មុខវិជ្ជា៖
គណិតវិទ្យាគណនា

កញ្ចប់សមត្ថភាពទី ១
ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់

ការពណ៌នាអំពីមុខវិជ្ជា

គណិតវិទ្យាគណនាគឺជាមុខវិជ្ជាគ្រឹះមួយដែលដើរតួនាទីសំខាន់ក្នុងការយល់ដឹងស៊ីជម្រៅពីវិទ្យាសាស្ត្រ និងវិស្វកម្ម ក៏ដូចជាវិស័យសំខាន់ផ្សេងៗទៀត។ មុខវិជ្ជានេះផ្តោតសំខាន់ទៅលើការគណនាដេរីវេ ការគណនាអាំងតេក្រាល និងអត្ថន័យ និងការអនុវត្តរបស់វា។ ប្រធានបទសំខាន់ៗរួមមាន អនុគមន៍ លីមីត ដេរីវេ អាំតេក្រាលកំណត់និងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា និងការអនុវត្តក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែង។

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុកៈ

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនចំណេះវិជ្ជាសម្បទាដូចខាងក្រោម ៖

CLO1: កំណត់និយមន័យនៃអនុគមន៍ លីមីត ដេរីវេ និងអាំតេក្រាលកំណត់បានច្បាស់លាស់។

CLO2: បកស្រាយបានត្រឹមត្រូវពីអត្ថន័យនៃដេរីវេ និងអាំតេក្រាលកំណត់តាមបែបធរណីមាត្រ និងតាមបែបរូប

CLO3: ពន្យល់ពីទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា និងប្រើប្រាស់វាដើម្បីគណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនបំណិនសម្បទាដូចខាងក្រោមៈ

CLO4: បង្កើតគម្រូគណិតវិទ្យាដើម្បីប៉ាន់ស្មាន និងព្យាករណ៍ពីទំនាក់ទំនងរវាងអថេរពីរដោយប្រើអនុគមន៍

CLO5: ប្រើប្រាស់ដេរីវេដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបរិមាទាក់ទងនឹងជីវភាពជាក់ស្តែងបានត្រឹមត្រូវ

CLO6: បម្លែងបញ្ហាក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែងឲ្យទាក់ទងនឹងដេរីវេ និងអាំងតេក្រាល
និងប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រសមស្របដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានោះ

CLO7: ប្រើប្រាស់បច្ចេកវិទ្យា និងកម្មវិធីគណិតវិទ្យាបានសមស្របក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាស្មុគស្មាញទាក់ទងនឹងគណិតវិទ្យា

ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គសិក្សា អ្នកសិក្សាទាំងអស់រំពឹងថានឹងបង្កើនចរិយាសម្បទាដូចខាងក្រោមៈ

CLO8: មានស្មារតីបន្តការស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជានេះកាន់តែស៊ីជម្រៅ

CLO9: ទទួលស្គាល់សារសំខាន់ និងភាពចាំបាច់នៃមុខវិជ្ជានេះក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាជាក់ស្តែង

CLO10: ចេះសហការណ៍គ្នាក្នុងការងារជាក្រុមដោយផ្អែកលើផ្នត់គំនិតយកវិធីសាស្ត្រនិងយន្តការជាគោល

វាយតម្លៃសិក្សា

ដើម្បីបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ អ្នកសិក្សាត្រូវ

១. វត្តមានចូលសិក្សា ១0%

២. ការចូលរួមសកម្មភាពសិក្សា ២0%

៣. ការវាយតម្លៃកំឡុងពេលសិក្សា ៣0%

៤. ការប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជាសិក្សា ៤0%

អារម្ភកថា

វិស័យអប់រំ ត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាចាត់ទុកថាជាវិស័យអាទិភាព និងត្រូវបានធ្វើកំណែទម្រង់ជាប្រចាំ ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការសិក្សានៅគ្រប់កម្រិត។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាបាននិងកំពុងពិនិត្យឡើងវិញកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន និងជំរុញកំណែទម្រង់សាលារៀននៅគ្រប់កម្រិត ដើម្បីធានាថាសាលារៀនមានដំណើរការប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាពសម្រាប់ការសិក្សារៀនសូត្ររបស់សិស្ស និងផ្តល់ដល់សិស្សនូវវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា កាយសម្បទា ឆ្លើយតបបានទៅតាមតម្រូវការទីផ្សារការងារ និងចូលរួមចំណែកពេញលេញក្នុងការអភិវឌ្ឍសហគមន៍ និងប្រទេសជាតិ ឈានឆ្ពោះទៅសម្រេចបានចក្ខុវិស័យកម្ពុជាឆ្នាំ២០៣០ និងឆ្នាំ២០៥០ ។

ជាផ្នែកមួយនៃកំណែទម្រង់ការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណវុឌ្ឍិគ្រូបង្រៀន តាមរយៈគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ក្រសួងបានរៀបចំ "ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សាសម្រាប់ការបណ្តុះបណ្តាលបរិញ្ញាបត្រអប់រំ វិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀន ឯកទេសទាំង ៦ (អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ, គណិតវិទ្យា, គីមីវិទ្យា, ជីវវិទ្យា, រូបវិទ្យា, ប្រវត្តិវិទ្យា) ដើម្បីប្រើប្រាស់ក្នុងកម្មវិធីក្រឹតការគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅតាមសាលារៀនចំណេះទូទៅ។ ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះជាឯកសាររស់ ដែលនឹងអាចមានការកែសម្រួលទៅតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង ជាពិសេសនៅដំណាក់កាលអន្តរកាលនៃការអនុវត្តយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន។

ក្រសួងមានជំនឿយ៉ាងមុតមាំ លើប្រសិទ្ធភាពនៃការអនុវត្តក្របខណ្ឌកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលនេះ ដែលនឹងនាំគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅគ្រប់ភូមិសិក្សា សម្រេចបានគោលដៅអប់រំ ដែលនឹងចូលរួមចំណែកក្នុងការសម្រេចបានចក្ខុវិស័យរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជា។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងសូមកោតសរសើរដ៏ស្មោះចំពោះ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យនាយកគម្រោង និងក្រុមការងារគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ជាពិសេសក្រុមការងារនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញដែលបានខិតខំផលិតឯកសារក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះឡើង សម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលក្នុងគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ។/

ថ្ងៃច័ន្ទ ៧រោច ខែទុតិយាសាឍ ឆ្នាំថោះ បញ្ចស័ក ព.ស ២៥៦៧
រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០៧ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០២៣

រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ហង់ជួន ណារ៉ុន

គណៈកម្មការ

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ហង់ជួន ណារ៉ុន**	រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ណាត ប៊ុនរឿន**	រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
៣. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត	**ជេត ជាលី**	សាកលវិទ្យាធិការសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត	**ឈុន ហុក**	សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក	**ប៉ាល់ ដែល**	សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត	**សំអេរ អង្គារតន៍**	អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
៧. លោក	**ព្រីង មរកត**	ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រង

១ .លោកបណ្ឌិត	**សុខ សុត្រា**	ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក	**មាក ភាមេរ៉ាន**	ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៣. លោកបណ្ឌិត	**ជ័យ ចាន់អឿន**	ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត	**ម៉ម សុជាតិ**	ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក	**សុត វិសាល**	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់សិក្សាអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត	**ឃុន គឹមលាង**	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៧. លោកស្រីបណ្ឌិត	**ស៊ូ កល្យាណ**	អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៨. លោក	**ហង់ ស៊ីម**	សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៩. លោក	**ដួង ប៉េងអាន**	អ្នកសម្របសម្រួលកម្មវិធីមធ្យមសិក្សា មហាវិទ្យាល័យអប់រំ
១០. កញ្ញា	**ហុង ឡៃហៀក**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
១១. លោក	**សើ ពន្លក**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

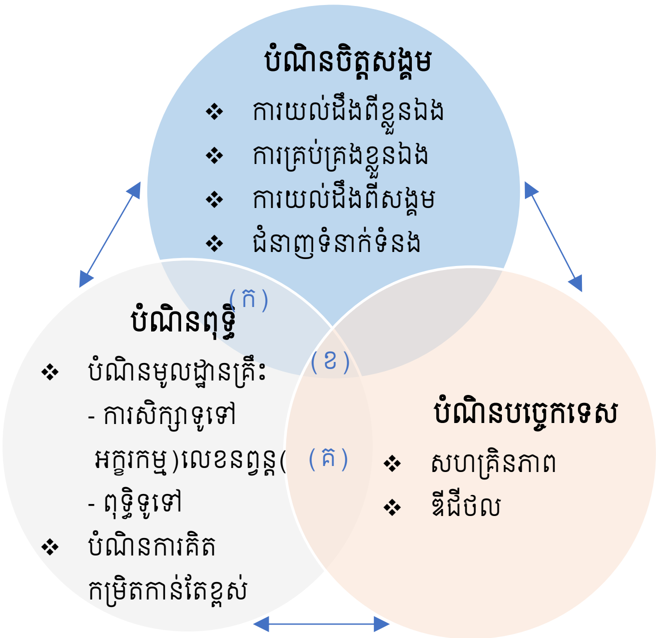
១. លោកបណ្ឌិត	**សំអេរ អង្គារតន៍**	អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
២. លោក	**ព្រីង មរកត**	ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា
៣. លោក	**ង៉ោ ប៉េងឡុង**	ប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៤. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត	**សិត សេង**	នាយកវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ
៥. លោកបណ្ឌិត	**ឈុក ច័ន្ទឆាយា**	អនុប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៦. លោក	**កែវ សារ៉ាត់**	ទីប្រឹក្សាបច្ចេកទេសគម្រោងកែលម្អការអប់រំបំណេះទូទៅ

៤. ការីកុំព្យូទ័រ

១. លោក	**ម៉ៅ ម៉ារ៉ាឌី**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក	**ឌន សំណាង**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក

ការសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនេះគឺផ្តោតលើប្រតិបត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាដែលអនុវត្តផ្ទាល់នៅសាលារៀន។ ទាំងអ្នកសិក្សា និងសិស្ស (ដែលអ្នកសិក្សានឹងធ្វើការជាមួយផ្ទាល់) ចាំបាច់មាន (១) បំណិនចិត្តសង្គម (២) បំណិនពុទ្ធិ និង (៣) បំណិនបច្ចេកទេស ជាមូលដ្ឋាន (ដូចក្នុងរូបទី១)។ កញ្ចប់សមត្ថភាពទាំងបីខាងដើមនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សា អភិវឌ្ឍបំណិនចិត្តសង្គម បំណិនពុទ្ធិ និងពង្រឹងសមត្ថភាពផ្នែក (ក)ការសម្រេចចិត្ត ទំនាក់-ទំនង សេចក្តីអំណត់ ទឹកចិត្តអាណិតអាសូរ និងការគ្រប់គ្រងខ្លួនឯង ថែមទាំងអាចអនុវត្តការបង្រៀនមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យាប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងនវានុវត្តន៍ដោយប្រើប្រាស់ឧត្តមានុវត្តន៍ផ្សេងៗ (ខ) ការដោះស្រាយបញ្ហា និង ការរៀបចំនិងការចាត់ចែង (គ) បច្ចេកទេសកម្រិតមធ្យម និងកម្រិតខ្ពស់។



រូបភាពទី១
ប្រភព៖ WDR2018 (p.103)

ដោយឡែក សម្រាប់អ្នកសិក្សាកម្មវិធីនេះផ្ទាល់ នឹងទទួលបាន៖

(១) ចំណេះដឹងឯកទេសគណិតវិទ្យាកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ

- ❖ មុខវិជ្ជា ពីជគណិតលីនេអ៊ែ
- ❖ ចិត្តសង្គម ភាពជាអ្នកដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រង
- ❖ សន្លឹកកិច្ចការស្វ័យសិក្សានៅមធ្យមសិក្សា
- ❖ ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យា

(២) ចំណេះដឹងវិធីគរុកោលស្យ សាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំរូបវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សា

- ❖ វិធីសាស្ត្របង្រៀន
- ❖ វិធីសាស្ត្រវាយតម្លៃ
- ❖ ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ

- ❖ ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ
- ❖ បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ

(៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង

- ❖ អនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន
- ❖ ការអនុវត្តកម្មវិធីស្វ័យសិក្សារូបវិទ្យា ពីទីថ្នាក់៧-ទី១២
- ❖ របាយការណ៍នៃការអនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុកសម្រាប់បរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

វិជ្ជាសម្បទា

PLO1- ពន្យល់អំពីទ្រឹស្តី និងគោលការណ៍នៃការអប់រំក្នុងបរិបទសកលលោក និងបរិបទប្រទេសដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំងទៅនឹងការអនុវត្តជាក់ស្តែងនៃការបង្រៀន។

PLO2- បកស្រាយអំពីដំណើរការអនុវត្តកិច្ចការសម្រាប់ការបង្វឹកលើការរៀបចំកម្មវិធីសិក្សា និងការបង្រៀនរូបវិទ្យាប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។

បំណិនសម្បទា

PLO3- អនុវត្តបំណិនចិត្តសង្គម និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថលសម្រាប់បង្កើនការប្រាស្រ័យទាក់ទងគ្នាក្នុងការងារ និងជីវភាពប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងដោះស្រាយបញ្ហាប្រកបដោយភាពច្នៃប្រឌិត និងការទទួលខុសត្រូវ។

PLO4- បង្កើតគន្លឹះ និងទម្រង់សម្រាប់ដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រងការបង្រៀនដោយផ្តោតលើផលសម្រេចនៃការសិក្សារបស់សិស្សឆ្ពោះទៅរកស្តង់ដាសាលារៀនមានប្រសិទ្ធភាព និងនិរន្តភាពសាលារៀនតាមរយៈការសិក្សា ការអនុវត្តជាក់ស្តែង និងការស្រាវជ្រាវ។

PLO5- អនុវត្តការងារអភិវឌ្ឍកម្មវិធីសិក្សា ការរៀននិងការបង្រៀនរូបវិទ្យា និងការសិក្សាបែបគម្រោងភ្ជាប់នឹងបំណិនរកចំណូលសម្រាប់សាលារៀនប្រកបដោយក្រមសីលធម៌វិជ្ជាជីវៈ។

ចរិយាសម្បទា

PLO6- អភិវឌ្ឍឥរិយាបថវិជ្ជមាន និងវប្បធម៌រៀនពេញមួយជីវិតសម្រាប់បំពេញការងារ និងទាក់ទងជាមួយអ្នកដទៃប្រកបដោយគុណតម្លៃ មនុស្សធម៌ សាមគ្គីភាព និងការចែករំលែកគ្នា។

PLO7- បង្កើតបង្គាញ/ការដឹកនាំបណ្តាញសម្រាប់កសាងភ្នាក់ងារពង្រីកឧត្តមានុវត្តន៍សម្រាប់ការរៀន និងការបង្រៀន។

សម្គាល់៖ Program Learning Outcome (PLO) លទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំ

កញ្ចប់សមត្ថភាព និង រចនាសម្ព័ន្ធកម្មវិធីសិក្សា

កម្មវិធីបរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ តម្រូវឱ្យអ្នកសិក្សាសិក្សាចំនួន ៦៣ ក្រេឌីតដែលមានរយៈពេលចន្លោះពី ១២ ទៅ ១៨ខែ។ ការសិក្សានិងធ្វើឡើងតាមរយៈការរៀនពីចម្ងាយ (ភាគច្រើនចន្លោះពី ៦០%

ទៅ ៧០%) និងសិក្សាផ្ទាល់នៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញនិង សាលាហាត់ការ (ភាគតិចចន្លោះពី ៤០% ទៅ ៣០%)។ ការសិក្សាផ្តោតលើបណ្តុំមុខវិជ្ជា (១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៣៦ ក្រេឌីត) (២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (១២ (+៣) ក្រេឌីត) (៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង(១២ ក្រេឌីត)។ បន្ថែមពីលើនេះទៀតអ្នកសិក្សាត្រូវអនុវត្តខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនៅសាលាសាមីផ្ទាល់តែម្តងដោយមានការណែនាំពីគ្រូបង្វឹក ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ គ្រូបង្រៀននៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងមន្ត្រីអប់រំមកពីនាយកដ្ឋានជំនាញផ្សេងៗរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលមានបទពិសោធន៍អនុវត្តជាក់ស្តែងកន្លងមក ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	ចំនួនក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	៣៦
២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	១២ (+៣)
៣)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	១២
សរុប	៦០ (+៣)

សម្គាល់៖ *សម្រាប់កញ្ចប់សមត្ថភាពចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សាបានបន្ថែមមុខវិជ្ជាបំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំចំនួន ៣ក្រេឌីត*

លក្ខណៈទូទៅនៃមុខវិជ្ជាសិក្សា

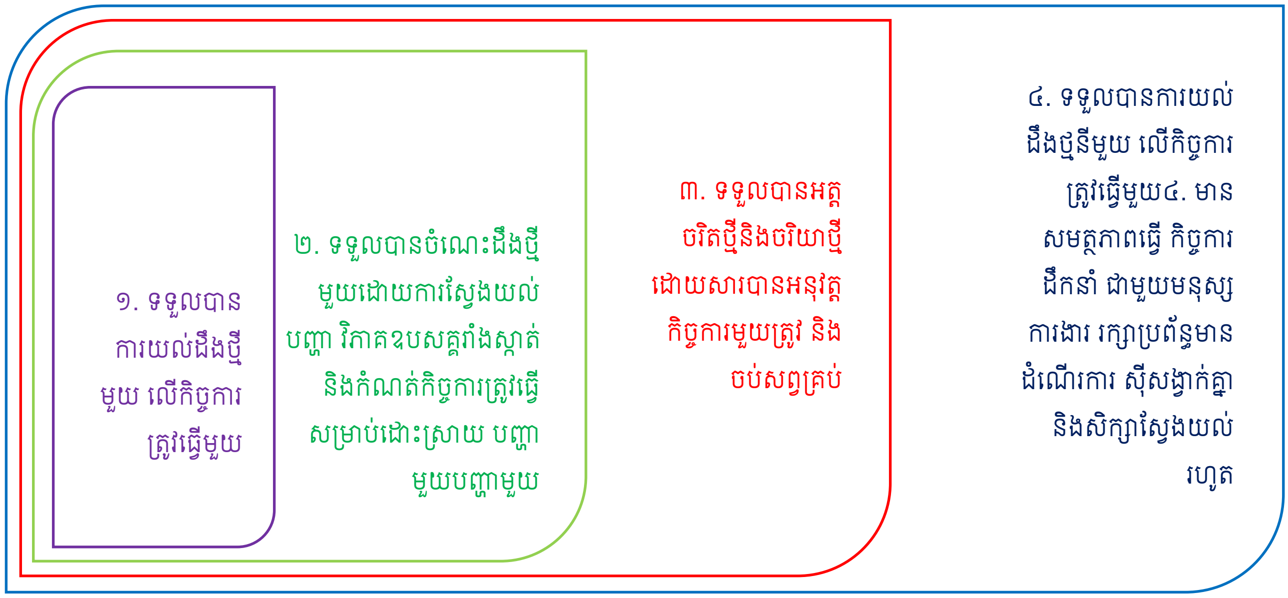
មុខវិជ្ជាសិក្សាសម្រាប់កម្រិតបរិញ្ញាបត្រអប់រំនេះនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សាបំពេញកញ្ចប់សមត្ថភាពដូចខាងក្រោម ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងលទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំហើយឱ្យអ្នកសិក្សាមានសមត្ថភាពសម្រាប់បំពេញការងារប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	មុខវិជ្ជាសិក្សា	ក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	មុខវិជ្ជាឯកទេស១	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស២	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៣	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៤	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៥	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត១ (ចងចាំ)	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត២ (យល់ដឹង)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៣ (ហ្វឹកហាត់)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៤ (វាយតម្លៃ)	៣
	ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស	៩
(៣)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និង ការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	វិធីសាស្ត្របង្រៀន បត់បែនតាមសមត្ថភាពសិស្ស និងទស្សនទានអប់រំថ្មីៗ	៣
	ប្រឹក្សា និងហ្វឹកហ្វឺនគរុសល្យលើយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះវង្វាយតម្លៃអប់រំ	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ	៣

	បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ *	៣
៤)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សា គរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្ដែង (២០%)	ការអនុវត្ត ស្តង់ដាយុទ្ធសាស្រ្តសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី១)	៣
	ការអនុវត្ត ស្តង់ដានៃយុទ្ធសាស្រ្តសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី២)	៦
	របាយការណ៍និងការការពារស្ដីពីការអនុវត្តស្តង់ដាយុទ្ធសាស្រ្តសហគមន៍សាលារៀន	៣
សរុប		**៦៣**

លំហូរបង្រៀន និងរៀន

លំហូរបង្រៀននិងរៀន ១មេរៀន ឬកិច្ចការមួយ រួមជាមួយបំណិនមួយ និងចរិយាមួយ



ការវាយតម្លៃលើការសិក្សា

ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាគឺផ្តោតលើលទ្ធផលសិក្សាជាគោល។ ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមានបីដំណាក់កាលធំៗ គឺ ការវាយតម្លៃលើការសរសេរ (២) ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមុខវិជ្ជា (១) ឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស និង ការវាយតម្លៃសរុបដោយពិនិត្យលើការបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌ (៣) សម្រាប់បញ្ចប់ការសិក្សា។

៦.៤.១ គោលការណ៍វាយតម្លៃ

គោលការណ៍រួមសម្រាប់ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាមានដូចតទៅ៖

១) អ្នកសិក្សាតម្រូវឱ្យមានវត្តមានក្នុងការសិក្សាតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ មិនតិចជាង៧០%។ ក្នុងករណីអ្នកសិក្សាមានវត្តមានតិចជាង៧០% នឹងមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជានោះទេ

២) ក្នុងករណីដែលអ្នកសិក្សាធ្លាក់មុខវិជ្ជាណាមួយក្នុងឆមាស នឹងមិនអនុញ្ញាតឱ្យបន្តការសិក្សាទៅឆ្នាំបន្ទាប់ និងប្រឡងបញ្ចប់ឡើយ

៣) អ្នកសិក្សាទាំងអស់ត្រូវធ្វើកិច្ចការស្រាវជ្រាវសំខាន់ៗតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ និងប្រគល់ជូនគ្រូឧទ្ទេសតាមមុខវិជ្ជាដែលបានកំណត់

៤) អ្នកសិក្សាត្រូវប្រឡងបញ្ចប់ការសិក្សាដែលធ្វើឡើងបន្ទាប់ពីចប់ឆមាសនីមួយៗ តាមការកំណត់ក្នុងកម្មវិធីសិក្សា

៥) អ្នកសិក្សាត្រូវចងក្រងឯកសារវឌ្ឍនភាពនៃកិច្ចការស្នូលរួមមានការហាត់ការ និងកម្មសិក្សាដែលផ្តោតលើ (ក) សកម្មភាពប្រតិបត្តិ (ខ) លទ្ធផលដែលសម្រេចបាន និង (គ) ការឆ្លុះបញ្ចាំង និងមេរៀនបទពិសោធន៍ និង

៦) អ្នកសិក្សាត្រូវតែជាប់មធ្យមភាគនៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានិងការធ្វើកម្មសិក្សា ដើម្បីទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។

ការផ្តល់ពិន្ទុ និងប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់

អ្នកសិក្សាអាចទទួលពិន្ទុចាប់ពី 00 ដល់ 100 ទៅតាមការវាយតម្លៃផ្អែកលើលក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដែលបានកំណត់ក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជា ការបំពេញកម្មសិក្សា និងការសរសេរនិងការការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។ ពិន្ទុដែលជាប់ត្រូវចាប់ផ្តើមពីមធ្យមភាគពិន្ទុ 50% ឬពិន្ទុនិទ្ទេស 2.00 ឡើងទៅ។

ពិន្ទុគឺកំណត់ពី 00.00 ដល់ 100 (មធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប ឬ Grade Point Average–GPA)។ រូបមន្តគណនារកមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) គឺមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) ស្មើផលបូកសរុបរវាងផលគុណនៃពិន្ទុនិទ្ទេស (Grade Point–P) និងតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកនៃមុខវិជ្ជានីមួយៗ (Attempted Credit Value–C) ចែកនឹងផលបូកសរុបនៃតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកគ្រប់មុខវិជ្ជា។

ប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់កម្មវិធី គឺផ្អែកទៅលើតម្លៃនៃពិន្ទុអតិបរមា 100% និង 50% នៃពិន្ទុអប្បបរមា។ ប្រព័ន្ធដាក់ពិន្ទុនេះ ត្រូវបានបកប្រែទៅជា «ពិន្ទុជានិទ្ទេស» និង «ពិន្ទុជាតម្លៃលេខ» ដូចដែលពិពណ៌នាខាងក្រោម៖

ពិន្ទុជាភាគរយ%	និទ្ទេស	ពិន្ទុនិទ្ទេស	មូលវិចារណ៍
85%-100%	A	4.00	ល្អប្រសើរ
80%-84%	B+	3.50	ល្អណាស់
70%-79%	B	3.00	ល្អ
65%-69%	C+	2.50	ល្អបង្គួរ
50%-64%	C	2.00	មធ្យម
<49%	F	1.50	ធ្លាក់

៦.៥ គោលការណ៍ប្រតិបត្តិ

ដើម្បីធានានូវការផ្តល់សេវាអប់រំប្រកបដោយគុណភាព និងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ មហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញអនុវត្តតាមគោលការណ៍ បទបញ្ញត្តិ និងបទដ្ឋានគតិយុត្តិរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ព្រមទាំងគោលការណ៍ច្បាប់នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ជាមួយគ្នានេះដែរ អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវគោរពតាមបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងឈរលើស្មារតីស្មោះត្រង់ ទទួលខុសត្រូវខ្ពស់ និងភាពម្ចាស់ការ និងគោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា។ សម្រាប់គោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានវាយតម្លៃលើចំណុចសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

៦ ១.៥.ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយា

ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានប្រមូលផ្តុំលើការគោរពវិន័យចាត់តាំង ការមករៀនទៀងទាត់ ការយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការសិក្សា ការខិតខំស្រាវជ្រាវ ការអនុវត្តភារកិច្ច និងស្មារតីសាមគ្គីភាពនៅក្នុងថ្នាក់ ក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងក្រៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា។ ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានធ្វើឡើងតាមរយៈយោបល់ឯកភាពពីមតិភាគច្រើនដាច់ខាតរបស់ក្រុមប្រឹក្សាវិន័យ ដោយផ្អែកលើលក្ខណសម្បត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ និងបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ។

៦ ២.៥.ការក្លែងបន្លំឯកសារ

អ្នកសិក្សាដែលក្លែងបន្លំឯកសារ នឹងត្រូវលុបឈ្មោះចេញពីបញ្ជីនិស្សិតដោយស្វ័យប្រវត្តិ ព្រមទាំងទទួលទោសតាមច្បាប់ជាធរមាន។ អ្នកសិក្សាត្រូវចាំថា ការលួចចម្លងស្នាដៃ ការលួចកម្មសិទ្ធិបញ្ញា និងគំនិតរបស់អ្នកដទៃគឺជាបទល្មើសសិក្សាធ្ងន់ធ្ងរដែលអាចឈានដល់ការបញ្ឈប់បុគ្គលដែលប្រព្រឹត្តបទល្មើសពីកម្មវិធី។ ត្រូវសម្រេចឱ្យធ្លាក់ជាស្ថាពរ បើអ្នកសិក្សារូបណាចម្លងដោយផ្ទាល់ពីអ្នកសិក្សាដទៃទៀត ឬប្រភពផ្សេងៗ ឬការប្រើសម្ភារៈ ឬឯកសារផ្សេងទៀត ដែលមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតក្នុងការប្រឡង។

៦.៥.៣ ឯកសារជំនួយស្មារតី/របាយការណ៍/កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

អ្នកសិក្សាត្រូវបង្ហាញនូវសុចរិតភាពនៃការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្លួនឱ្យបានខ្ជាប់ខ្ជួន ចាប់តាំងពីពេលចូលរៀនរហូតដល់ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គបណ្តុះបណ្តាល។ រាល់សំណេរការងារសិក្សាទាំងអស់ មិនត្រូវដកស្រង់គំនិត សរសេរ ឬចម្លងស្នាដៃផ្សេងៗរបស់អ្នកដទៃមកធ្វើជាគំនិត ជាស្នាដៃ ឬជាកម្មសិទ្ធិរបស់ខ្លួនដោយគ្មានការបញ្ជាក់ពីប្រភពច្បាស់លាស់នៃឯកសារយោង ឯកសារពិគ្រោះ ឬការអនុញ្ញាតពីម្ចាស់ប្រភព។

ក្នុងករណីរកឃើញមានការលួចចម្លងស្នាដៃអ្នកដទៃ អ្នកសិក្សានឹងត្រូវប្រឈមមុខចំពោះក្រុមប្រឹក្សាបច្ចេកទេស និងក្រុមប្រឹក្សាវិន័យរបស់មហាវិទ្យាល័យអប់រំ ឬសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដោយត្រូវទទួលពិន័យឱ្យរៀនត្រួតថ្នាក់ ឬអាចត្រូវបញ្ឈប់ពីកម្មវិធីដោយគ្មានសំណងប្រាក់សិក្សាដែលបានបង់រួចហើយ និងមិនមានការចេញលិខិតស្នាមបញ្ជាក់ការសិក្សាអ្វីដែរ។

សម្គាល់៖ កម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលសូមរក្សាសិទ្ធិក្នុងការកែប្រែការអនុវត្តជាក់ស្តែងឱ្យឆ្លើយតបទៅនឹងវឌ្ឍនភាពការរៀននិងបង្រៀន សមត្ថភាពរៀននិងការអនុវត្តជាក់ស្តែង និង ស្ថានភាពរៀននិងបង្រៀនជាក់ស្តែង ដើម្បីសម្រេចបានលទ្ធផលសិក្សាល្អបំផុត និងសម្រេចស្តង់ដាសហគមន៍សាលារៀននៃគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ (GEIP) ។

ជំពូកទី ១

អនុគមន៍ និងគំរូគណិតវិទ្យា
(Functions and Mathematical Models)

អនុគមន៍ (Functions)

- **រង្វង់មួយ**: ក្រឡាផ្ទៃ A នៃអាស្រ័យនឹងកាំ r ។ ទំនាក់ទំនងរវាង r និង A កំណត់ដោយ $A = \pi r^2$ ។ ចំពោះតម្លៃ r នីមួយៗ មានតម្លៃ A ពាក់ព័ន្ធតែមួយគត់ ហើយគេថា A ជាអនុគមន៍នៃ r ។

$$A = f(r)$$

- **ការជិះកង់បី**: តម្លៃ P អាស្រ័យនឹងចម្ងាយ x ។ ម៉ាស៊ីនគិតលុយមានក្បួនច្បាស់លាស់ក្នុងការកំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង P និង x គឺថាគេអាចកំណត់តម្លៃ P នៅពេលស្គាល់ចម្ងាយជិះ x ។ P ជាអនុគមន៍នៃ x ។

$$P = f(x)$$

អនុគមន៍

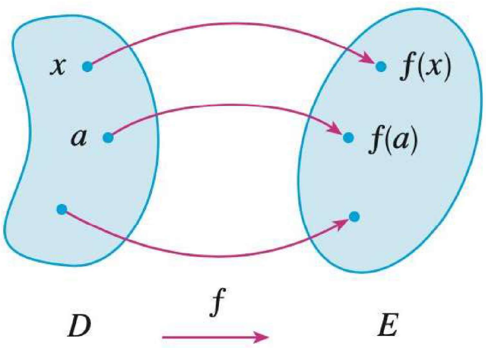
- **ចំនួនប្រជាជនកម្ពុជា** P អាស្រ័យនឹងពេល t ។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញចំនួនប្រជាជនកម្ពុជា $P(t)$ នៅតាមឆ្នាំ t មួយចំនួន។

Ex. $P(2020) = 16,396,860$

គេថា P ជា**អនុគមន៍**នៃ t ។

ឆ្នាំ	ចំនួនប្រជាជន
2024	**17,121,847**
2023	**16,944,826**
2022	**16,767,842**
2020	**16,396,860**
2015	**15,417,523**
2010	**14,363,532**
2005	**13,246,583**
2000	**12,118,841**

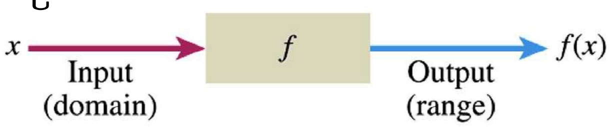
និយមន័យ **អនុគមន៍** f ពីសំណុំ D ទៅសំណុំ E ជា**ទំនាក់ទំនង**(ទ្វេធាតុ)រវាង $x\epsilon D$ ទៅនឹងធាតុ $y\epsilon E$ **តែមួយគត់**។



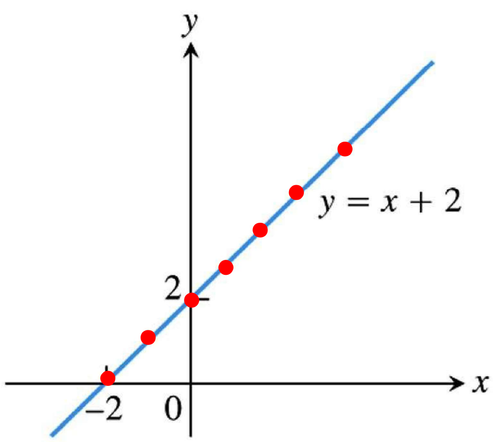
ដែនកំណត់
(ផ្ទុកដែនតម្លៃ)

សំណុំចុង

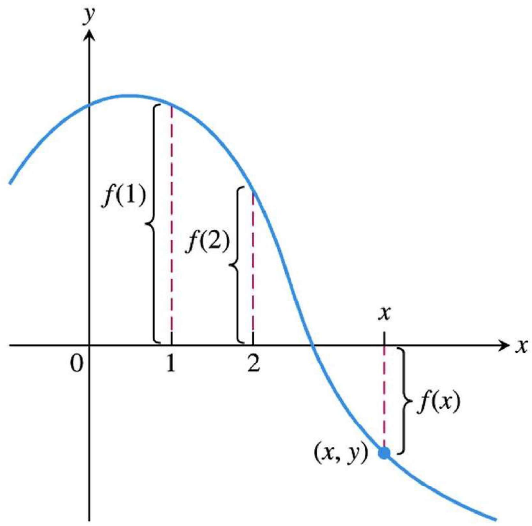
ដ្យាក្រាមខាងក្រោមបង្ហាញថាអនុគមន៍ជាម៉ាស៊ីនមួយប្រភេទ



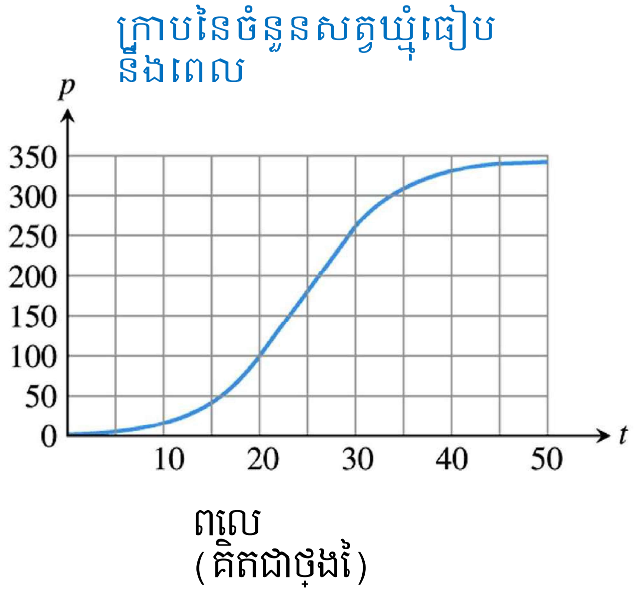
អនុគមន៍ **Function**	ដែនកំណត់ **Domain (x)**	ដែនតម្លៃ **Range (y)**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$



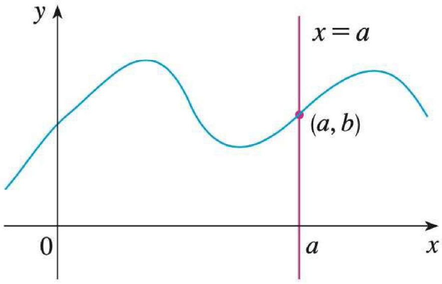
ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x + 2$ ជាសំណុំចំណុច (x, y)
ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y = x + 2$

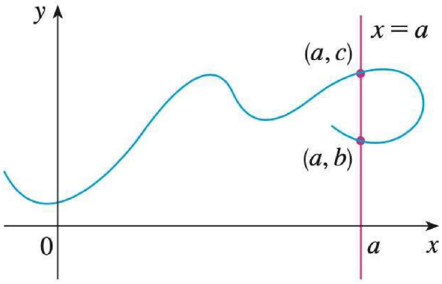


បើចំណុច (x, y) ស្ថិតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ f នោះតម្លៃ $y = f(x)$ គឺជា **កម្ពស់**នៃក្រាបពីលើ(ពីក្រោម)**ចំណុច x**



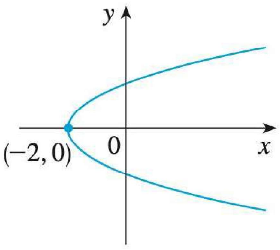
តេស្តបន្ទាត់ឈរ ខ្សែកោងមួយនៅក្នុងប្លង់ xy ជាក្រាបនៃអនុគមន៍លុះត្រាតែគ្មានបន្ទាត់ឈរណាអាចគូសកាត់ខ្សែកោងនោះលើសពីមួយចំនុច



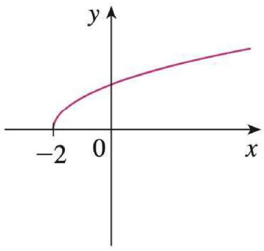


Yes

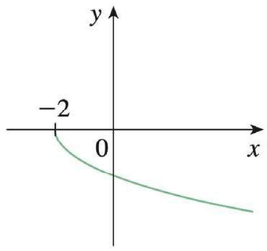
No



(a) $x = y^2 - 2$



(b) $y = \sqrt{x+2}$



(c) $y = -\sqrt{x+2}$

No

Yes

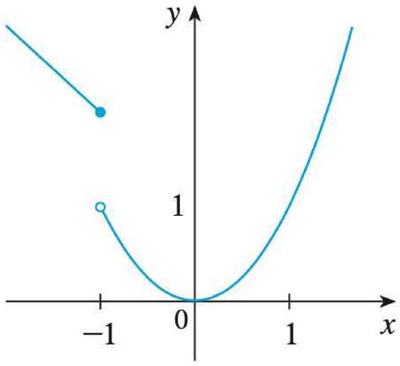
Yes

អនុគមន៍កំណត់ដោយផ្នែក
(Piecewise Defined Funtions)

Example អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{if } x > -1 \end{cases}$$

ចូរគណនា $f(-2), f(-1)$ និង $f(0)$



$f(-2) = 3$

$f(-1) = 2$

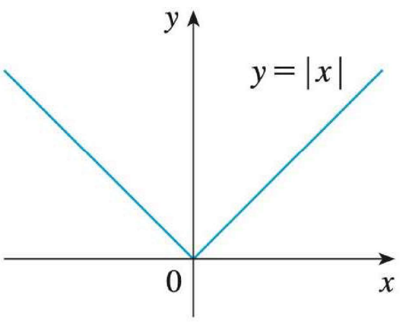
$f(0) = 0$

អនុគមន៍កំណត់ដោយផ្នែក
(Piecewise Defined Funtions)

Exercise អនុគមន៍តម្លៃដាច់ខាត f កំណត់ដោយ $f(x) = |x|$ ។

ចូរសរសេរអនុគមន៍ f ជាទម្រង់អនុគមន៍កំណត់ដោយផ្នែក

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

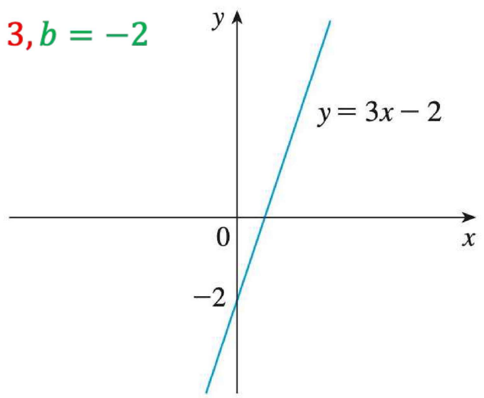


គម្រូគណិតវិទ្យា
(Mathematical Models)

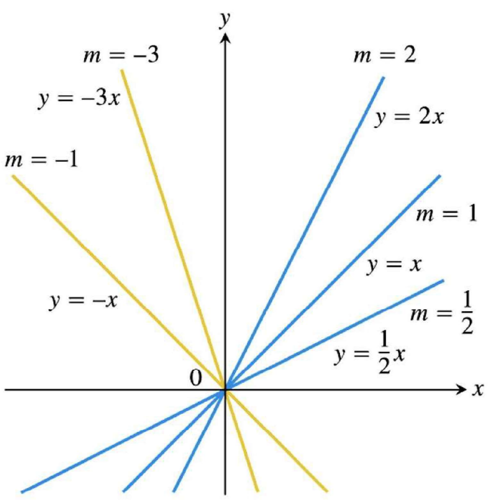
អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ (Linear Functions)

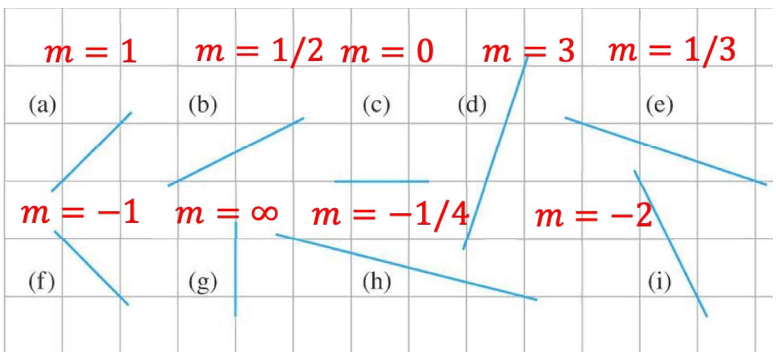
អនុគមន៍លីនេអ៊ែរមានទម្រង់ $f(x) = mx + b$, ដែល m ជាមេគុណប្រាប់ទិស(slope) និង b ជាតម្លៃកាត់អ័ក្សឈរ (y-intercept)

$m = 3, b = -2$



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5





គម្រូលីនេអ៊ែរ (Linear Model)

Example 1

a) នៅពេលខ្យល់ក្តៅផ្លាស់ទីទៅលើ វារីកមាឌ និងចុះត្រជាក់។ បើសីតុណ្ហភាពនៅលើដីរបស់វាស្មើ 20°C និងសីតុណ្ហភាពនៅកម្ពស់ 1km ស្មើ 10°C ចូរសរសេរសីតុណ្ហភាព T (គិតជា °C) ជាអនុគមន៍នៃកម្ពស់ h (គិតជា km) ដោយសន្មត់ថាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរជាគម្រូសមស្រប។

b) សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ ។

c) តើមេគុណប្រាប់តំណាងឱ្យអ្វី?

d) រកសីតុណ្ហភាពខ្យល់នៅកម្ពស់ 2.5 km ។

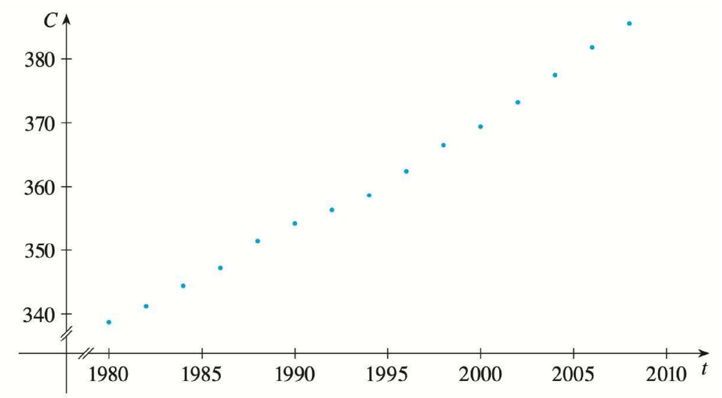
គម្រូលីនេអ៊ែរ (Linear Model)

Example 2

តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីកម្រិតមធ្យមនៃកាបូនឌីអុកស៊ីតនៅក្នុងបរិយាកាសគិតជា ppm នៅបរទូស្នេកម៉ុនជាចាប់ពីឆ្នាំ1980 ដល់ ឆ្នាំ2008។ ប្រើទិន្នន័យក្នុងតារាងដើម្បីរកគម្រូគណិតវិទ្យាតាងឱ្យកម្រិតកាបូនឌីអុកស៊ីត។

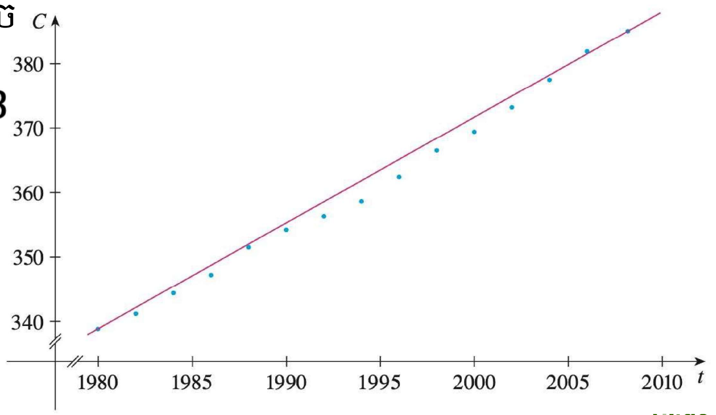
TABLE 1

Year	CO_2 level (in ppm)	Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		



- វិធីសាស្ត្រគកាត់តាមពីរចំណុច

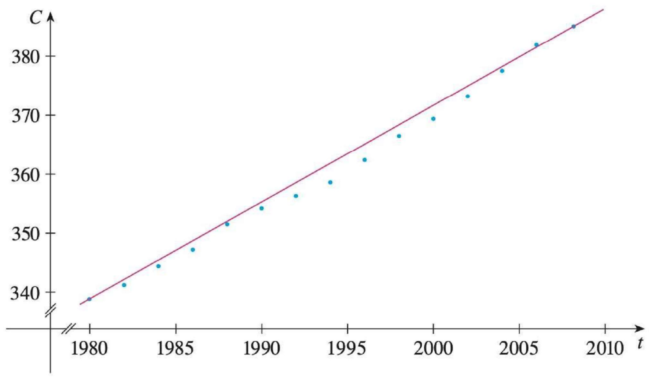
$$C = 1.675t - 2977.8$$



Slide 1 - 17

- វិធីសាស្ត្រគកាត់តាម2ចំណុច

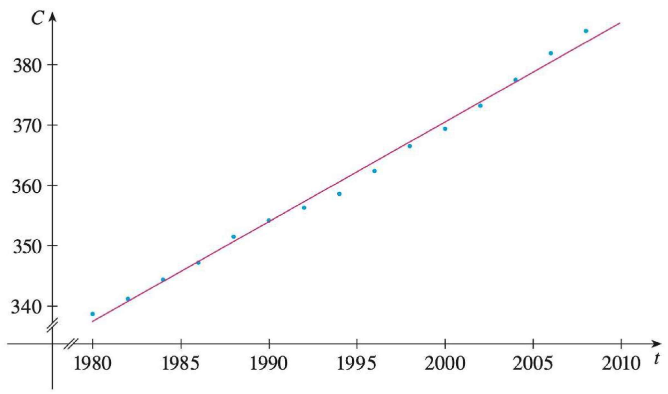
$$C = 1.675t - 2977.8$$



- ឬវិធីសាស្ត្រតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ (Linear Regression)

☞ Mathematica

$$C = 1.65429t - 2938.07$$



Slide 1 - 18

គម្រូលីនេអ៊ែរ (Linear Model)

Example 3 ប្រើគម្រូលីនេអ៊ែរក្នុងឧទាហរណ៍ទី២

a) ដើម្បីប៉ាន់ស្មានកម្រិតមធ្យមនៃCO_2 នាឆ្នាំ1987 ។

b) ដើម្បីព្យាករណ៍កម្រិតមធ្យមនៃCO_2 នាឆ្នាំ2025 ។

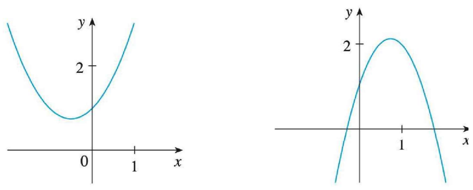
c) តើពេលណាទើបកម្រិតមធ្យមនៃCO_2 ឡើងលើសពី 600 ppm ដែលជាកម្រិតប្រកាសអាសន្ន ?

អនុគមន៍ពហុធា (Polynomial Functions)

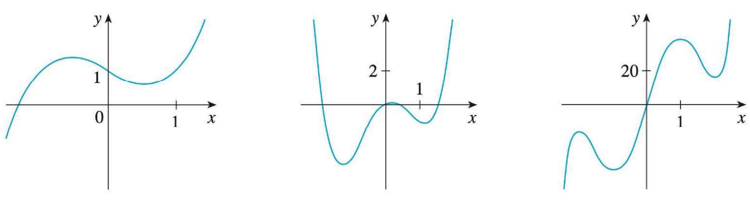
និយមន័យ អនុគមន៍ពហុធា P កំណត់ដោយ

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន និង $a_0, a_1, ..., a_n$ ជាចំនួនថេរហៅថាមេគុណនៃពហុធា P។ បើ $a_n \neq 0$ នោះ n ហៅថាដឺក្រេនៃពហុធា P ។



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$



(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

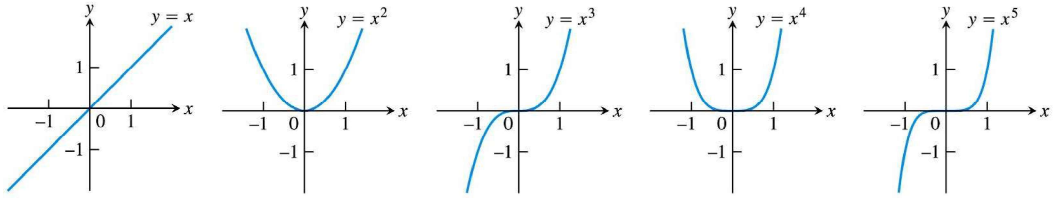
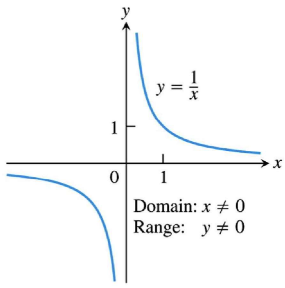
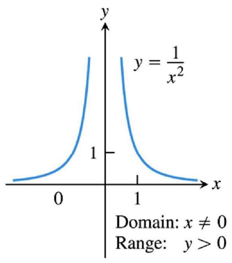


FIGURE 1.36 Graphs of $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ defined for $-\infty < x < \infty$.

អនុគមន៍ស្វ័យគុណ (Power Functions)





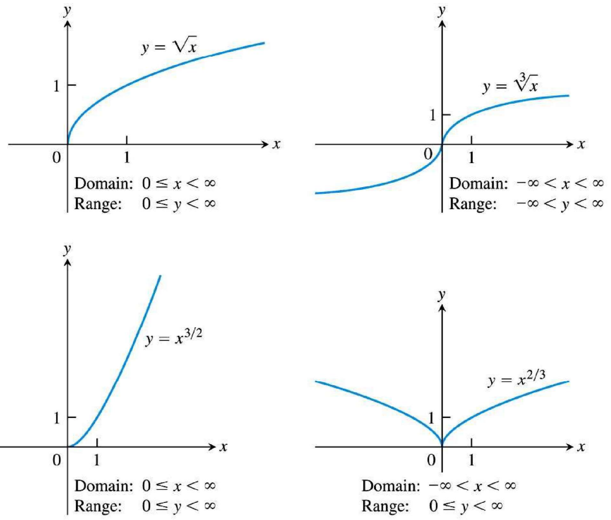


FIGURE 1.38 Graphs of the power functions $f(x) = x^a$ for $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$, and $\frac{2}{3}$.

Slide 1 - 21

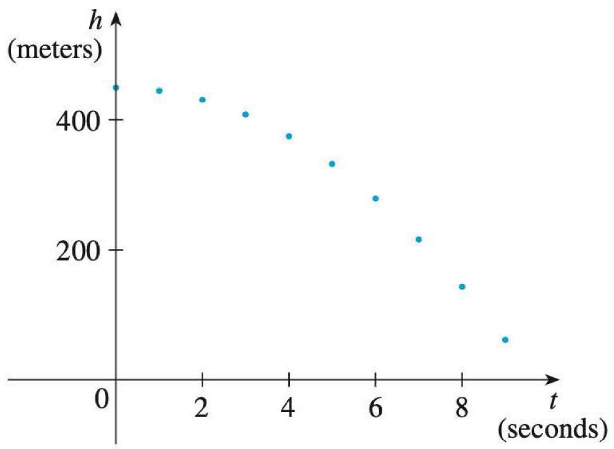
គម្រូមិនលីនេអ៊ែរ (Non-Linear Model)

Example 1

បាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីលើដំបូលអគារដែលមានកម្ពស់ 450 m។ កម្ពស់របស់វាត្រូវបានកត់ត្រារៀងរាល់មួយវិនាទីម្ដងដូចតារាងខាងក្រោម។ រកគម្រូគណិតវិទ្យាតាងកម្ពស់បាល់ (វាពេលវេលាដែលបាល់ធ្លាក់ដល់ដី។

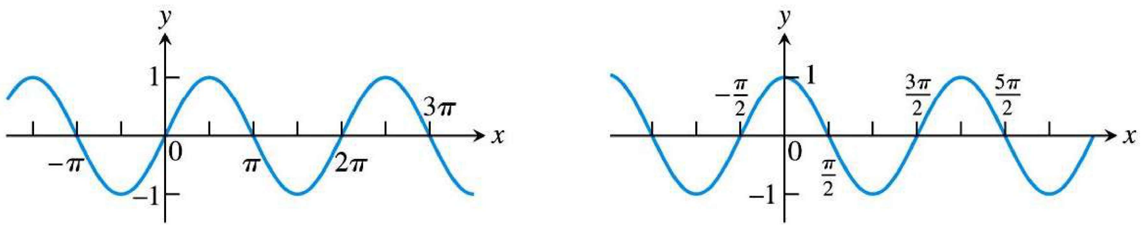
TABLE 2

Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61



Slide 1 - 22

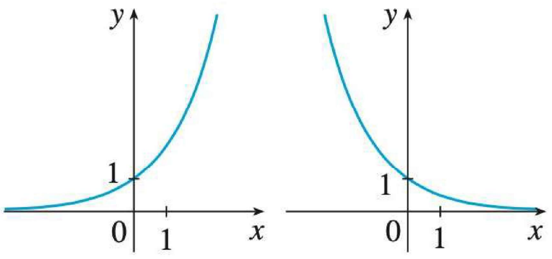
អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (Trigonometric Functions)



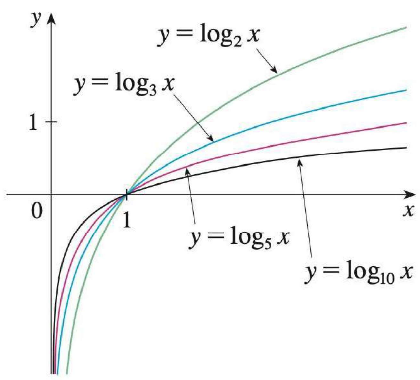
(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$

FIGURE 1.42 Graphs of the sine and cosine functions.

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត (Exponential and Logarithmic Functions)

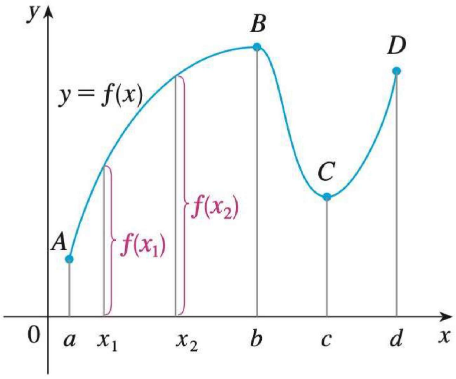


(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

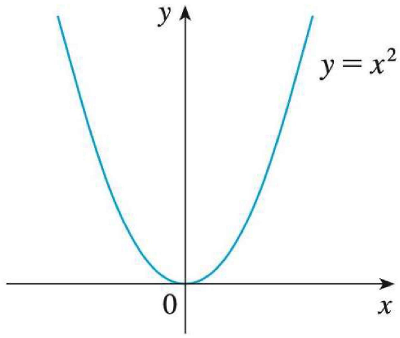


អនុគមន៍កើន និងចុះ (Increasing and Decreasing Functions)

និយមន័យ អនុគមន៍ f ហៅថាអនុគមន៍កើន(ចុះ)លើចន្លោះ I មួយបើ
$f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) នៅពេលណា $x_1 < x_2$ នៅក្នុង I ។



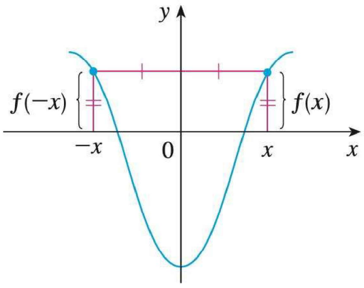
តាមក្រាបខាងលើ អនុគមន៍
- កើនលើចន្លោះ $[a, b]$
- ចុះលើចន្លោះ $[b, c]$ និង
- កើនលើចន្លោះ $[c, d]$

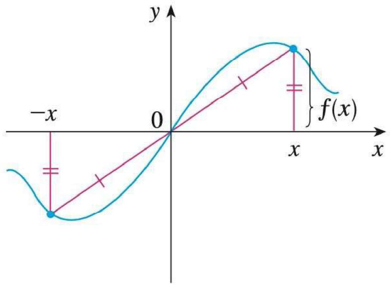


អនុគមន៍ $f(x) = x^2$
- ចុះលើចន្លោះ $(-\infty, 0]$ និង
- កើនលើចន្លោះ $[0, \infty)$

អនុគមន៍គូ និងសេស (Even and Odd Functions)

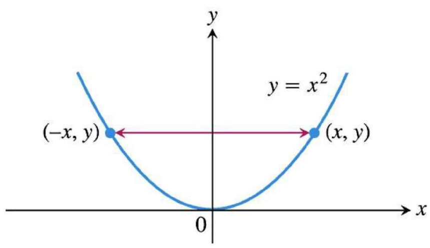
និយមន័យ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូ បើ $f(-x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$។
ហើយ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស បើ $f(-x) = -f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$។

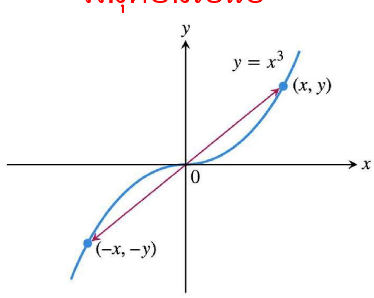




អនុគមន៍គូ

អនុគមន៍សេស

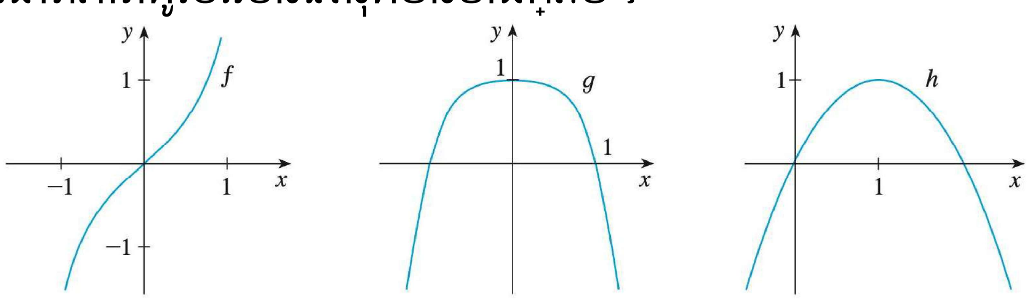




អនុគមន៍គូ និងសេស (Even and Odd Functions)

លំហាត់

កំណត់ភាពគូសសេននៃអនុគមន៍ខាងក្រោម។



(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

ជំពូកទី ២

លីមីត និងដេរីវេ
(Limit and Derivative)

បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង និងអត្រាបម្រែបម្រួល
(Tangents to Curves and Rates of Change)

ការកំណត់បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង

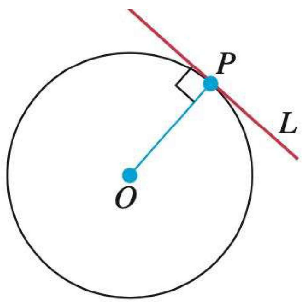


Figure 1: L

ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់បើវាកាត់ចំណុច

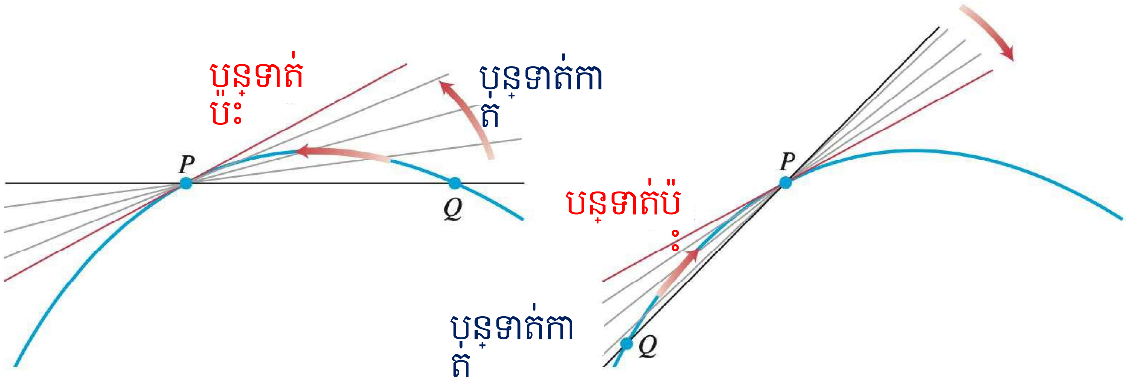
P និងកកែងនឹងកាំ OP

ដេរីវេ (Derivatives)

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងចំណុច $P(x_0, f(x_0))$ ។

នៅពេល $Q \to P$, បន្ទាត់ $PQ \to$ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P គេថា បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ជាលីមីតនៃបន្ទាត់ PQ

គេសរសេរ $\lim\limits_{Q \to P}$ បន្ទាត់ $PQ =$ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P



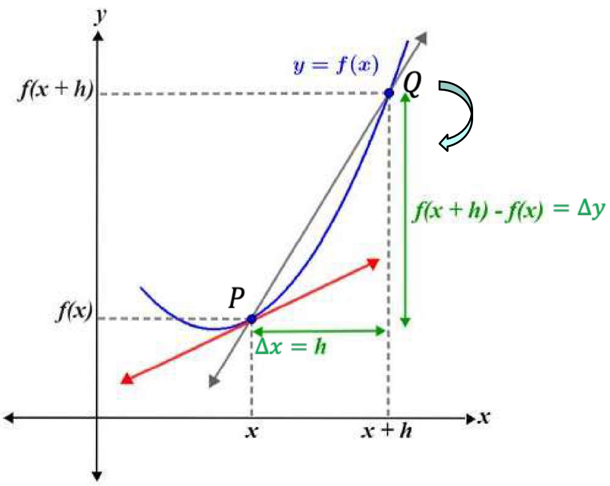
Slide 2 - 3

ដេរីវេ (Derivatives)

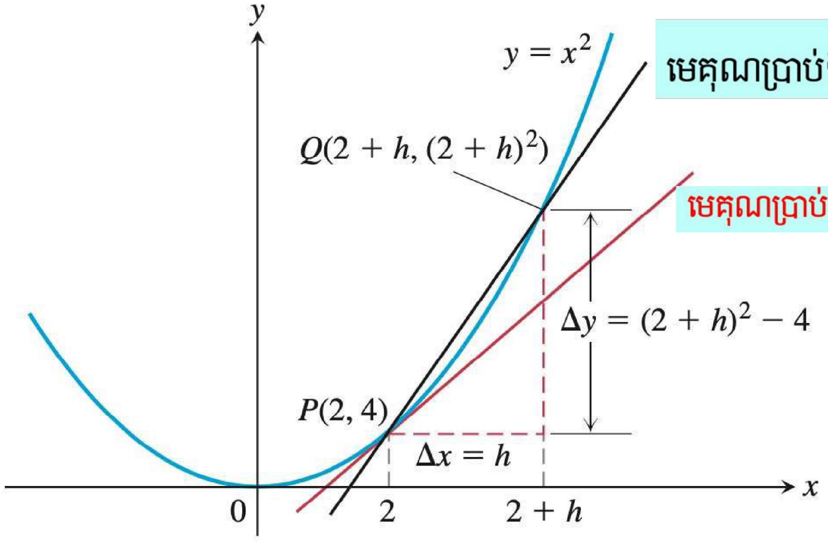
គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងចំណុច $P(x, f(x))$ ។

$\lim\limits_{Q \to P}$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ $PQ =$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $P = f'(x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ឬ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ ហៅថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$



Slide 2 - 4



មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់$PQ = h + 4$

មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $P = 4$

$f'(2) = 4$

$f'(x) = ?$

មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់PQ $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

ចម្ងាយចរ y (km) នៃរថយន្តមួយប្រែប្រួលតាមទំនាក់ទំនង $y = 16t^2$

ដែល t (h) ជាខណៈពេល

TABLE 2.1 ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេលខ្លី

ល្បឿនមធ្យម : $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}$

ប្រវែងចន្លោះពេល h	ល្បឿនមធ្យមនៅលើចន្លោះពេលចាប់ផ្ដើមនៅត្រង់ $t_0 = 1$	ល្បឿនមធ្យមនៅលើពេលចាប់ផ្ដើមនៅត្រង់ $t_0 = 2$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016
↓ 0	↓ 32 =	↓ 64 =

និយមន័យ: អត្រាប្រែប្រួលមធ្យមនៃ $y = f(x)$ ធៀបនឹង x នៅលើចន្លោះ $[x_1, x_2]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_1)$ **អត្រាប្រែប្រួលខណៈ**នៃ y ធៀបនឹង x នៅត្រង់ x_1

អត្រាប្រែប្រួល

- ល្បឿន
- អត្រាលូតលាស់
- អត្រាការប្រាក់...

Slide 2 - 7

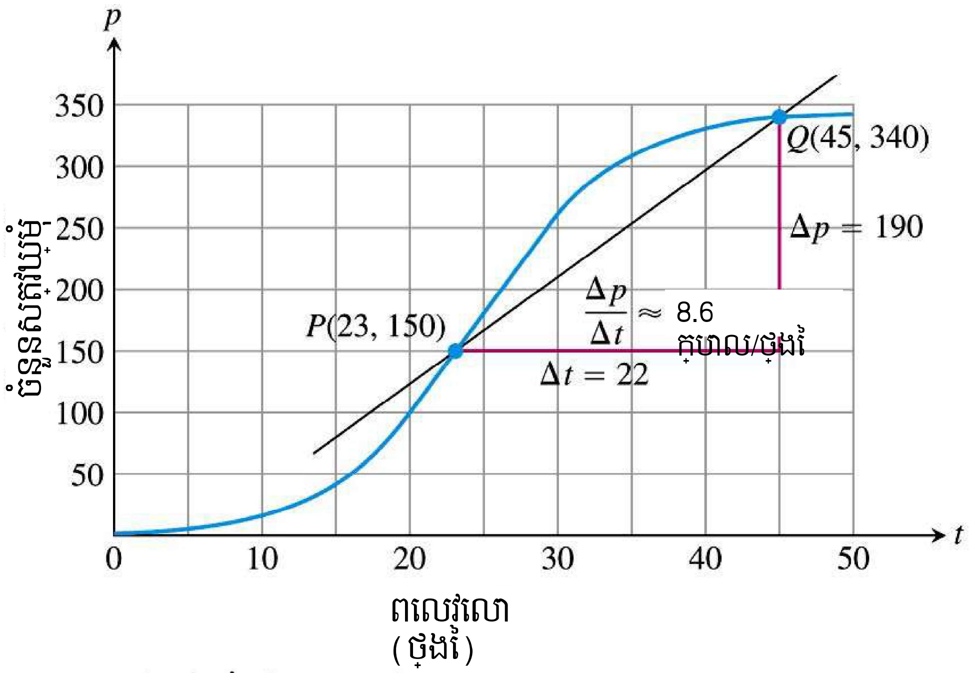


Figure 2: កំណើននៃចំនួនសត្វឃ្មុំនៅក្នុងការពិសោធមួយ។
អត្រាប្រែប្រួលមធ្យមនៃចំនួនសត្វឃ្មុំក្នុងរយៈពេល22ថ្ងៃគឺជាមេគុណប្រាប់ទិស $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ នៃបន្ទាត់PQ

Slide 2 - 8

Q	មេគុណប្រាប់ទិស នៃបន្ទាត់PQ $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ (ក្បាល/ថ្ងៃ)
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$

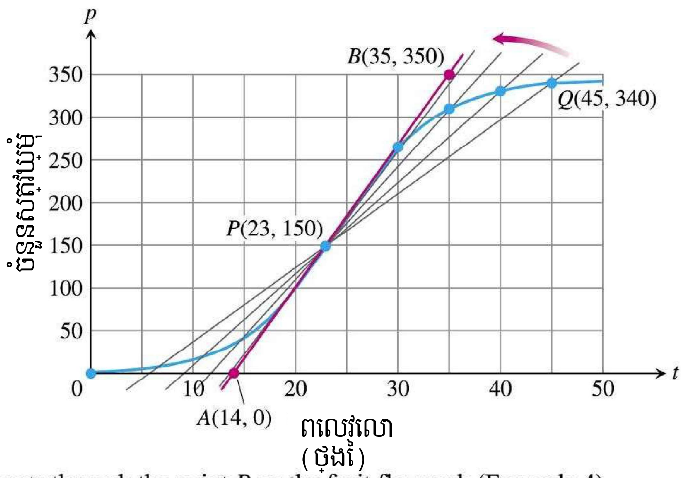
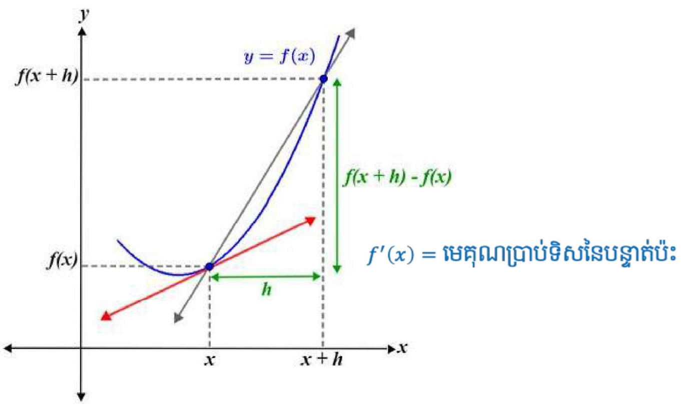


FIGURE 2.3 The positions and slopes of four secants through the point P on the fruit fly graph (Example 4).

សង្ខេបនៃដេរីវេ
(Summary of Derivatives)

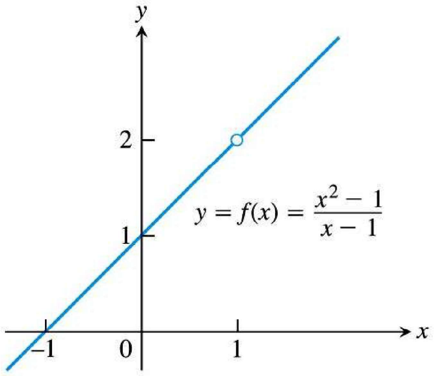
អត្ថន័យ	ដេរីវេ
បែបធរណីមាត្រ	មេគុណប្រាប់ទិស ភាពចោត
បែបរូប	អត្រាបម្រែបម្រួល



លីមីតនៃអនុគមន៍
(Limits of a Function)

តម្លៃនៃ x នៅជិត 1	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001
↓	↓
1	2

Slide 2 - 11



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

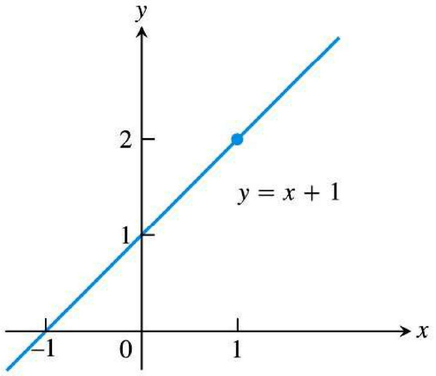
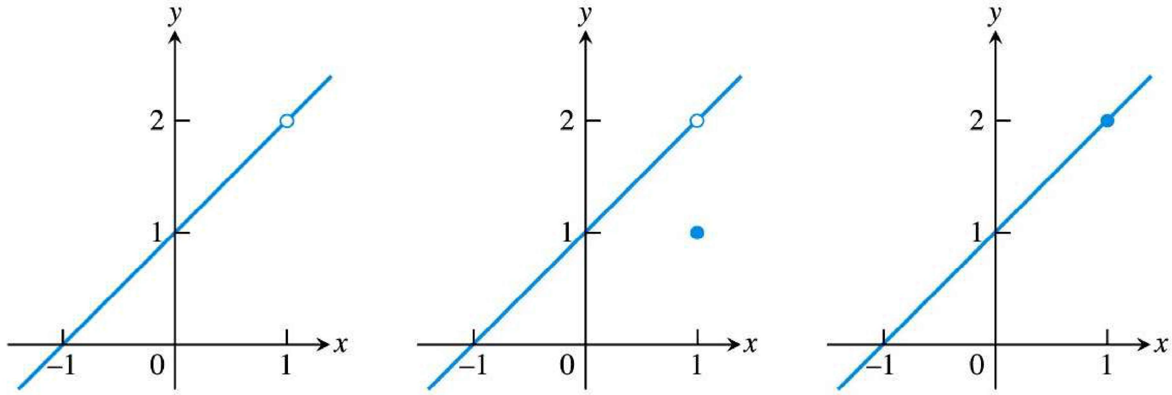


Figure 2: ក្រាបនៃ f ដូចនឹង
ក្រាបនៃបន្ទាត់ $y = x + 1$
លើកលែងត្រង់ $x = 1$ ដែល f មិនកំណត់

Slide 2 - 12



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$ $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1)$

⇑ លីមីតមិនងាយ ⇑ លីមីតមិនងាយ ⇑ លីមីតងាយ

Slide 2 - 13

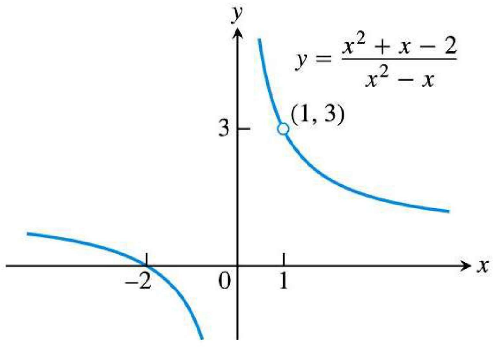
THEOREM 2 លីមីតនៃអនុគមន៍ពហុធាជាលីមីតងាយ

If $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, then

$$\lim_{x \to c} P(x) \underset{\uparrow}{=} P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

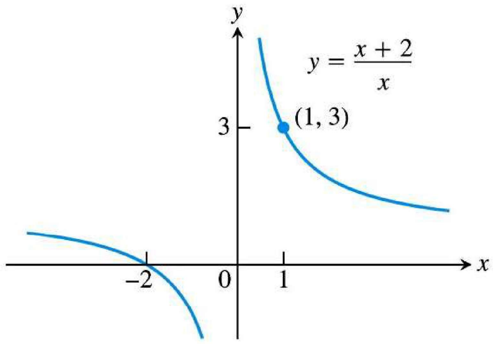
លីមីតងាយ

Slide 2 - 14



(a)

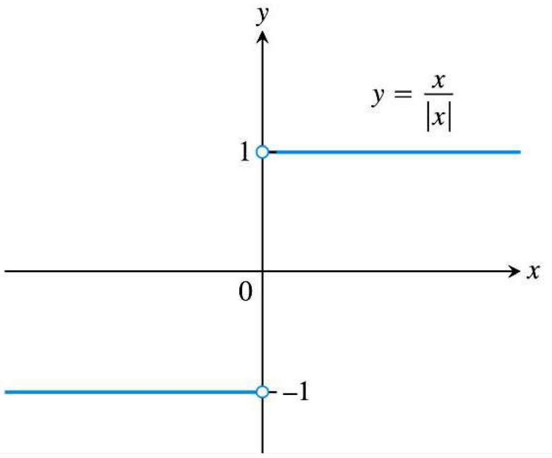
- $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$
- $f(1)$ មិនកំណត់
- ជាលីមីតមិនងាយ
- ក្រាបដាច់ត្រង់ $x = 1$



(b)

- $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$
- $g(1) = 3$
- ជាលីមីតងាយ
- ក្រាបជាប់ត្រង់ $x = 1$

លីមីតឆ្វេង-ស្តាំ
(One-Sided Limits)



- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$ មិនកំណត់ ឬ f គ្មានលីមីតពេល $x \to 0$

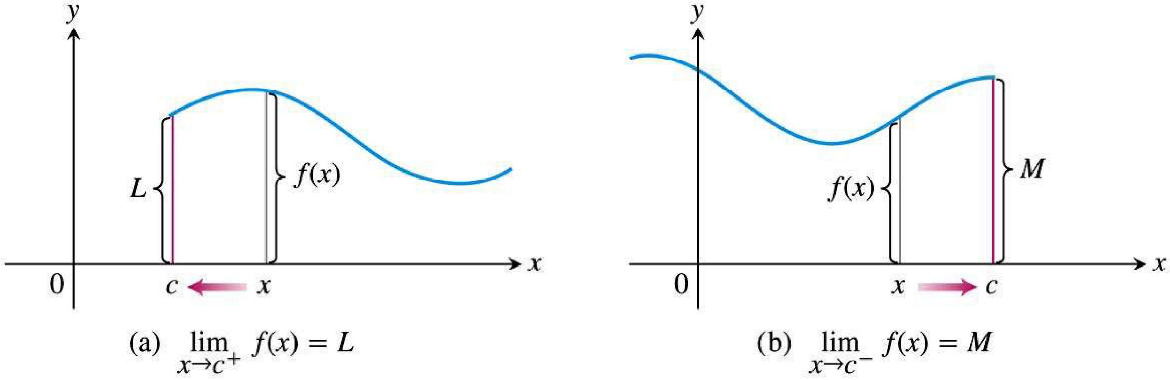


FIGURE 2.22 (a) Right-hand limit as x approaches c. (b) Left-hand limit as x approaches c.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$ មិនកំណត់
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$

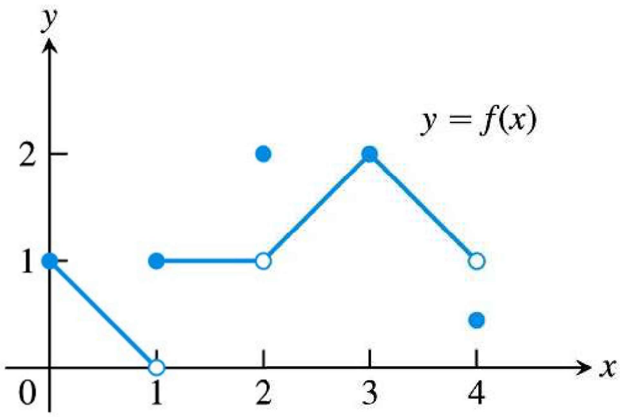


FIGURE 2.24 Graph of the function in Example 2.

THEOREM 6

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីតពេល $x \to c$ លុះត្រាតែលីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំស្មើគ្នា

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{និង} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ in radians})$$

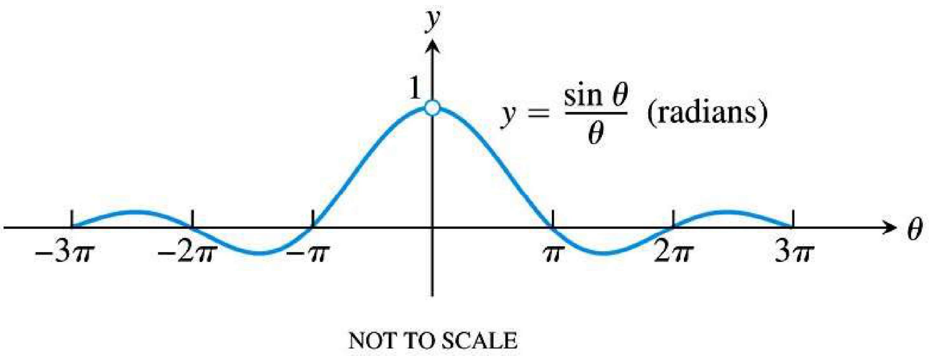


FIGURE 2.29 The graph of $f(\theta) = (\sin \theta)/\theta$.

នៅពេល x ធំទៅៗឬ $f(x) = 1/x$ ខិតទៅរក 0

ឬ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

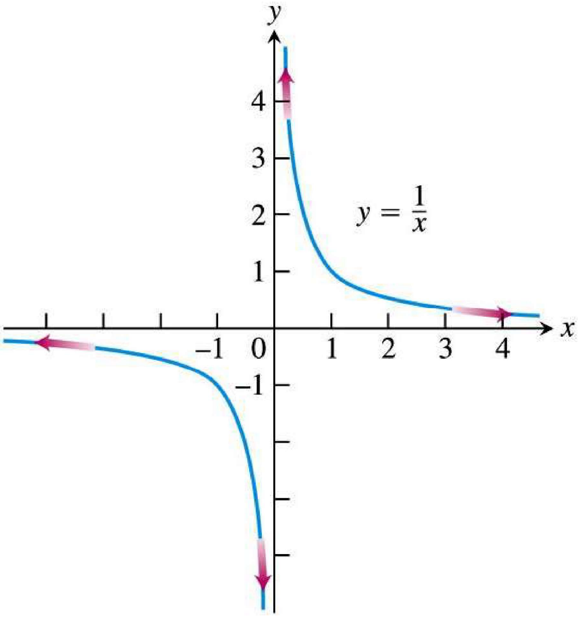


FIGURE 2.31 The graph of $y = 1/x$.

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ (Continuity)

Continuity Test

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x = c$ លុះត្រាតែល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

1. $f(c)$ កំណត់ (c lies in the domain of f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ កំណត់ (f has a limit as $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (the limit equals the function value)

f ជាប់ត្រង់ $x = c \Leftrightarrow f$ មានលីមីតងាយត្រង់ $x = c$

ឬ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

ជំពូកទី ៣

ការគណនាដេរីវេ
(Differentiation)

អនុគមន៍ដេរីវេ (Derivative Functions)

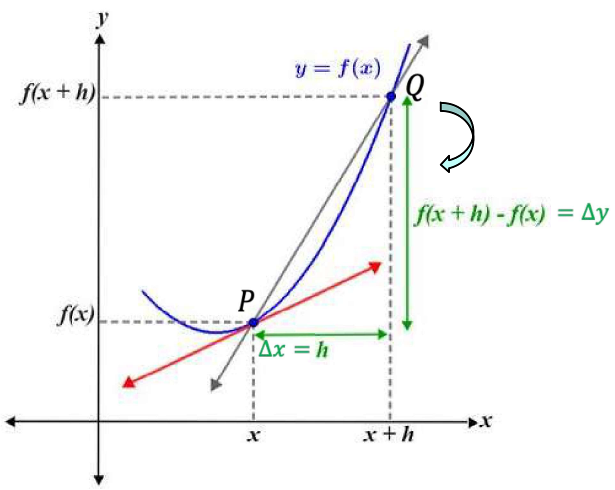
ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ធៀបនឹង x កំណត់ដោយ

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ឬ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ បើលីមីតនេះមានអត្ថិភាព។

$f'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ $y = f(x)$។

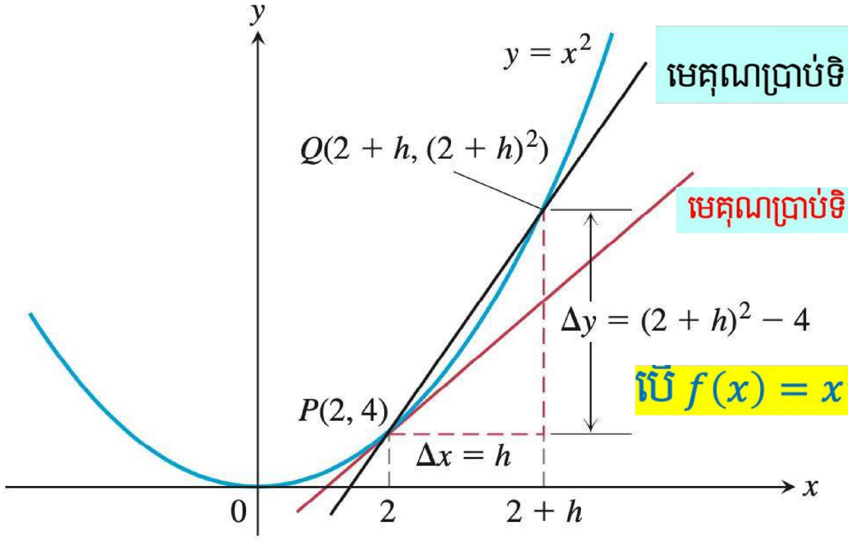
គេកំណត់សរសេរដេរីវេបានច្រើនរបៀប $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$



និមិត្តសញ្ញា Newton: $f'(x)$

និមិត្តសញ្ញា Leibniz: $\frac{dy}{dx}$



មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់$PQ = h + 4$

មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $P = 4$

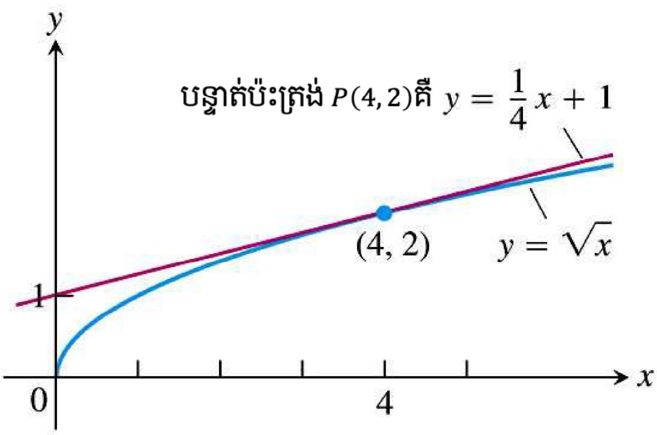
$f'(2) = 4$

បើ $f(x) = x^2$ នោះ $f'(x) = 2x$

មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់PQ $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Slide 2 - 3



$f'(4) = 1/4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

បើ $f(x) = \sqrt{x}$ នោះ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Slide 2 - 4

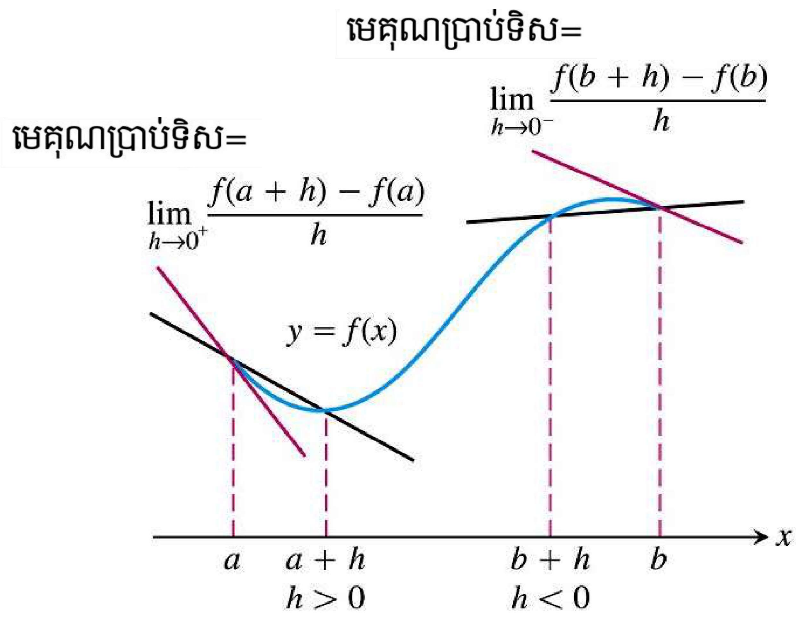
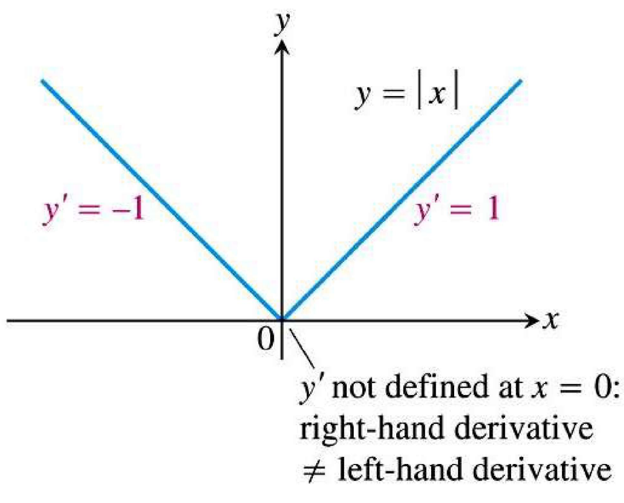


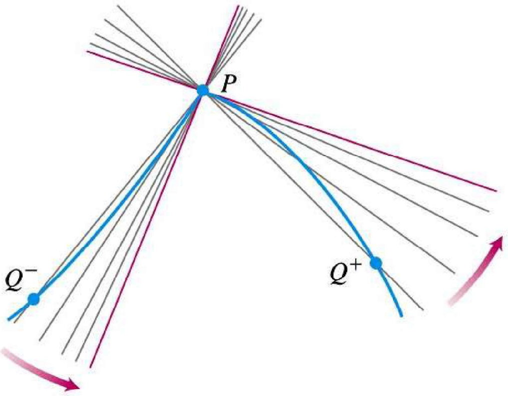
FIGURE 3.5 ដេរីវេឆ្វេង និងដេរីវេស្តាំ

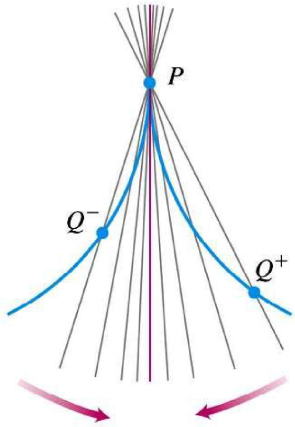


អនុគមន៍ $f(x) = |x|$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច (0, 0)
ព្រោះលីមីតឆ្វេងស្តាំខុសគ្នា

- លីមីតឆ្វេងស្តាំខុសគ្នា នោះគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច P
- គ្មានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P
- ខ្សែកោងអត់រលោងត្រង់ចំណុច P

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃPQខិតទៅ ∞ ពីខាងឆ្វេង និងខិតទៅ −∞ ពីខាងស្តាំ
- បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P ជាបន្ទាត់ឈរ
- ខ្សែកោងអត់រលោងត្រង់ចំណុច P

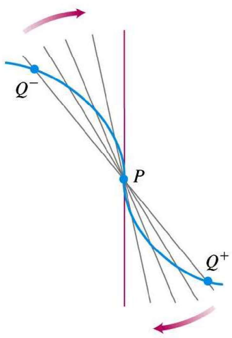




ខ្សែកោងរលោងត្រង់ចំណុច P ⇔ អនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ចំណុច P

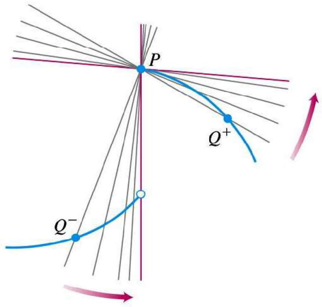
Slide 2 - 7

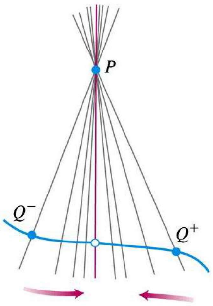
បើបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច P ជាបន្ទាត់ឈរ នោះអនុគមន៍គ្មានដេរីវេត្រង់ P



បើអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុច P នោះគ្មានដេរីវេត្រង់ P

បើអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ចំណុច P នោះវាជាប់ត្រង់ P

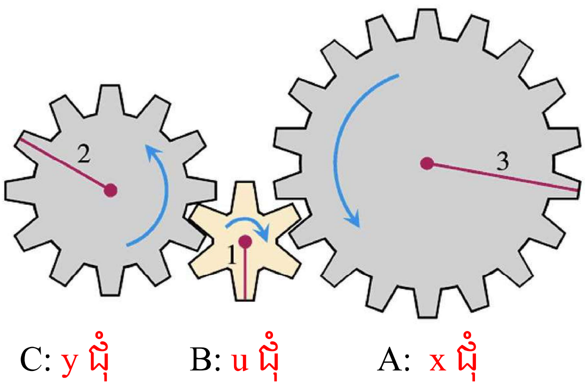




Slide 2 - 8

វិធានច្រវ៉ាក់

(Chain Rule)

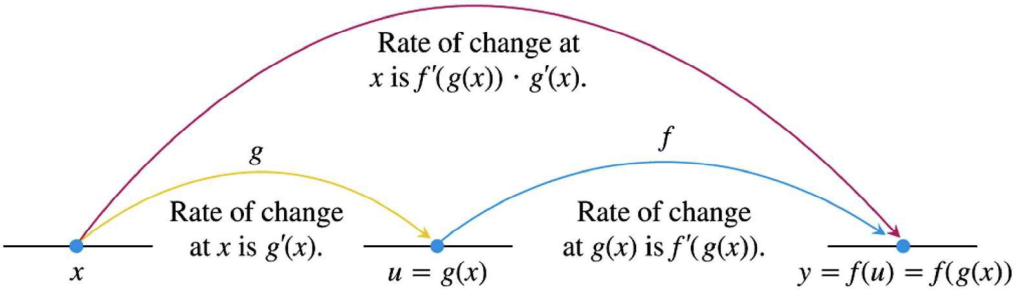


$$\frac{dy}{du} = 1/2 \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{3/2}$$

វិធានច្រវ៉ាក់

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$



និមិត្តសញ្ញា Leibniz

និមិត្តសញ្ញាNewton

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \Longleftrightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ដេរីវេអាំងភ្លីស៊ីត

(Implicit Derivatives)

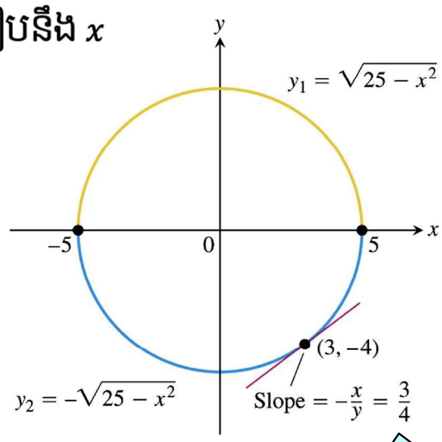
រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃរង្វង់ $x^2 + y^2 = 25$ ត្រង់ចំណុច $P(3, -4)$

ធ្វើដេរីវេអង្គសងខាងនៃសមីការ $x^2 + y^2 = 25$ ធៀបនឹង x

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

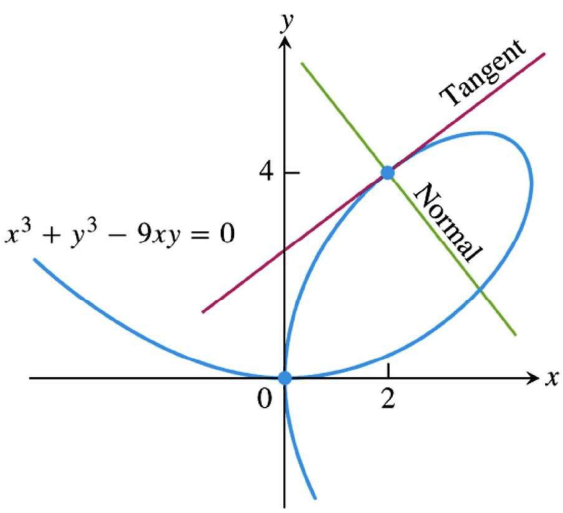
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$



នៅត្រង់ចំណុច $P(3, -4)$ $\quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ត្រង់ចំណុច $P(2, 4)$

រកសមីការបន្ទាត់កែងនឹងខ្សែកោង $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ត្រង់ចំណុច $P(2, 4)$



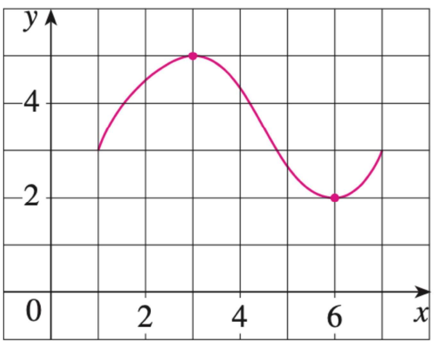
ជំពូកទី ៤

ការអនុវត្តដេរីវេ
(Applications of Derivatives)

តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍
(Extreme Values of Functions)

ការអនុវត្តមួយក្នុងចំណោមសំខាន់ៗនៃដេរីវេគឺ**ចំណោទបរមា (Optimization Problems)** ដែលរកពីរបៀបល្អបំផុតក្នុងការធ្វើអ្វីមួយ

- រូបរាងនៃកំប៉ុងដែលចំណាយថ្លៃផលិតតិចបំផុត
- សំទុះលឿនបំផុតនៃយានអវកាស
- រូបរាងនៃអាងទឹកដែលផ្ទុកទឹកច្រើនបំផុត

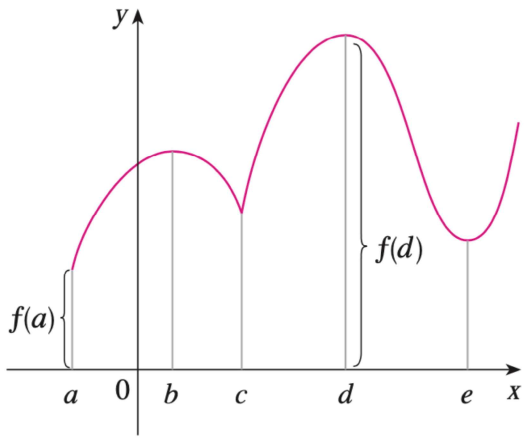


តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍

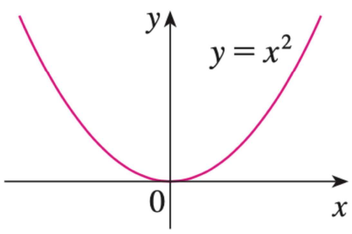
និយមន័យ តាង f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D។ នោះ f មានតម្លៃ

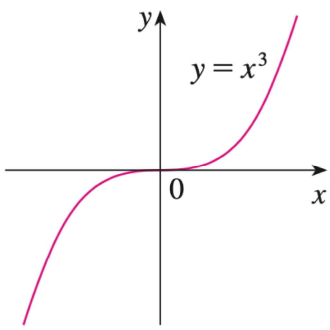
- អតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ចំណុច c បើ $f(c) \geq f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x \in D$។
- អប្បរមាដាច់ខាតត្រង់ចំណុច c បើ $f(c) \leq f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x \in D$។
- អតិបរមាធៀបត្រង់ចំណុច c បើ $f(c) \geq f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅជិតៗ c។
- អប្បរមាធៀបត្រង់ចំណុច c បើ $f(c) \leq f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅជិតៗ c ។

- អតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x = d$
- អប្បរមាដាច់ខាតត្រង់ $x = a$
- អតិបរមាធៀបត្រង់ $x = b$ និង d
- អប្បរមាធៀបត្រង់ $x = c$ និង e



Slide 2 - 3

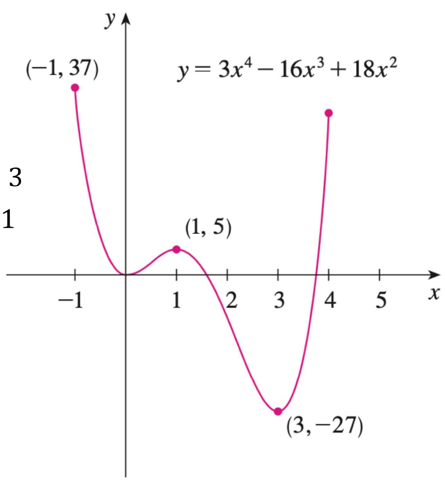




- គ្មានតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត
- គ្មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត

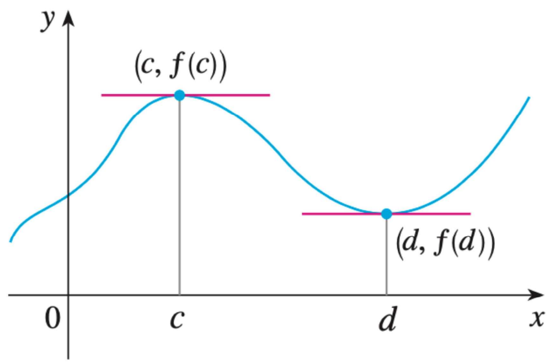
- អប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ $x = 0$
- គ្មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត

- អប្បបរមាដាច់ខាតស្មើ -27 ត្រង់ $x = 3$
- អតិបរមាដាច់ខាតស្មើ 37 ត្រង់ $x = -1$
- អប្បបរមាធៀបស្មើ -27 ត្រង់ $x = 3$
- អតិបរមាធៀបស្មើ 5 ត្រង់ $x = 1$



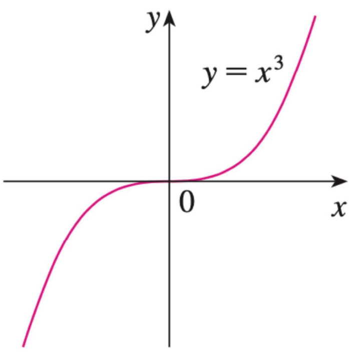
Slide 2 - 4

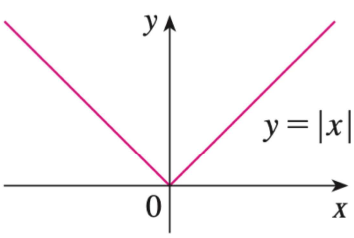
ទ្រឹស្តីបទ បើ f មានតម្លៃបរមាធៀបត្រង់ c និង $f'(c)$ កំណត់ នោះ $f'(c) = 0$



ទ្រឹស្តីបទ បើ f មានតម្លៃបរមាធៀបត្រង់ c និង $f'(c)$ កំណត់ នោះ $f'(c) = 0$

ចុះច្រាសមកវិញ? ឬចុះបើ $f'(c)$ មិនកំណត់ ?





និយមន័យ c ជាតម្លៃពិសេស (critical number) នៃអនុគមន៍ f បើ $f'(c) = 0$ ឬ $f'(c)$ មិនកំណត់

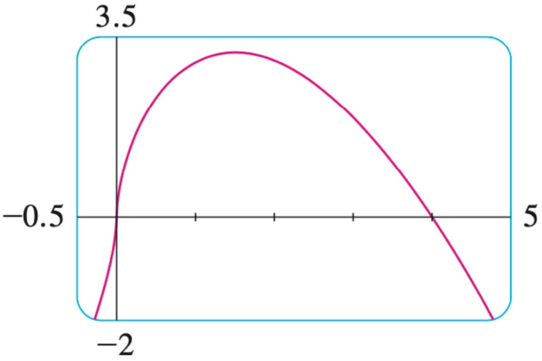
Example រកតម្លៃពិសេស (critical number) នៃអនុគមន៍ $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

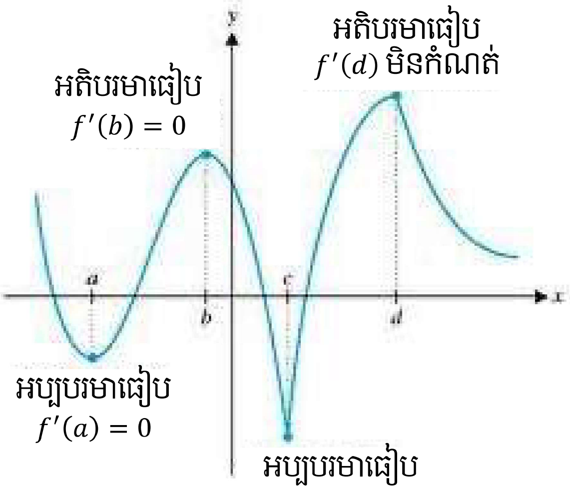
$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

តម្លៃពិសេស

- $x = \frac{3}{2}$ ព្រោះ $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
- $x = 0$ ព្រោះ $f'(0)$ មិនកំណត់



ទ្រឹស្តីបទ បើ f មានតម្លៃបរមាធៀបត្រង់ c នោះ c ជាតម្លៃពិសេស



វិធាន របៀបរក**តម្លៃបរមាដាច់ខាត**នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $[a, b]$

1) រកតម្លៃនៃ f ត្រង់តម្លៃពិសេស
2) រកតម្លៃនៃ f ត្រង់តម្លៃចុងដែន a និង b
3) តម្លៃធំបំផុតជាតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងតម្លៃតូចបំផុតជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត

Example រកតម្លៃបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,\ -\frac{1}{2} \le x \le 4$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

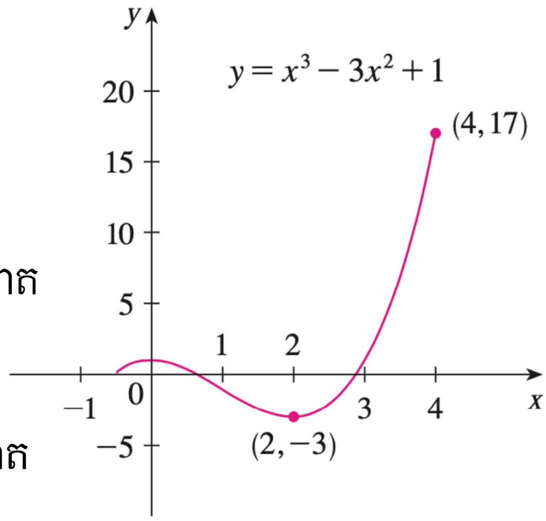
តម្លៃពិសេស $x = 0$ និង 2

$f(0) = 1$

$f(2) = -3$ ⇒តម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

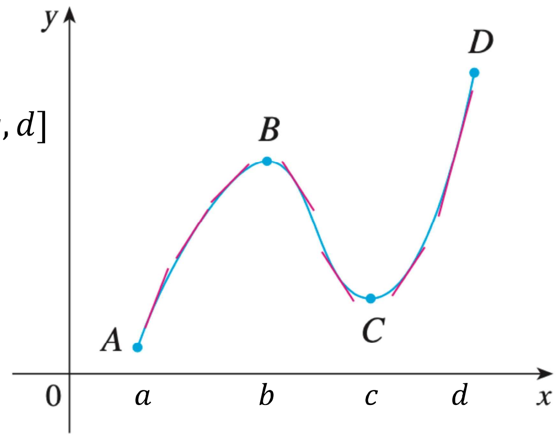
$f(4) = 17$ ⇒តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត

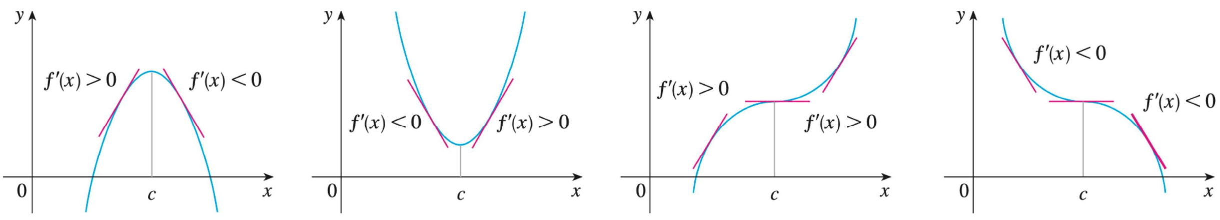


តេស្តភាពកើនចុះ

- បើ $f'(x) > 0$ លើចន្លោះ $[a, b]$ នោះ f កើនលើចន្លោះ $[a, b]$
- បើ $f'(x) < 0$ លើចន្លោះ $[a, b]$ នោះ f ចុះលើចន្លោះ $[a, b]$

- f កើនលើចន្លោះ $[a, b]$ និង $[c, d]$
- f ចុះលើចន្លោះ $[b, c]$



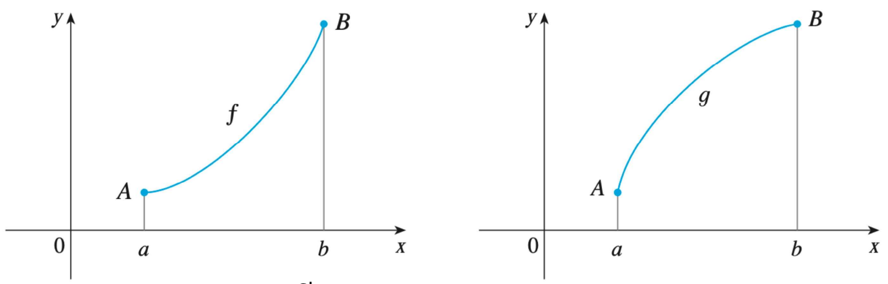


(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

តេស្តដេរីវេទី១

- បើ f' ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ c នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ f' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ c នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ c

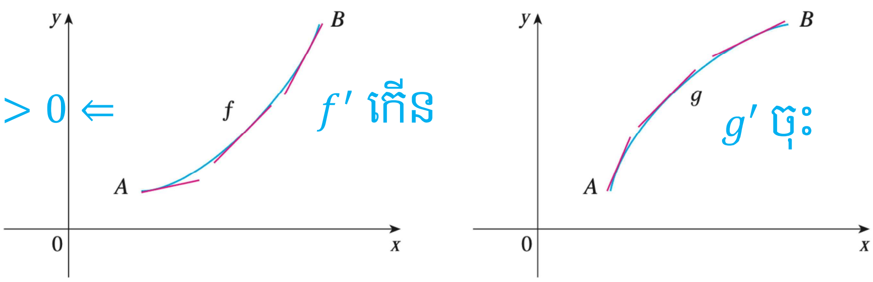
ភាពផត (Concavity)



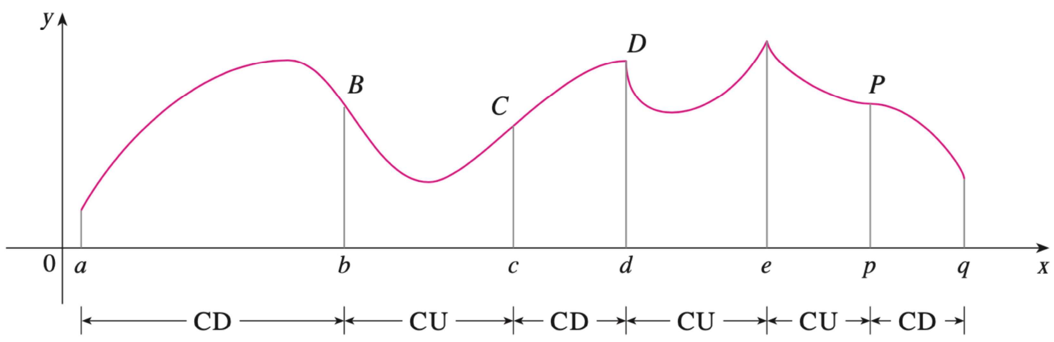
(a) ផតលើ (b) ផតក្រោម

$f'' > 0 \Leftarrow$ f' កើន

g' ចុះ $\Rightarrow g'' < 0$

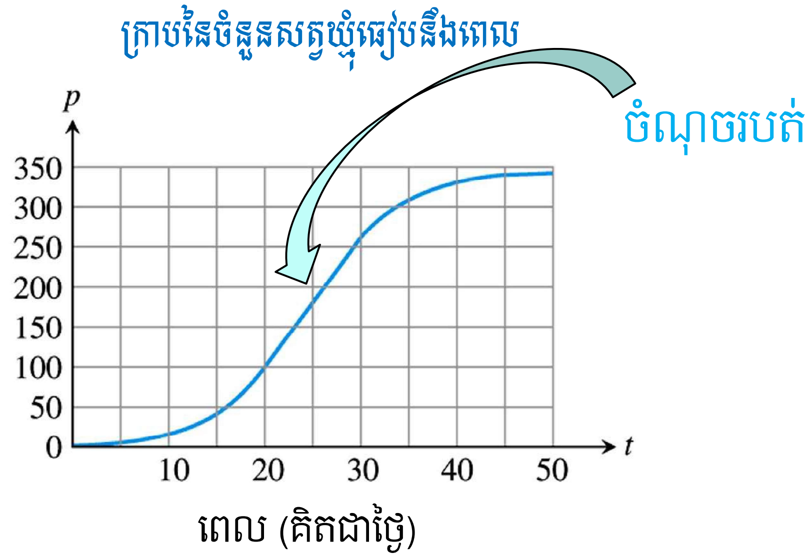


(a) Concave upward (b) Concave downward



និយមន័យ P ហៅថាចំណុចរបត់ (inflection point) នៃខ្សែកោង $y = f(x)$ បើខ្សែកោងប្តូរភាពផតត្រង់ចំណុចនោះ។

- B, C, D និង P ក្នុងរូបខាងលើជាចំណុចរបត់



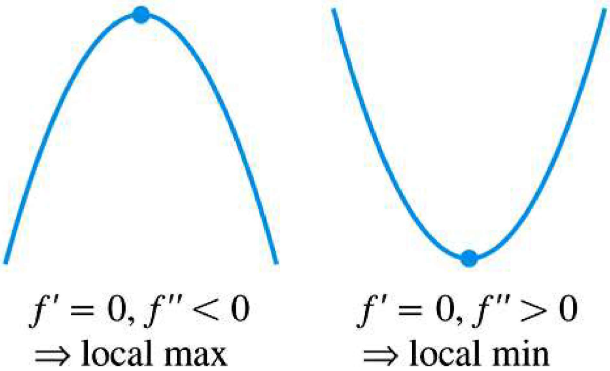
$P(25, 180)$ ជាចំណុចរបត់ $\Rightarrow$ នៅថ្ងៃទី25 អត្រាកំណើតនៃសត្វឃ្មុំខ្ពស់បំផុត

- បើ f'' ប្តូរសញ្ញាត្រង់ c នោះ f មានចំណុចរបត់ត្រង់ c

ទ្រឹស្តីបទ បើ f មានចំណុចរបត់ត្រង់ c នោះ $f''(c) = 0$ ឬ $f''(c)$ មិនកំណត់

តេស្តដេរីវេទី២

- បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c) > 0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c
- បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c) < 0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c



Example សិក្សា និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 4x^3$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

- តម្លៃពិសេស $x = 0$ និង 3

$f''(0) = 0$ និង $f''(3) = 36 > 0$

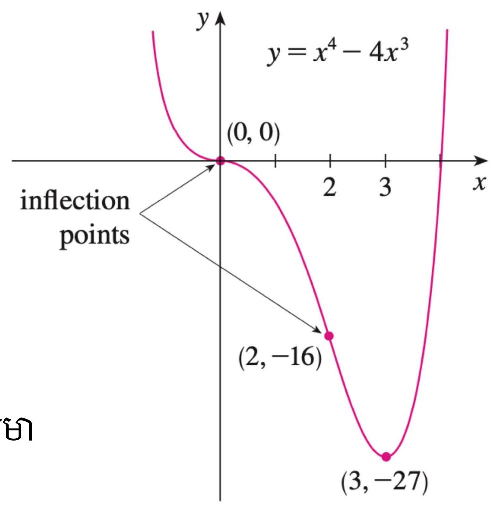
$f''(3) = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ តម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត

$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow$ តេស្តដេរីវេទី២មិនអាចប្រាប់ពីតម្លៃបរមា

$f'(0) < 0$ ចំពោះ $x < 0$ និង $0 < x < 3$

$\Rightarrow$ គ្មានតម្លៃបរមាតាមតេស្តដេរីវេទី១

- $f''(0) = 0$ នៅពេល $x = 0$ ឬ $x = 2$

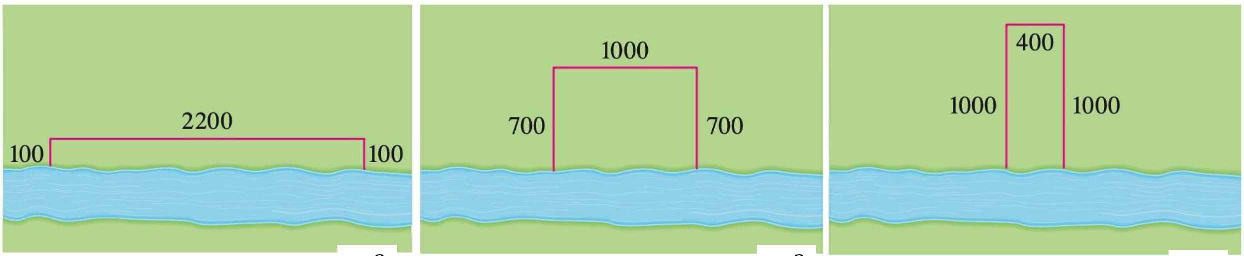


Interval	$f''(x) = 12x(x-2)$	ភាពផត
$(-\infty, 0)$	$+$	ផតលើ
$(0, 2)$	$-$	ផតក្រោម
$(2, \infty)$	$+$	ផតលើ

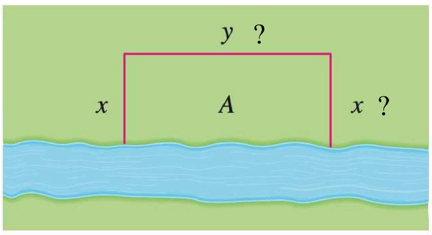
Exercise សិក្សា និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

ចំណោទបរមា
(Optimization Problems)

Example កសិករម្នាក់ប្រើខ្សែប្រវែង 2400 m ដើម្បីព័ទ្ធដីចម្ការរាងចតុកោណកែងដែលមានព្រំខាងក្រោយជាប់ទន្លេ។ គាត់មិនប្រើខ្សែព័ទ្ធផ្នែកជាប់ទន្លេទេ។ រកវិមាត្រដីចម្ការដែលធ្វើឱ្យមានក្រឡាផ្ទៃធំបំផុត។

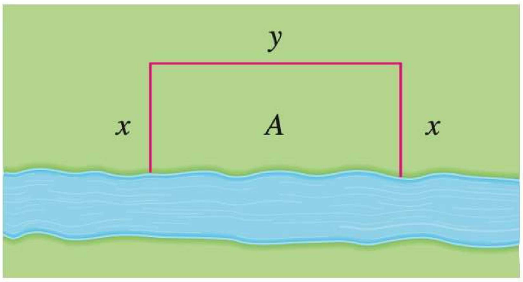


Area = 100 · 2200 = 220,000 m^2 Area = 700 · 1000 = 700,000 m^2 Area = 1000 · 400 = 400,000 m^2



ចំណោទបរមា

Answer តាង x និង y ជាបណ្តោយ និងទទឹងនៃដីចម្ការគិតជា m ។



នោះគេបានក្រឡាផ្ទៃ $A = xy$ ។

តាមបម្រាប់ $2x + y = 2400$

គេបាន $y = 2400 - 2x$

នោះ $A(x) = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$

អនុគមន៍ដែលត្រូវរកតម្លៃអតិបរមាគឺ $A(x) = 2400x - 2x^2$ ដែល $0 < x < 1200$

នោះដេរីវេ $A'(x) = 2400 - 4x$

ចំណុចសំខាន់គឺតម្លៃ x ដែល $A'(x) = 0$ ឬ $2400 - 4x = 0$ ឬ $x = 600$

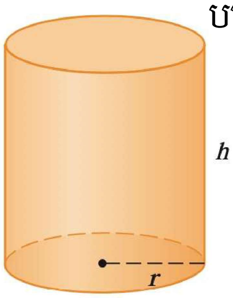
នោះគេបាន $A(0) = 0, A(600) = 720000$, $A(1200) = 0$

ដូច្នេះ ដីចម្ការត្រូវមានជម្រៅ $600\ m$, និងទទឹង $1200\ m$ ។

Slide 2 - 19

ចំណោទបរមា

Example គេចង់ធ្វើកំប៉ុងរាងស៊ីឡាំងដែលអាចផ្ទុកចំណុះបាន 1 L ។ រកវិមាត្រដែលធ្វើឱ្យតម្លៃផលិតទាបបំផុត។



គេបានក្រឡាផ្ទៃ $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$។

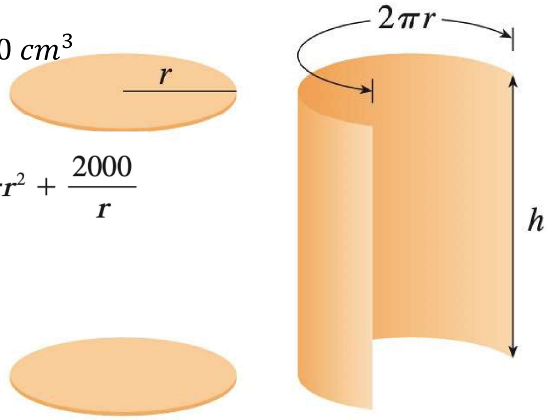
បម្រាប់: មាឌកំប៉ុង $V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$

$\Rightarrow h = 1000/\pi r^2$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$



Area $2(\pi r^2)$ Area $(2\pi r)h$

រកតម្លៃ x ដែល $A'(r) = 0$ ឬ $r = \sqrt[3]{500/\pi}$

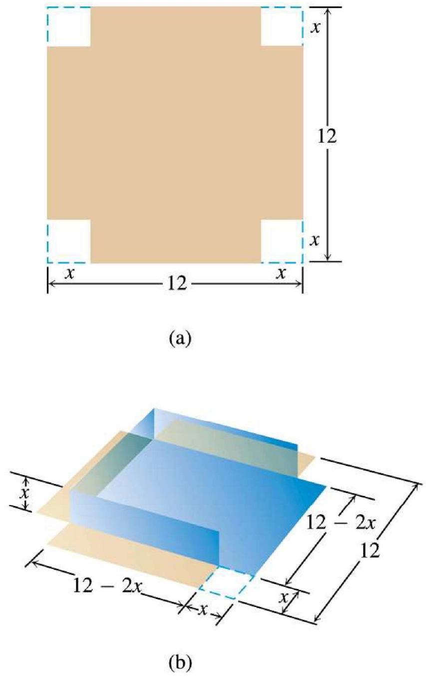
គេបាន $$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

ដូច្នេះ ដើម្បីឱ្យតម្លៃផលិតទាបបំផុត $r = \sqrt[3]{500/\pi}\ cm$ ហើយកម្ពស់ត្រូវស្មើ២ដងកាំ។

Slide 2 - 20

ចំណោទបរមា

Exercise គេចង់ធ្វើអាងទឹកមួយរាងប្រឡេពីប៉េតកែងចេញពីបន្ទះសង្ក័សីរាងការ៉េដែលជ្រុងមាន ប្រវែង $12\ m$។ គេត្រូវកាត់ការ៉េតូចៗប៉ុនគ្នាចំនួន4 ចេញពីជ្រុងទាំង4ដើម្បីធ្វើអាងទឹក។ រកវិមាត្រ អាងដែលធ្វើឱ្យមានមាឌបំផុត។



ជំពូកទី ៥

អាំងតេក្រាល

(Integrals)

ព្រីមីទីវ
(Antiderivatives)

- បើគេស្គាល់ល្បឿននៃវត្ថុមួយ គេអាចដឹងពីទីតាំងរបស់វានៅខណៈពេលមួយបាន
- នៅពេលអ្នកអាចវាស់អត្រាទឹកហូរចេញពីធុងមួយ នោះអ្នកអាចគណនាបរិមាណទឹកហូរចេញក្នុងរយៈពេលមួយបាន
- អ្នកជីវវិទ្យាប្រើអត្រាកើនឡើងនៃចំនួនបាក់តេរីដើម្បីប៉ាន់ស្មានចំនួនបាក់តេរីសរុបនៅខណៈពេលអនាគតមួយ
- ស្គាល់អនុគមន៍ f $\Rightarrow$ ត្រូវរកអនុគមន៍ F ដែល $F'(x) = f(x)$

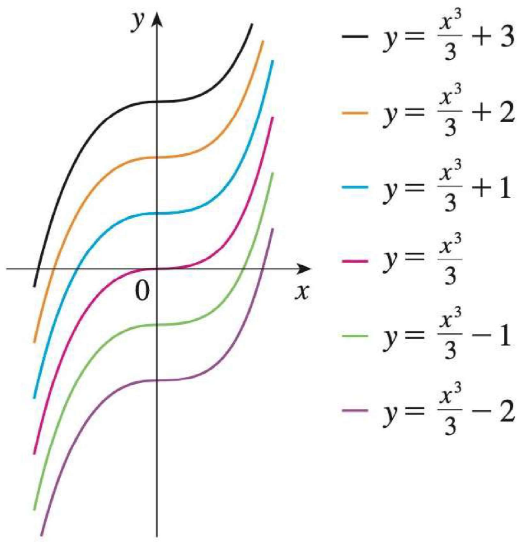
និយមន័យ អនុគមន៍ F ហៅថាព្រីមីទីវ (Antiderivative) នៃអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះ I បើ $F'(x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x \in I$ ។

ទ្រឹស្តីបទ បើ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះ I នោះព្រីមីទីវទូទៅនៃ f មានទម្រង់ $F(x)+C$

ដែល C ជាចំនួនថេរ។ គេកំណត់សរសេរម្យ៉ាងទៀតដោយ

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

និងអាចហៅម្យ៉ាងទៀតថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ធៀបនឹង x ។



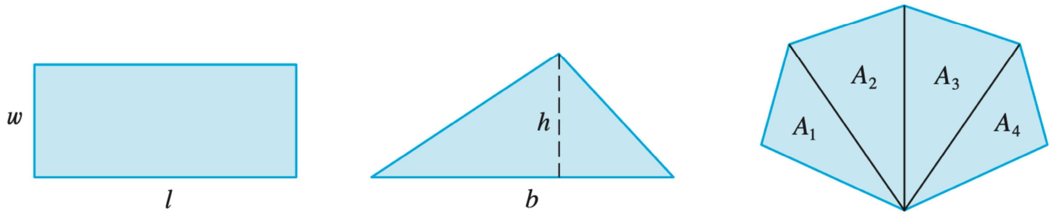
Slide 2 - 3

តារាងព្រីមីទីវ

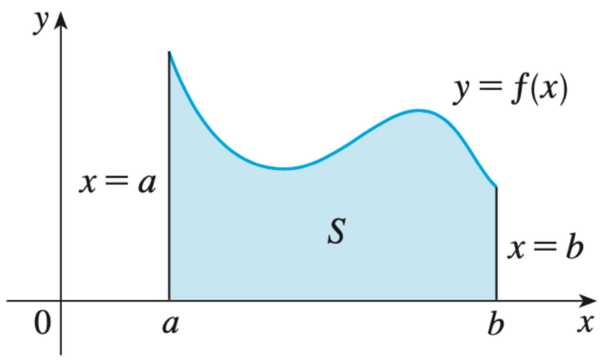
Function	Particular antiderivative	Function	Particular antiderivative
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos x$	$\sin x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$-\cos x$		

Slide 2 - 4

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា

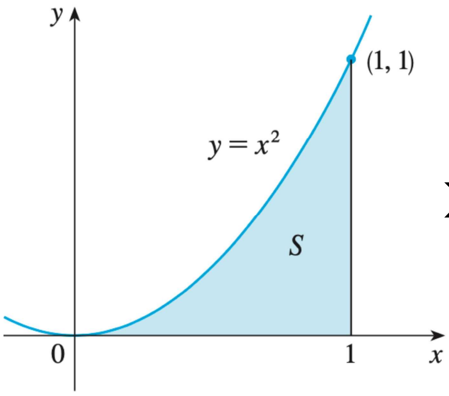


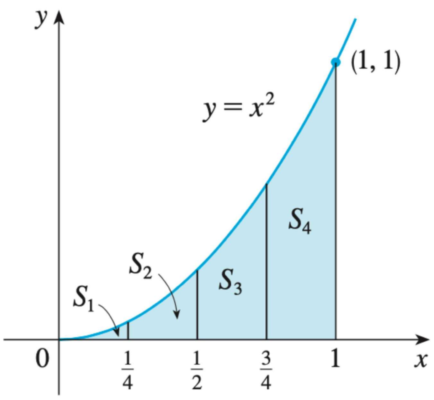
$A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh$ $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$



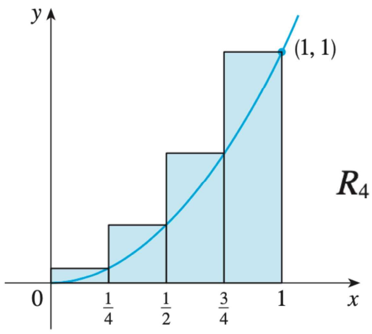
Slide 2 - 5

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា





(a)

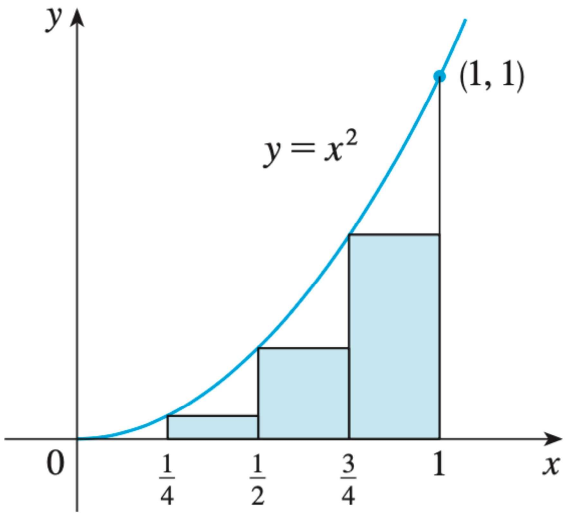


(b)

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

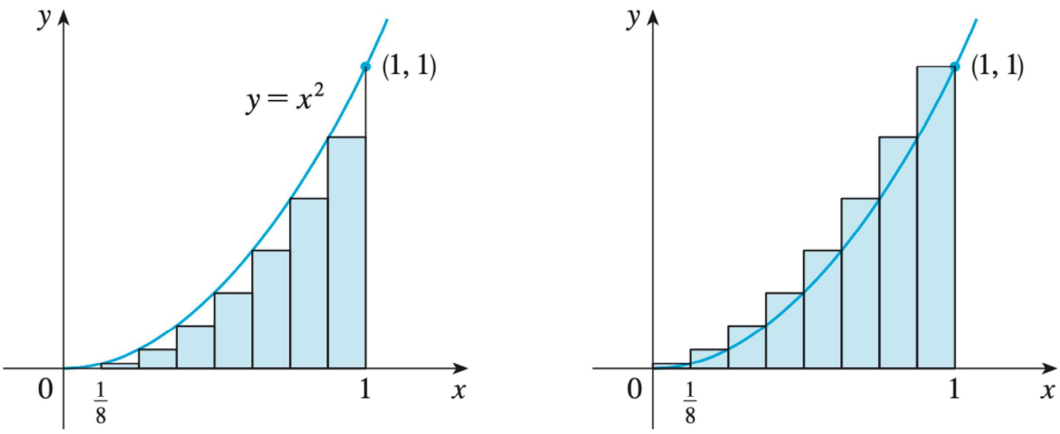
Slide 2 - 6

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា



$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា



(a) Using left endpoints

(b) Using right endpoints

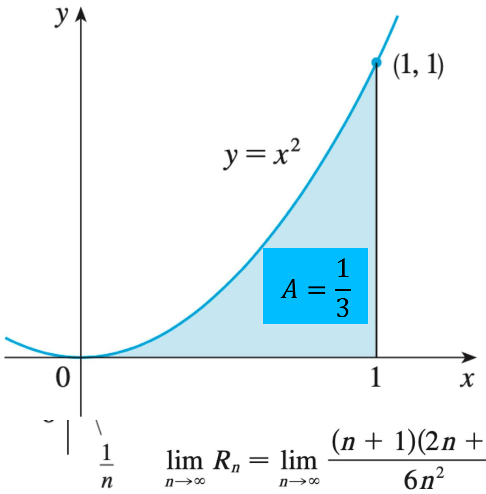
$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

ផ្ទៃក្រឡា និងចម្ងាយ

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Slide 2 - 9

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា



$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

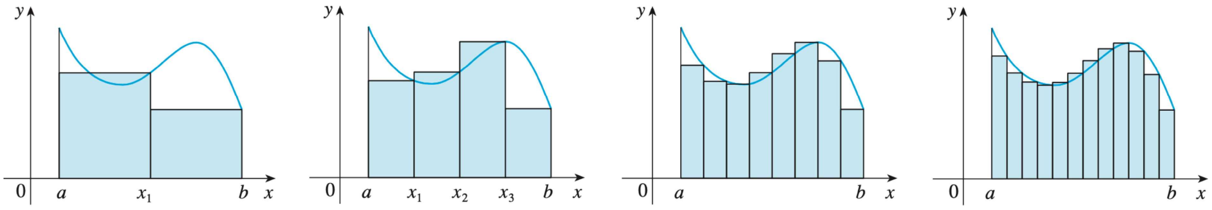
$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

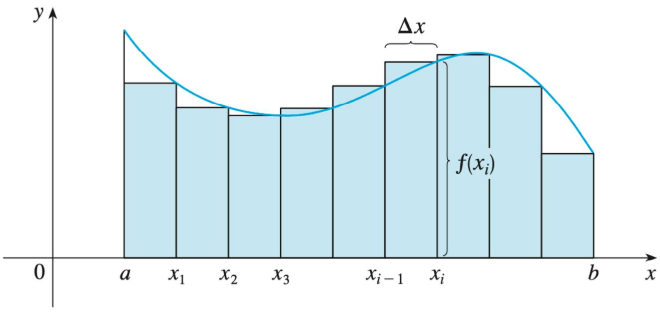
Slide 2 - 10

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា



(a) $n=2$ (b) $n=4$ (c) $n=8$ (d) $n=12$

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$



ចំណោទផ្ទៃក្រឡា

និយមន័យ ក្រឡាផ្ទៃ A នៃតំបន់ R ដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f ជាលីមីត

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [\, f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

យើងអាចបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា A ក៏ជាលីមីត

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [\, f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

និមិត្តសញ្ញាផលបូក Σ

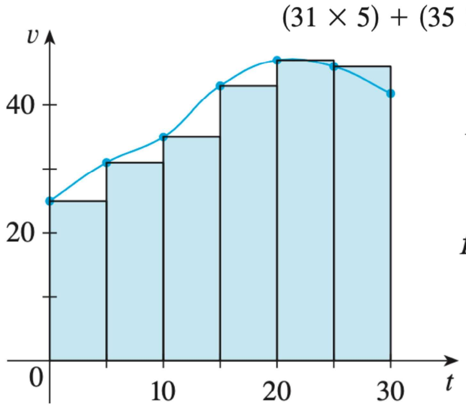
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

ចំណោទចម្ងាយ

Time (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocity (m/s)	25	31	35	43	47	46	41

$$(25\times 5)+(31\times 5)+(35\times 5)+(43\times 5)+(47\times 5)+(46\times 5)=1135 \text{ m}$$

$$(31\times 5)+(35\times 5)+(43\times 5)+(47\times 5)+(46\times 5)+(41\times 5)=1215 \text{ m}$$



$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

$$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Slide 2 - 13

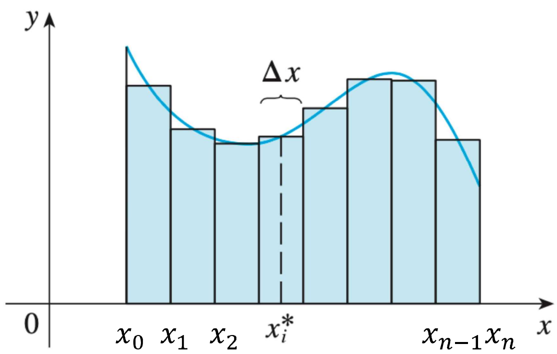
អាំងតេក្រាលកំណត់(Definite Integral)

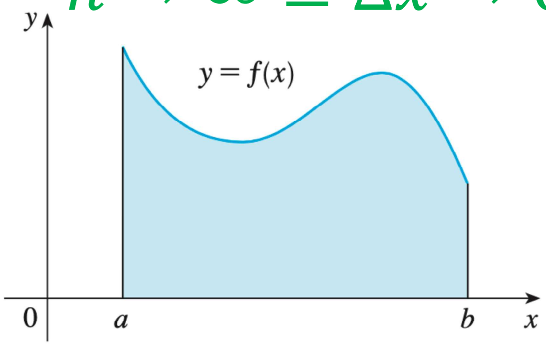
និយមន័យ បើ f អនុគមន៍កំណត់លើ $[a,b]$, យើងចែកចន្លោះ $[a,b]$ ជា n ចន្លោះរង ដែលមានទទឹងស្មើគ្នា $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ។ យើងតាង $x_0\,(=a), x_1, x_2, \dots, x_n\,(=b)$ ជាចំណុចចុងនៃចន្លោះរងទាំងនោះ និងជ្រើសរើសចំណុច $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ចេញពីចន្លោះរងទាំងនោះ។ នោះអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ f ពី a ទៅ b កំណត់ដោយ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \quad \text{ស្គាល់} \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}?$$

បើលីមីតនេះកំណត់។

$$n\to\infty \equiv \Delta x\to 0$$





អាំងតេក្រាលកំណត់(Definite Integral)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

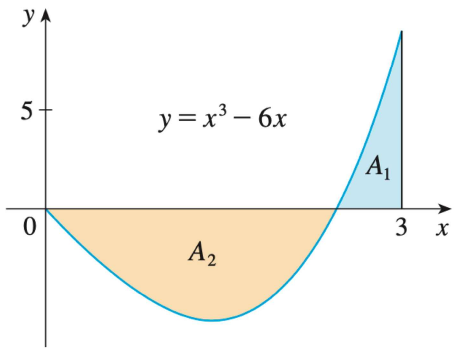
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

អាំងតេក្រាលកំណត់(Definite Integral)

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$



$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

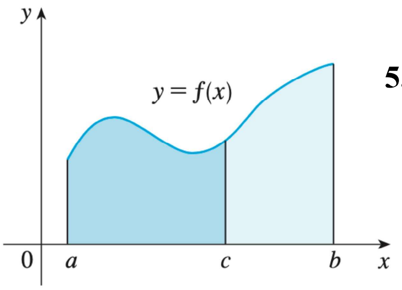
1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, where c is any constant

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, where c is any constant

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$



ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

អាំងតេក្រាល ↔ ដេរីវេ

(Integration ↔ Differentiation)

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា
(Fundamental Theorem of Calculus)

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $F(x) = \int_0^x (t^2+1)dt$

ចម្លើយ ដោយអនុគមន៍ $f(t) = t^2 + 1$ ជាអនុគមន៍ជាប់

តាម FTC $F'(x) = f(x) = x^2 + 1$

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា
(Fundamental Theorem of Calculus)

លំហាត់អនុវត្តន៍ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើ FTC

(a) $y = \int_a^x (t^3 + 1)\,dt$ **(b)** $y = \int_x^5 3t \sin t\,dt$

(c) $y = \int_1^{x^2} \cos t\,dt$ **(d)** $y = \int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t}\,dt$

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា

(Fundamental Theorem of Calculus)

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា(ផ្នែកទី២) បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $[a,b]$ នោះ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

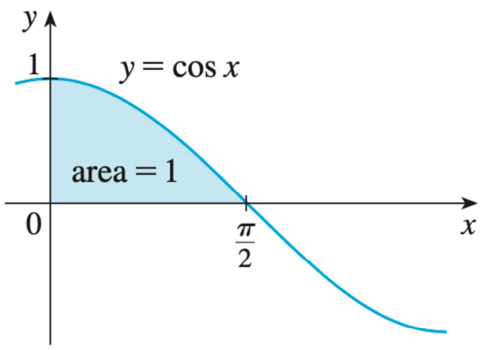
សម្គាល់:

- គេកំណត់សរសេរ $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- និមិត្តសញ្ញាព្រីមីទីវ $F(x) = \int f(x)dx$

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា

(Fundamental Theorem of Calculus)

ឧទាហរណ៍ គណនាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x) = \cos x$ នៅចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



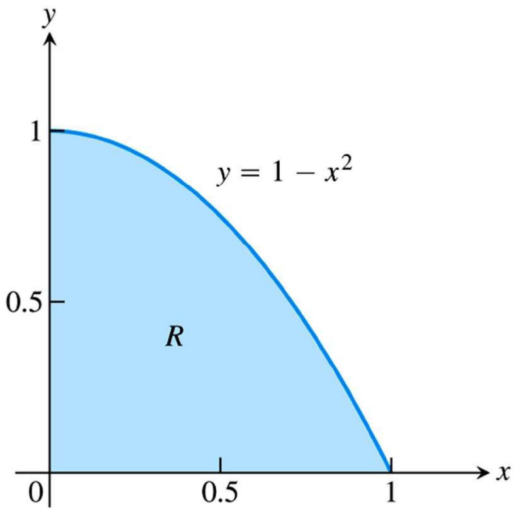
ចម្លើយ ដោយ $F(x) = \sin x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $f(x) = \cos x$

តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ: $A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃគណិតគណនា

(Fundamental Theorem of Calculus)

លំហាត់អនុវត្តន៍ គណនាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $y = 1 - x^2$ នៅចន្លោះ $[0,1]$



ជំពូកទី ៦

ការអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាល

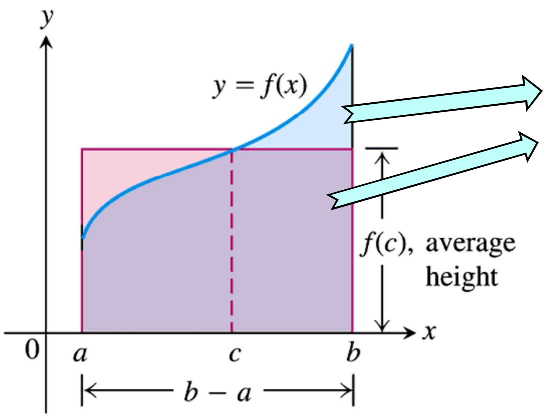
(Applications of Integrals)

តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍

(Average Value of a Function)

និយមន័យ បើអនុគមន៍ f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a, b]$ នោះតម្លៃមធ្យមនៃ f លើចន្លោះ $[a, b]$ កំណត់ដោយ

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

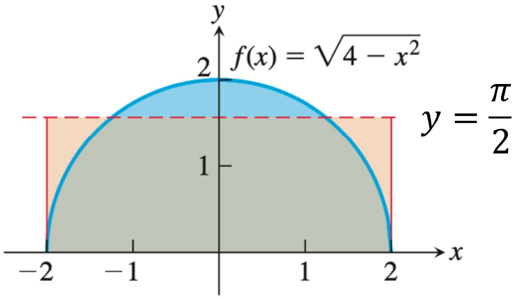


$$f_m * (b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍

(Average Value of a Function)

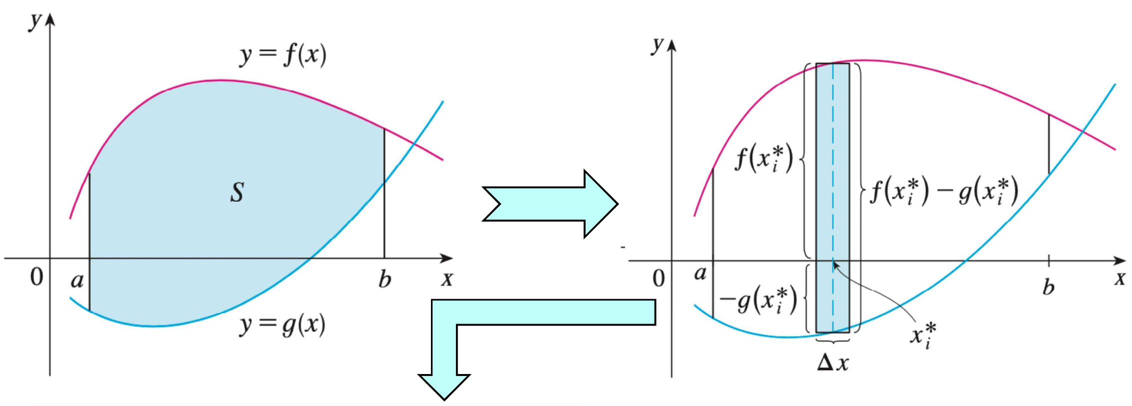
ឧទាហរណ៍ គណនាតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ នៅចន្លោះ $[-2,2]$



ចម្លើយ

តម្លៃមធ្យម $f_m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\pi 2^2\right)=\frac{\pi}{2}$

ផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោង (Areas between Curves)

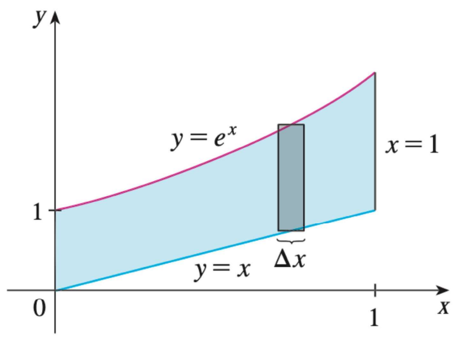


$$\boxed{A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*)-g(x_i^*)]\Delta x}$$

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx$$

ផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោង (Areas between Curves)

ឧទាហរណ៍ គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = e^x$ និង $y = x$ នៅចន្លោះ $x = 0$ និង $x = 1$



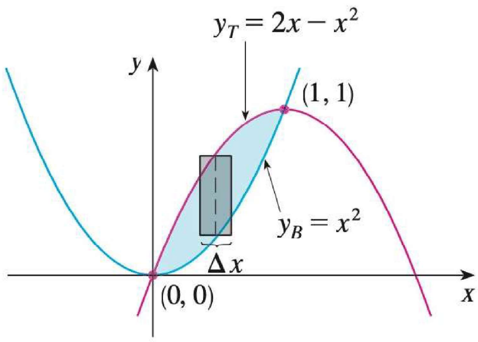
$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx \quad = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 \quad = e - 1.5$$

ផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោង (Areas between Curves)

ឧទាហរណ៍ គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = 2x - x^2$ និង $y = x^2$

ជាដំបូង រកចំនុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរដោយដោះស្រាយ



$$2x - x^2 = x^2$$

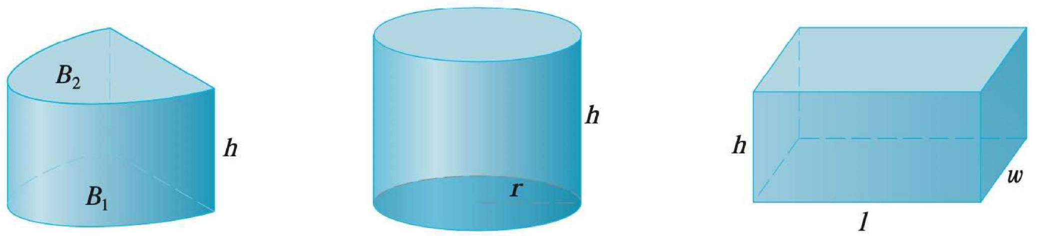
$$\Leftrightarrow 2x - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ឬ } x = 1$$

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

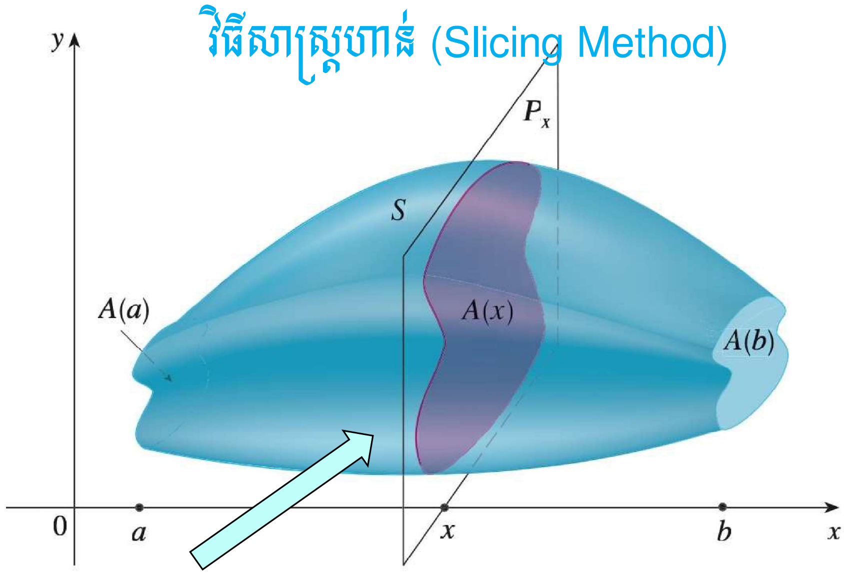
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \quad = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

មាឌស៊ីឡាំង
(Volumes of Cylinders)



(a) Cylinder $V = Ah$ (b) Circular cylinder $V = \pi r^2 h$ (c) Rectangular box $V = lwh$

មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្រហាន់ (Slicing Method)

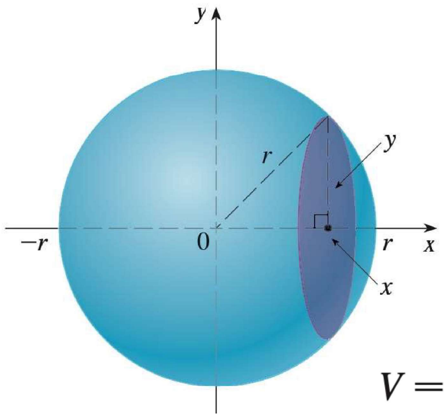


$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x \qquad V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

និយមន័យ មាឌ V នៃសូលីដដែលមានមុខកាត់ $A(x)$ នៅចន្លោះ $x = a$ និង $x = b$ កំណត់ដោយ

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx}$$

មាឌស្វ៊ែរ (Volume of A Sphere)



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ពីតាគ័រ $\Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \quad = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

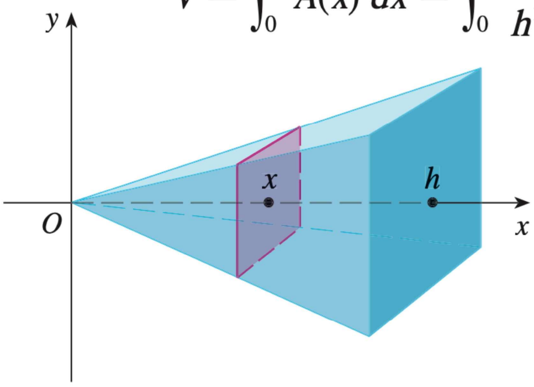
$$= 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \quad = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

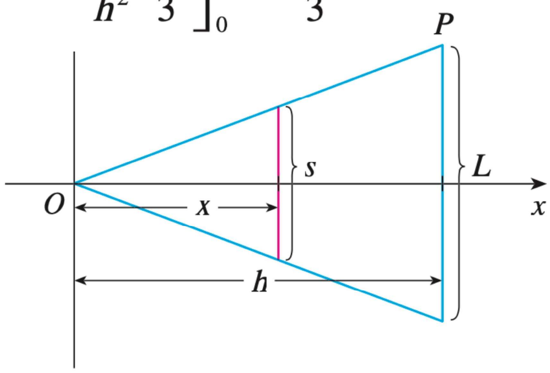
មាឌពីរ៉ាមីត (Volume of A Pyramid)

ឧទាហរណ៍ គណនាមាឌពីរ៉ាមីតដែលមានបាតជាការ៉េជ្រុង L និងកម្ពស់ h

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L} \quad \Longrightarrow \quad s = Lx/h \quad \Longrightarrow \quad A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

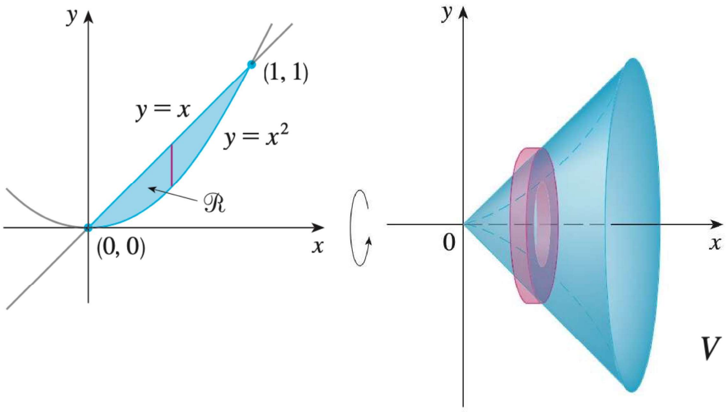


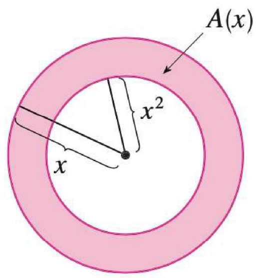


មាឌសូលីដបរិវត្តន៍ (Volume of Solid of Revolution)

គណនាមាឌនៃសូលីដដែលបានពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃតំបន់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $f(x) = x$ និង $g(x) = x^2$។

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$



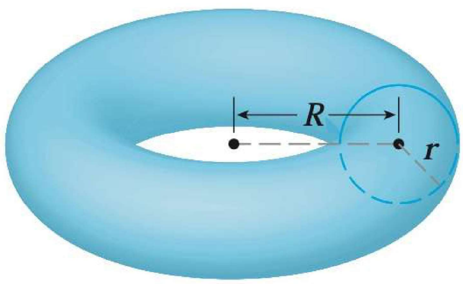


$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

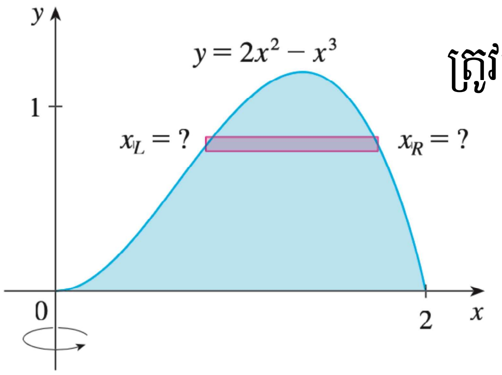
$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

មាឌសូលីដបរិវត្តន៍ (Volume of Solid of Revolution)

លំហាត់អនុវត្តន៍: គណនាមាឌនៃកង (Torus) ដែលកាំ r និង R (ដូចរូបខាងក្រោម)



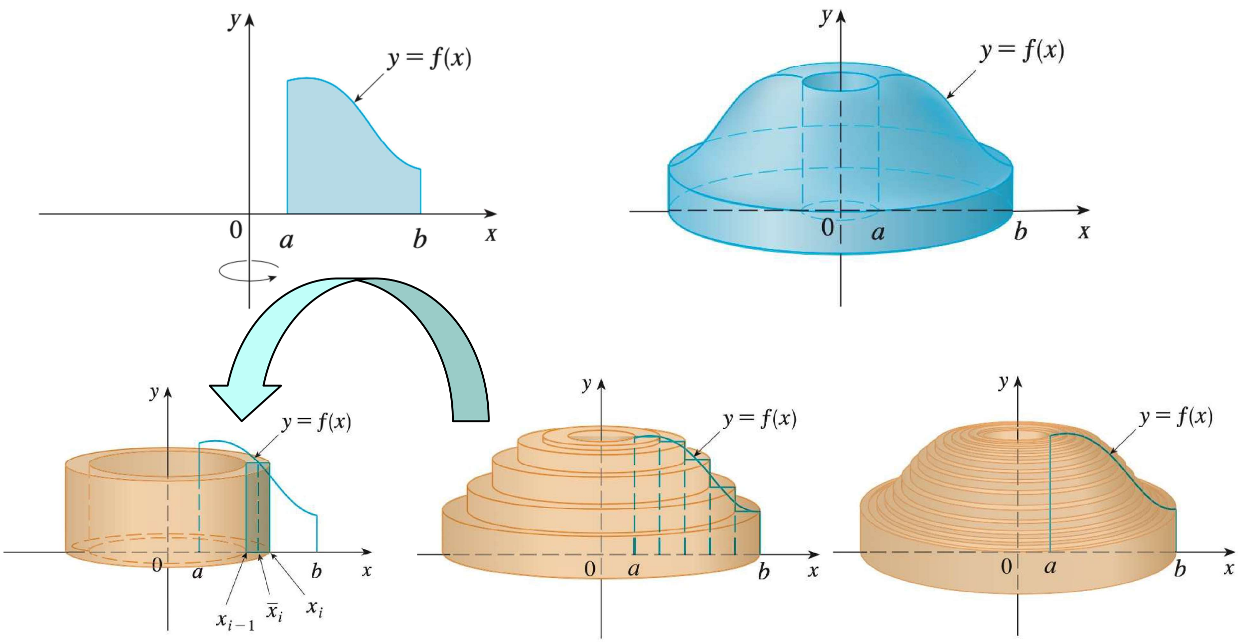
មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្របក (Shell Method)



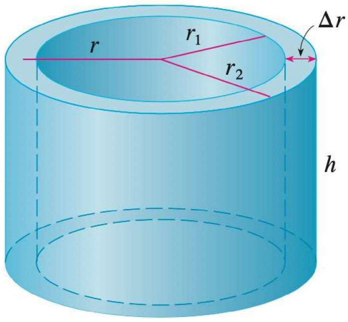
ត្រូវការដោះស្រាយរក x ដែល $y = 2x^2 - x^3$

បញ្ហាពិបាកដោះស្រាយ

មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្របក (Shell Method)



មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្របក (Shell Method)



$$
\begin{aligned}
V &= V_2 - V_1 \\
&= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\
&= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\
&= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{V = 2\pi r h \Delta r}$$

$$V = [\text{circumference}][\text{height}][\text{thickness}]$$

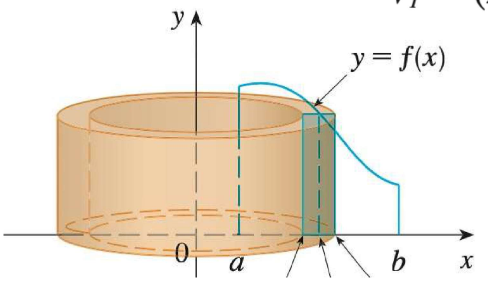
$$\Delta r = r_2 - r_1$$

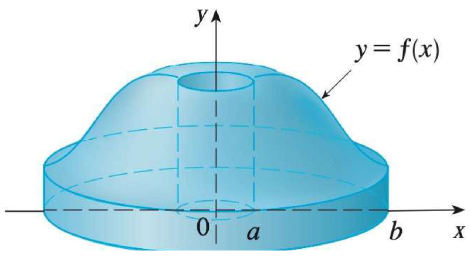
$$r = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)$$

Slide 2 - 15

មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្របក (Shell Method)

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x$$



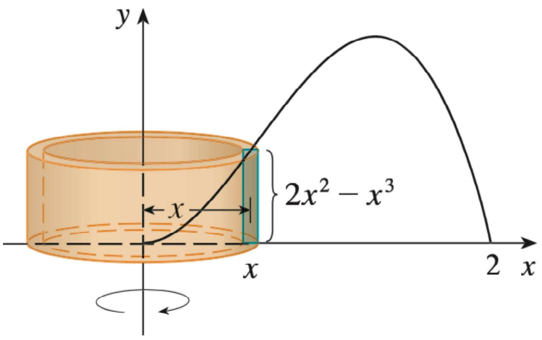


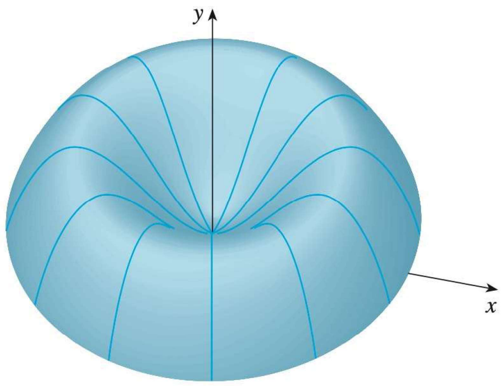
និយមន័យ មាឌនៃសូលីដដែលបានពីការបង្វិលជុំអ័ក្ស y នៃតំបន់ក្រោមខ្សែកោង $y = f(x)$ ពី a ទៅ b គឺ

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx}$$

Slide 2 - 16

មាឌសូលីដ (Volumes of Solids)
វិធីសាស្ត្រូបក (Shell Method)





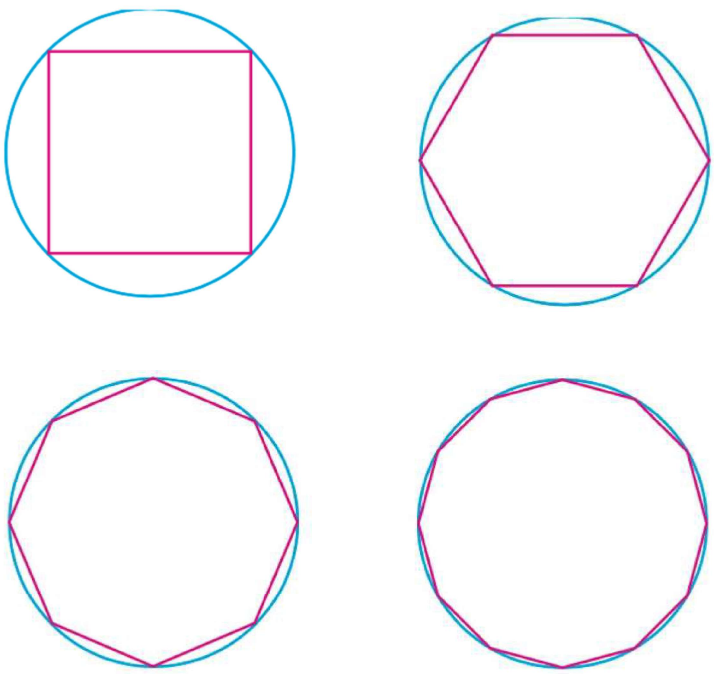
$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx \quad = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 \quad = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) \quad = \tfrac{16}{5}\pi$$

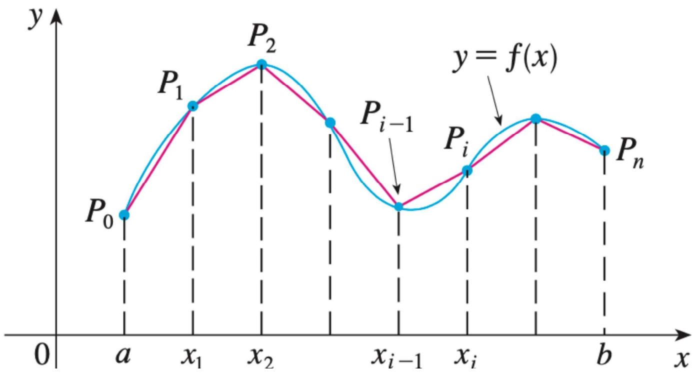
ជំពូកទី ៧

ការអនុវត្តនៃអាំងតេក្រាល ២
(Applications of Integrals 2)

ប្រវែងខ្សែកោង (Arc length)



ប្រវែងខ្សែកោង (Arc length)



$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

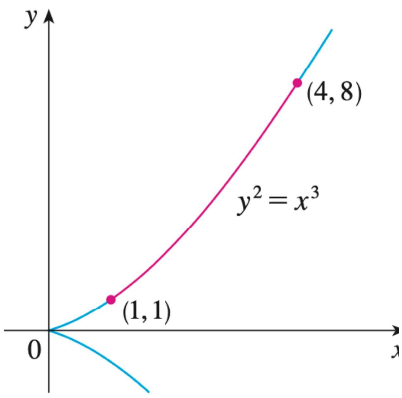
$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

និយមន័យ បើ f' ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះប្រវែងនៃខ្សែកោង f លើចន្លោះ $[a,b]$ គឺ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

ប្រវែងខ្សែកោង (Arc length)

ឧទាហរណ៍: រកប្រវែងធ្នូនៃខ្សែកោង $y^2 = x^3$ នៅចន្លោះចំណុច $(1,1)$ និង $(4,8)$



ចម្លើយ

សម្រាប់ផ្នែកខាងលើ $y = x^{3/2}$

គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

តាង $u = 1 + \frac{9}{4}x$ នោះ $du = \frac{9}{4}dx$

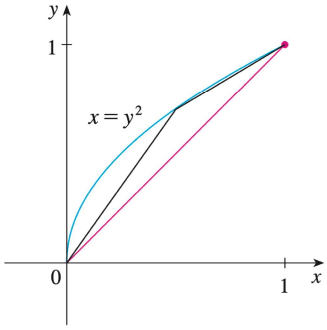
x	1	4
y	$13/4$	10

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$$

ប្រវែងខ្សែកោង (Arc length)

និយមន័យ បើខ្សែកោងមួយមានសមីការ $x = g(y), c \le y \le d$ ហើយ g' ជាប់លើចន្លោះ $[c, d]$ នោះប្រវែងនៃខ្សែកោង g លើចន្លោះ $[c, d]$ គឺ

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(x))^2}$$



ឧទាហរណ៍: រកប្រវែងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = x$ ពីចំណុច $(0,0)$ និង $(1,1)$

ចម្លើយ គេបាន $\frac{dx}{dy} = 2y \Longrightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$

តាង $y = \frac{1}{2}\tan\theta \Longrightarrow dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ និង $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta.$

$$L = \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta$$

y	0	1
θ	0	$\tan^{-1} 2$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

អនុគមន៍ប្រវែងខ្សែកោង (Arc Length Function)

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

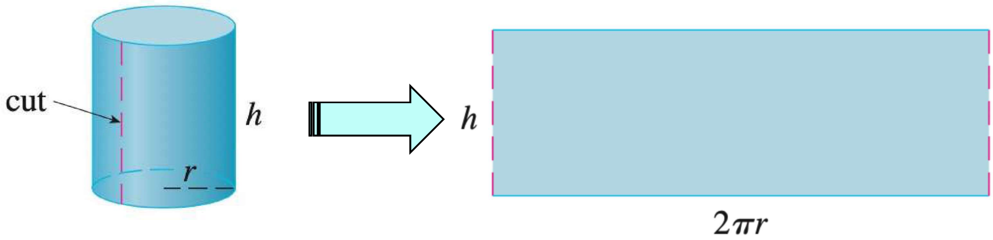
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

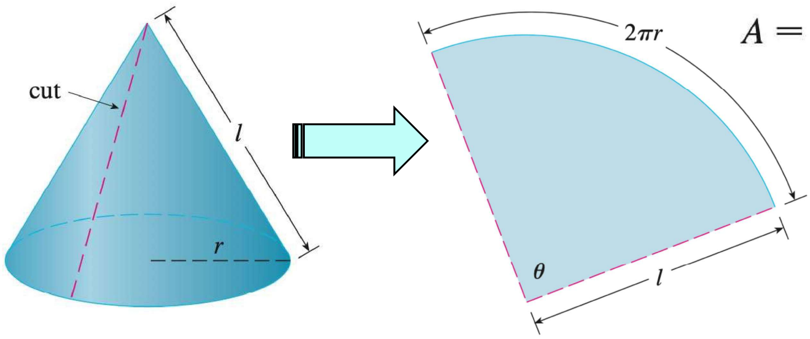
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)



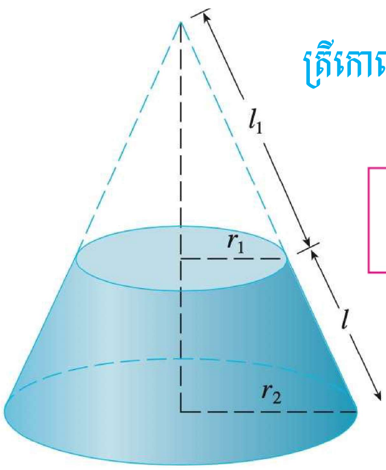
$$A = 2\pi r h$$



$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi r l$$

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)



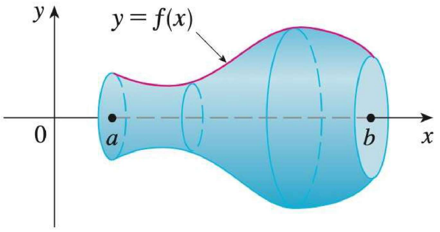
ត្រីកោណដូចគ្នា $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l_1 + l}{r_2}$

$$\boxed{A = 2\pi r l}$$

$$r = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)



និយមន័យ បើ f' ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃមុខដែលបានពីរង្វិលនៃខ្សែកោង f លើចន្លោះ $[a,b]$ ជុំវិញអ័ក្ស x គឺ

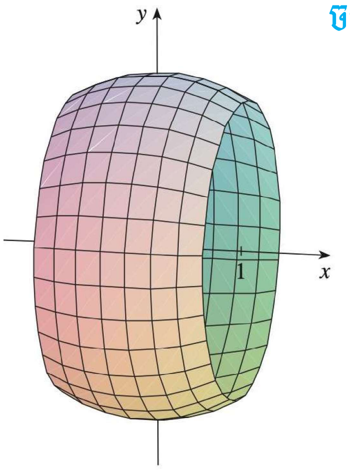
$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Slide 2 - 9

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)

ឧទាហរណ៍: ខ្សែកោង $y=\sqrt{4-x^2}, -1\le x\le 1$ គឺជាធ្នូនៃរង្វង់ $x^2+y^2=4$ ។ រកផ្ទៃមុខដែលបានពីរង្វិលនៃខ្សែកោងនេះជុំវិញអ័ក្ស x ។



ចម្លើយ

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$S=\int_{-1}^{1}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$

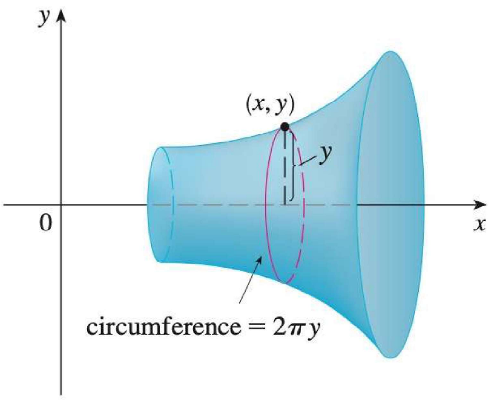
$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$=4\pi\int_{-1}^{1}1\,dx=8\pi$$

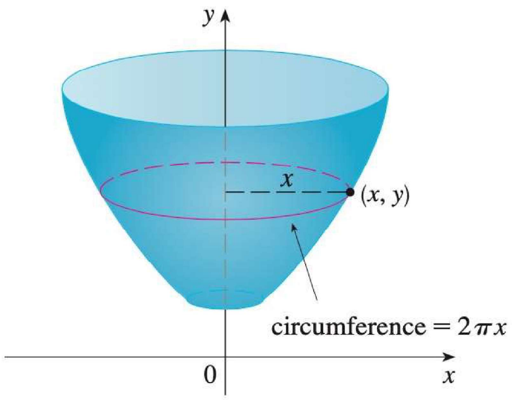
Slide 2 - 10

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)



(a) Rotation about x-axis: $S = \int 2\pi y \, ds$



(b) Rotation about y-axis: $S = \int 2\pi x \, ds$

$$\boxed{S = \int 2\pi y \, ds}$$

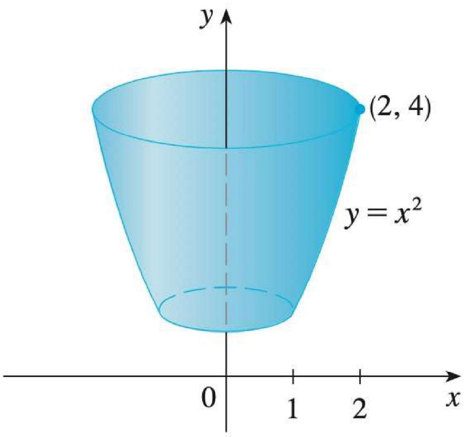
$$\boxed{S = \int 2\pi x \, ds}$$

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)

ឧទាហរណ៍: ធ្នូនៃប៉ារ៉ាបូល $y = x^2, \ 1 \le x \le 2$, ត្រូវបានបង្វិលជុំវិញអ័ក្ស y ។

ចម្លើយ $\dfrac{dy}{dx} = 2x$



$$S = \int 2\pi x \, ds$$

$$= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

តាង $u = 1 + 4x^2$ នោះ $du = 8xdx$

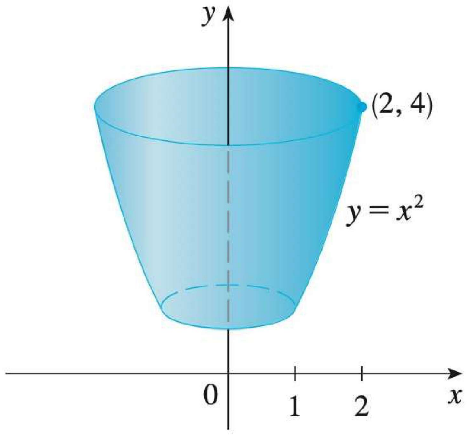
$$S = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du = \frac{\pi}{4} \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_5^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

ផ្ទៃមុខបរិវត្តន៍

(Area of a Surface of Revolution)

ឧទាហរណ៍: ធ្នូនៃប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$, $1 \le x \le 2$, ត្រូវបានបង្វិលជុំវិញអ័ក្ស y ។

ចម្លើយ២ $x = \sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$



$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad \text{(where } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

ចម្លើយដូចគ្នា