\alpha - 3\left(1-\sin^2\alpha\right)\\
&= 4\sin^2\alpha - 3
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin^2\alpha - 3}$

ឃ. $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

- $$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)&=\sqrt{2}\left(\sin a\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos a\right)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a\right)\\&=\sin a-\cos a\quad(1)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}-\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)&=-\sqrt{2}\left(\cos a\cos\frac{\pi}{4}-\sin a\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)\\&=\sin a-\cos a\quad(2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) ដូចនេះ $\boxed{\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}$

ង. $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$

យើងមាន

- $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
- $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

យើងបាន
$$\begin{aligned}&\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{\cos^3\alpha-4\cos^3\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{3\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha}+\frac{3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin\alpha}\\&=3-3\cos^2\alpha+3-3\sin^2\alpha\\&=6-3\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=6-3=3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3}$

33

ចូរបង្ហាញថាត្រីកោណដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោមៈ

ក. $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

ខ. $\dfrac{\sin C}{\cos B} = \sin A + \cos A \cot C$ ជាត្រីកោណកែង ។

សម្រាយ.

ក. បង្ហាញថា ΔABC ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ ជាត្រីកោណកែង

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

ដោយ $A + B + C = 180^o \quad \Rightarrow B + C = 180^o - A \quad \Rightarrow \dfrac{B+C}{2} = 90^o - \dfrac{A}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sin A = \frac{2\sin\left(90^o - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\left(90^o - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \cot\frac{A}{2}$$

បើយក $t = \tan\dfrac{A}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

$$\sin A = \cot\frac{A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{t}$$

$$2t(t) = 1(1+t^2)$$

$$2t^2 = 1 + t^2$$

$t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1; \quad t = -1$ មិនយក; $t = 1$ យក

$$t = \tan\frac{A}{2} \quad ; \quad t = 1 \quad \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\tan\frac{A}{2} = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$$

ដោយ មុំ $A = \dfrac{\pi}{2} = 90^o$ ដូចនេះ $\boxed{\Delta ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A}$

ខ. បង្ហាញថា ΔABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\dfrac{\sin C}{\cos B} = \sin A + \cos A \cot C$ ជាត្រីកោណកែង

$$\frac{\sin C}{\cos B} = \sin A + \cos A \cot C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin C}{\cos B} - \sin A = \cos A \cdot \cot C$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស និងកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC មាន៖

$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad ; \quad \sin C = \frac{c}{2R} \quad ; \quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\frac{\sin C}{\cos B} - \sin A = \cos A \cot C \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} - \frac{a}{2R} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2ac^2}{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)} - \frac{a}{2R} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2ac^2 - a\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a\left(2c^2-a^2-c^2+b^2\right)}{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \sin A \cdot \frac{2bc\cos A}{2ac\cos B} = \cos A \cot C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\cos B} = \cos A \cot C \quad (1)
\end{aligned}$$

ដោយ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \quad & \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\cos B} = \cos A \cot C \\
\Leftrightarrow \quad & \cos A \cot B = \cos A \cot C \\
\Leftrightarrow \quad & \cos A\left(\cot B - \cot C\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos A = 0 & (*) \\ \cot B - \cot C = 0 & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow \quad \cos A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \cos\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$$

ដោយ មុំ $A = \frac{\pi}{2} = 90^o$ ដូចនេះ $\boxed{\Delta ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A}$

34

គេមាន ΔABC និង $A,\ B,\ C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ។

ក. បើគេដឹងថា $\sin A + \sin B + \sin C = 1$ គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$ ។

សម្រាយ.

ក. គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ដោយ $\sin A + \sin B + \sin C = 1 \Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 1 \quad (1)$

ដោយ $A + B + C = 180^o \quad \Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90^o - \frac{C}{2}$

$$C = 180^o - (A+B)$$

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \quad & 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(180^o - (A+B)) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sin\left(90^o - \frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}}$

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

$$\begin{aligned}
\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C &= \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\\
&= \frac{2+\cos 2A+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\\
&= 1+\frac{2\cos\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}}{2}+\cos^2 C\\
&= 1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&= 1+\cos(180^o-C)\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&= 1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&= 1-\cos C\,[\cos(A-B)-\cos C]\\
&= 1-\cos C\,[\cos(A-B)-\cos(180^o-(A+B))]\\
&= 1-\cos C\,[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\\
&= 1-\cos C\,(\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A\cos B-\sin A\sin B)\\
&= 1-2\cos C\cos A\cos B
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C}$

35

ចូរគណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា៖

ក. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$

ខ. $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$

គ. $\sin 6A+\sin 6B+\sin 6C=0$ ។

ទំព័រទី 88

សម្រាយ.

គណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា៖

ក. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C &= 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin 3C \\
&= 2\sin\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B) + \sin 3(180^o - (A+B)) \\
&= 2\sin\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B) + \sin 3(A+B) \\
&= 2\sin\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B) + 2\sin\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A+B) \\
&= 2\sin\frac{3}{2}(A+B)\left[\cos\frac{3}{2}(A-B) + \cos\frac{3}{2}(A+B)\right] \\
&= 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} \\
&= 4\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} \\
&= -4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} \\
&= -4\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}
\end{aligned}$$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 \Leftrightarrow -4\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3C}{2} = 0 \\ \cos\frac{3A}{2} = 0 \\ \cos\frac{3B}{2} = 0 \end{array}\right.$$

- ករណី $\cos\frac{3C}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3C}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{3}$

$$\Longrightarrow \quad A + B = 180^o - C = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3A + \sin 3B + \sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{lll} \sin\frac{3A+3B}{2} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{3(A+B)}{2} = \pi \quad (1) \\ \cos\frac{3A-3B}{2} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{3(A-B)}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1): A+B = \frac{2\pi}{3} \quad \text{តែ} \quad (*):\ A+B = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B = \frac{2\pi}{3} \\ A+B = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A, B \in \mathbb{R} \text{ ដែល } 0 < A, B < \frac{2\pi}{3}$$

$$(2): A-B = \pm\frac{\pi}{3} \quad \text{តែ} \quad (*):\ A+B = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A-B = \pm\frac{\pi}{3} \\ A+B = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2A = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2} \text{ ឬ } A = \frac{\pi}{6}$$

☞ $A = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + B = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi}{6}$

☞ $A = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} + B = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ

☞ $C = \frac{\pi}{3};\ A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{6}$

☞ $C = \frac{\pi}{3};\ A = \frac{\pi}{6};\ B = \frac{\pi}{2}$

☞ $C = \frac{\pi}{3};\ A, B \in \mathbb{R}$ ដែល $0 < A, B < \frac{2\pi}{3}$

- ករណី $\cos\frac{3A}{2} = 0$ និង $\cos\frac{3B}{2} = 0$ (ដោះស្រាយដូចគ្នា)

ខ. $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$

គ. $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$

សម្រាប់សំណួរ ខ. និង គ. ធ្វើសម្រាយតាមលំនាំសំណួរ ក. ៗ

36

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cos x = \dfrac{1}{2}$

ខ. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff \boxed{x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ;\ k \in \mathbb{Z}}$

ខ. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \iff 3x - \dfrac{\pi}{6} = \pm\pi + 2k\pi$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{6} \pm \pi + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{18} \pm \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \iff \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right. ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

37

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 3x$

ខ. $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$

គ. $\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

ឃ. $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \cdot \sin 2x$

ទំព័រទី 91

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{8}-k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ 2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{6}+x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\\ x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ឃ. $1+3\cos x+\cos 2x=\cos 3x+2\sin x\cdot\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos x+2\cos^2 x=\cos 3x+\cos x-\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos x\,(1+\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 1+\cos x=0\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pm\pi+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

38

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ខ. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

គ. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

ឃ. $\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

សម្រាយ. ក. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 3x+\frac{\pi}{3}=-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ឃ. $\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{3}-x+2k\pi \\ 2x=\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

39

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

ខ. $2\sin x\cos x-3\sin 2x=0$

គ. $2\sin x\cos x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \quad ;\ k\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\pi+4k\pi\\ x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi\end{array}\right. \quad ;\ k\mathbb{Z}}$$

ខ. $2\sin x\cos x-3\sin 2x=0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x-3\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pi+2k\pi\\ 2x=\pi-\pi+2k\pi\end{array}\right. \quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \quad ;\quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $2\sin x\cos x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}-2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)-\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll}2\cos x-\sqrt{3}=0 & (1)\\ \sin x-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

ទំព័រទី 95

$$(1):\ 2\cos x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$(2):\ \sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $\boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

40

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

ខ. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

គ. $\tan 3x = \sqrt{3}$

ឃ. $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ខ. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

គ. $\tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ឃ. $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{12} - k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ទំព័រទី 97

41

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}$

ខ. $2\tan x\cos x+1=2\cos x+\tan x$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $$2\tan x\cos x+1=2\cos x+\tan x \Leftrightarrow 2\tan x\cos x-\tan x-2\cos x+1=0$$
$$\Leftrightarrow \tan x(2\cos x-1)-(\cos 2x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\tan x-1)=0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\cos x-1=0 & (1)\\ \tan x-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

$$(1):\ 2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$(2):\ \tan x-1=0 \Leftrightarrow \tan x=1$$
$$\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $\boxed{\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.}$

42

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

ខ. $\cot x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

គ. $\cot 3x=\sqrt{3}$

ឃ. $\cot\left(\dfrac{x}{2}-3\right)=-1$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cot\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

ខ. $\cot x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \cot x=\cot\dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

គ. $\cot 3x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot 3x=\cot\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 3x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3} \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

ឃ. $\cot\left(\frac{x}{2}-3\right)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \cot\left(\frac{x}{2}-3\right)=\cot\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}-3=\frac{3\pi}{4}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x=\frac{3\pi+12}{2}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

43

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $3\cot x-\sqrt{3}=0$

ខ. $2(\cot 2x-\cot 3x)=\tan 2x+\cot 3x$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $3\cot x-\sqrt{3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cot x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \cot x=\cot\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $2(\cot 2x-\cot 3x)=\tan 2x+\cot 3x \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\ (*)$

លក្ខខណ្ឌនៃសមីការ $\sin 2x\neq 0 \quad ; \quad \sin 3x\neq 0 \quad ; \quad \cos 2x\neq 0$

$$(*) \Rightarrow \quad 2\left(\frac{\cos 2x\sin 3x-\cos 3x\sin 2x}{\sin 2x\sin 3x}\right)=\frac{\sin 2x\sin 3x+\cos 3x\cos 2x}{\cos 2x\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin(3x-2x)}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{\cos(3x-2x)}{\cos 2x\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x}{\sin 2x\sin 3x}-\frac{\cos x}{\cos 2x\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x\cos 2x-2\sin x\cos^2 x}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x\left(\cos 2x-\cos^2 x\right)}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x\left(2\cos^2 x-1-\cos^2 x\right)}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2\sin^3 x}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x=0$$

តាមលក្ខខណ្ឌ $\sin 2x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\neq 0$ យើងបាន សមីការគ្មានឫស។

44

ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $2\cos x+1<0$

ខ. $\tan x\geq -1$

គ. $2\cos x\geq -\sqrt{2}$

ឃ. $\cos 2x>\cos\frac{2\pi}{3}$

ង. $\sqrt{2}\cos x-1<0$

ច. $\cot x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

ឆ. $2\sin^2 x+3\sin x-2\geq 0$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយវិសមីការ៖

ក. $2\cos x+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x<-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x<\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $\tan x\geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x\geq\tan\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{3\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $2\cos x \ge -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x \ge \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ឃ. $\cos 2x > \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ង. $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x < \cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ច. $\cot x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x < \cot\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ឆ. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \ge 0$

តាង $t = \sin x$ ដែល $-1 \le t \le 1 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 \ge 0$

សិក្សាសញ្ញានៃ $2t^2 + 3t - 2$

បើ $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -2 \end{array}\right.$

t	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2t^2 + 3t - 2$		+	0	−	0	+	

$2t^2 + 3t - 2 \ge 0$ ពេល $t \le -2$ ឬ $t \ge \frac{1}{2}$ $t \le -2$ មិនយក

☞ $t \geq \frac{1}{2}$; $t = \sin x \Rightarrow \sin x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$

45

ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$ ខ. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \sin x$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយវិសមីការ៖

ក. $$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos x < \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi < x < -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi \\ x < -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 2k\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x > \pi + 4k\pi \\ x < -\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ខ. $$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(-x) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x - \frac{\pi}{3} - x}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{3} + x}{2} > 0$$
$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{6x - \pi}{6} > 0$$
$$\Leftrightarrow -\cos\frac{6x - \pi}{6} > 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{6x - \pi}{6} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{6x - \pi}{6} < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

46

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ខ. $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

គ. $\cos^2 x = 1$

ឃ. $\sin\sqrt{x} = -1$

ង. $\cot x = 1$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការ៖

ក. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ខ. $\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

គ. $\cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \pm 1$

☞ $\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

☞ $\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2k\pi \text{ ឬ } x = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

ឃ. $\sin\sqrt{x} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 \quad ; k \in \mathbb{Z}}$

ង. $\cot x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$

47

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\dfrac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2}$ ខ. $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការ៖

ក. $$\frac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. ;\quad k \in \mathbb{Z}}$$

ខ. $$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. ;\quad k \in \mathbb{Z}}$$

48

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ខ. $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$

គ. $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2$

ឃ. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=5$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការ៖

ក. $$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ខ. $$\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1 \Leftrightarrow \left(\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}\right)^3=\tan x-1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\tan x-1}{1+\tan x}\right)^3-(\tan x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (\tan x-1)\left(\frac{(\tan x-1)^2}{(1+\tan x)^3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \tan x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \tan x=1$$
$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $$\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\cot^{-1}(2)+k\pi$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cot^{-1}(2)+\frac{1}{2}k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ឃ. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \tan^{-1}5 + k\pi$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\tan^{-1}5 + \frac{1}{2}k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

49

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$

ខ. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x\cos x$

គ. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

ឃ. $\sqrt{3}\sin x + \sin x = \dfrac{1}{\cos x}$

សម្រាយ.

ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0 \Leftrightarrow \sin^3 3x\left(\dfrac{1}{\cos^3 3x} - 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^3 3x = 0 \\ \dfrac{1}{\cos^3 3x} - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos 3x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ 3x = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{1}{3}\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + 2k\pi\right) \end{array}\right. \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ទំព័រទី 107

ខ. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos\dfrac{3\pi}{2}\cos x-\sin\dfrac{3\pi}{2}\sin x=\sqrt{2}\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow 0+\sin x=\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{2}\cos x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sqrt{2}\cos x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

គ. $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2 \Leftrightarrow \sin 2x=\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=1-2\cos x\sin x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$$

ឃ. $$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin x+\sin x=\frac{1}{\cos x} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{1}{\cos x}\\ &\Leftrightarrow \quad \sin x\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\\ &\Leftrightarrow \quad \sin 2x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\\ &\Leftrightarrow \quad 2x=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)+2k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

សម្រាប់លំហាត់ទី៨០ ដល់ទៅ១០3 មានចម្លើយក្នុងសៀវភៅភាគ២
សូមអរគុណ

រួមគិត រួមធ្វើ រួមទទួលខុសត្រូវ
ដើម្បីអនាគតប្រទេសជាតិ និងកូនចៅជំនាន់ក្រោយ

មេរៀនទី៨ ចំនួនកុំផ្លិច (ត)

លឹម សីហា

Graduate School of Science
Royal University of Phnom Penh

August 3, 2024

មាតិកា

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ទ្រឹស្តីបទ 1. (រូបមន្ត ដឺម័រ)

បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះ

$$\begin{aligned} z^n &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n \\ &= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned} \tag{1}$$

គ្រប់ n ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបរិជ្ជមានៗ

សម្រាយបញ្ជាក់៖(កិច្ចការអនុវត្តន៍)
ការណែនាំ៖ ប្រើរូបមន្ត

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{2}$$

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។ គណនា z^3 ។

$$z^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 \tag{3}$$
$$= 2^3\left(\cos 3\frac{\pi}{3} + i\sin 3\frac{\pi}{3}\right) \tag{4}$$
$$= 8(\cos\pi + i\sin\pi) \tag{5}$$
$$= 8(-1 + i0) \tag{6}$$
$$= -8 \tag{7}$$

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 2. គណនា $(-1+i)^{10}$ ។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ការណែនាំ

1. បម្លែង $-1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
2. ប្រើរូបមន្តដឺម័រ

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 3. គណនា $(-\sqrt{3}+i)^{13}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត $a+bi$ ។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ការណែនាំ

1. បម្លែង $-\sqrt{3}+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
2. ប្រើរូបមន្តដឺម័រ
3. រួចបម្លែងទៅជាទម្រង់ពីជគណិត

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 4. គណនា $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមានៗ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ការណែនាំ

1. បម្លែង $\dfrac{1+i}{1-i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
2. ប្រើរូបមន្តដឺម័រ

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 5. គណនា $(1+i)^{60}$ ។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ការណែនាំ

1. បម្លែង $1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
2. ប្រើរូបមន្តដឺម័រ

ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 6. សរសេរ z ជាទម្រង់ $a+bi$ បើគេអោយ $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{13}$ ។

(កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ការណែនាំ

1. បម្លែង $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
2. ប្រើរូបមន្តដឺម័រ

ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ w ជាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច z នោះ គេបាន $w^n=z$ ។

តាង $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ និង $w=s(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ។

គេបាន

$$\begin{aligned} w^n &= [s(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n \\ &= s^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha) \end{aligned}$$

ដោយ $w^n=z$ គេបាន $s^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ។

ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ផ្ទឹមតាមផ្នែក យើងបាន

- $s^n = r$ ដែល $s > 0$ និង $r > 0$ ហេតុដូចនេះ៖ $s = \sqrt[n]{r}$
- $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$

គេបាន $\cos n\alpha = \cos\varphi$ និង $\sin n\alpha = \sin\varphi$

$$\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{ដែល} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ និង $s = \sqrt[n]{r}$

យើងបាន $w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$

ដែល $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ។

ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ទ្រឹស្តីបទ 2. (ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច)

បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ z មាន n ឫសទី n កំណត់ដោយ៖

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \tag{8}$$

ដែល $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ។

ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 7. គណនាឫសទី 5 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-1+i$
រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំងនោះលើរង្វង់ៗ

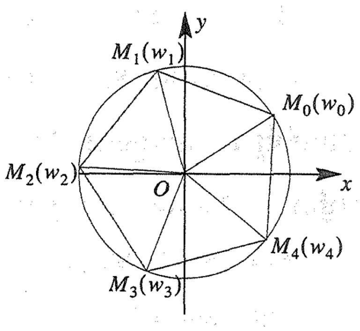
$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \tag{9}$$

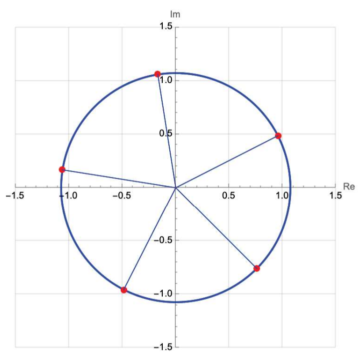
ឫសទី 5 នៃ z កំណត់ដោយៈ

$$\begin{aligned} w_k &= 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right] && (10)\\ &= 2^{\frac{1}{10}}\left[\cos\frac{3\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{20}\right] && (11)\end{aligned}$$

ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 8. គណនាឫសទី 5 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-1+i$
រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំងនោះលើរង្វង់ៗ





ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍ 9. គណនាឫសទី 4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $-8+i8\sqrt{3}$
រួចតាងចំណុចរូបភាពនៃឫសទាំងនោះលើរង្វង់។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ឧទាហរណ៍ 10. ដោះស្រាយសមីការ $z^6+64=0$។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ឧទាហរណ៍ 11. ដោះស្រាយសមីការ $(z-2)^3=1$។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

ឧទាហរណ៍ 12. ដោះស្រាយសមីការ $z^6+2z^3+1=0$។ (កិច្ចការអនុវត្តន៍)

Thank You

សូមអរគុណ!