អថេរថៃដន្យដាច់

ហាំ ការីម

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

TUP-BA

មាតិការ

អថេរចៃដន្យ (Random Variables)

និយមន័យ

អថេរចៃដន្យ X កំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។ គេតាងអថេរចៃដន្យនេះ ដោយអក្សរធំ គឺៈ

$$X : S \to \mathbb{R}$$

- អថេរចៃដន្យមួយ គឺជាចំនួនដែលភ្ជាប់ទៅនឹងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ។
- ការប្រើអថេរចៃដន្យ គឺជាមធ្យោបាយដ៏ល្អ ក្នុងការពិពណ៌នាអំពីព្រឹត្តិការណ៍មួយ។

ឧទាហរណ៍១

- ពិនិត្យមើលលំដាប់នៃការចេញខាងរូប (head) និងខាងខ្នង (tail) ក្នុងការបោះកាក់ ស្មើសាច់ចំនួនពីរលើក។ លំហសំណាកសម្រាប់ពិសោធន៍ចៃដន្យនេះ តាងដោយ

$$S = \{hh, ht, th, tt\}$$

ឧទាហរណ៍១

- ពិនិត្យមើលលំដាប់នៃការចេញខាងរូប (head) និងខាងខ្នង (tail) ក្នុងការបោះកាក់ ស្មើសាច់ចំនួនពីរលើក។ លំហសំណាកសម្រាប់ពិសោធន៍ចៃដន្យនេះ តាងដោយ

$$S = \{hh, ht, th, tt\}$$

- ឧបមាថាយើងចាប់អារម្មណ៍តែលើការបោះណា ដែលលទ្ធផលចេញខាងរូប។ យើងអាចកំណត់អថេរចៃដន្យ X ដែលជាចំនួនខាងរូបទទួលបានក្នុងលទ្ធផលទាំង២លើក។ ដូច្នេះ ប្រសិនបើលទ្ធផល hh នោះ X នឹងស្មើនឹង 2។ ដូច្នេះ គេកំណត់បានដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} X : S &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \# \, h \text{ ក្នុង } \omega \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍១ (ត)

- ដោយមានលទ្ធផលចំនួនបួន ក្នុងលំហ S គេកំណត់បានតម្លៃ X ចំពោះលទ្ធផលនីមួយៗ ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{array}{rcl} \text{inputs: } S & \xrightarrow{X} & \text{outputs: } \mathbb{R} \\ hh & \xrightarrow{X} & 2 \\ th & \xrightarrow{X} & 1 \\ ht & \xrightarrow{X} & 1 \\ tt & \xrightarrow{X} & 0 \end{array}$$

ឧទាហរណ៍២

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ តើតម្លៃ X និង ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរ X ស្មើប៉ុន្មាន?

Random variables

ឧទាហរណ៍២

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ តើតម្លៃ X និង ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរ X ស្មើប៉ុន្មាន?

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(1,1) = 1/6 \times 1/6 \\
P(X=2) &= P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 2 \\
P(X=3) &= P(1,3) + P(3,1) = 1/6 \times 1/6 \times 2 \\
&\cdots\cdots \\
P(X=36) &= P(6,6) = 1/6 \times 1/6
\end{aligned}
$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ៦ / 17

Continuous and Discrete

និយមន័យ

- *អថេរចៃដន្យដាច់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងជាចំនួនកំណត់ ឬជាចំនួនរាប់បាន តែមិនកំណត់ (ដូចជាចំនួនគត់ជាដើម) ។
- *អថេរចៃដន្យជាប់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងរាប់មិនអស់ ស្ថិតក្នុងចន្លោះមួយ (គឺជាចន្លោះនៃចំនួនពិត, e.g., $[0, 1]$) ។

Random variables

Continuous and Discrete

និយមន័យ

- អថេរចៃដន្យដាច់ គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងជាចំនួនកំណត់ ឬជាចំនួនរាប់បាន តែមិនកំណត់ (ដូចជាចំនួនគត់ជាដើម) ។
- អថេរចៃដន្យជាប់ គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងរាប់មិនអស់ ស្ថិតក្នុងចន្លោះមួយ (គឺជាចន្លោះនៃចំនួនពិត, e.g., $[0, 1]$) ។

Example.

- The number of heads obtained in a series of coin tosses.
- The count of library books checked out per hour.
- Height and weight measurements.
- Time intervals or durations.
- Temperatures.

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

- *បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ* គឺជាការពិពណ៌នាអំពីរបៀប ដែលប្រូបាប៊ីលីតេ ត្រូវបានពង្រាយ លើតម្លៃដែលអាចកើតមានរបស់អថេរចៃដន្យមួយ។ វាផ្តល់នូវវិធីមួយ ក្នុងការយល់ពីលទ្ធភាព (likelihood) នៃលទ្ធផលផ្សេងៗពីគ្នា។
- Probability distribution មានពីរប្រភេទទៅតាមប្រភេទរបស់អថេរចៃដន្យដែរ៖
  1. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរដាច់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃជាក់លាក់
     - ★ គេតាងវាដោយ probability mass function (PMF): $P(X = x)$
     - ★ Ex.: ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយគ្រាប់ គេបាន PMF កំណត់ដោយ៖ $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ។ល។

Probability distribution

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

- *បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ* គឺជាការពិពណ៌នាអំពីរបៀប ដែលប្រូបាប៊ីលីតេ ត្រូវបានពង្រាយ លើតម្លៃដែលអាចកើតមានរបស់អថេរចៃដន្យមួយ។ វាផ្តល់នូវវិធីមួយ ក្នុងការយល់ពីលទ្ធភាព (likelihood) នៃលទ្ធផលផ្សេងៗពីគ្នា។
- Probability distribution មានពីរប្រភេទទៅតាមប្រភេទរបស់អថេរចៃដន្យដែរ៖
  1. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរដាច់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃជាក់លាក់
     - ★ គេតាងវាដោយ probability mass function (PMF): $P(X = x)$
     - ★ Ex.: ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយគ្រាប់ គេបាន PMF កំណត់ដោយ៖ $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ។ល។
  2. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរជាប់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៅលើចន្លោះ
     - ★ គេតាងវាដោយ probability density function (PDF): $f(x)$
     - ★ Ex.: របាយឯកលក្ខណ៍មួយកំណត់លើចន្លោះ $[a, b]$ មាន PDF កំណត់ដោយ៖

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{for} \quad a \leq x \leq b$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ៨ / 17

Cumulative distribution function (cdf)

និយមន័យ

ចំពោះអថេរចៃដន្យ X គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

ហៅថា *អនុគមន៍របាយកើន* (cumulative distribution function) របស់អថេរ X ។

Cumulative distribution function (cdf)

និយមន័យ

ចំពោះអថេរចៃដន្យ X គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

ហៅថា *អនុគមន៍របាយកើន* (cumulative distribution function) របស់អថេរ X ។

ចំណាំ.

- អក្សរធំ X: ជាអថេរចៃដន្យ (random variable)
- អក្សរតូច x: ជាចំនួនពិត (a real-valued number)
- $\leq$: តូចជាង ឬស្មើ (smaller than or equal to)

លក្ខណៈរបស់ CDF

សម្គាល់៖

- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ ចំពោះគ្រប់ $a < b$
- $P(X < b)$ មិនចាំបាច់ត្រូវស្មើនឹង $P(X \le b)$ ទេ
- $P(X = b) = F_X(b) - \lim_{x \to b^-} F_X(x)$

ដូច្នេះ គេបាន

1. $F(x)$ គឺជាអនុគមន៍មិនចុះមួយ i.e., បើ $x_1 < x_2$ នោះ $F(x_1) \le F(x_2)$
2. Limits at infinity:
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \iff P(X \le \infty) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \iff P(X > -\infty) = 1$$
3. $F(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំ i.e., គ្រប់ស្វ៊ីតចុះ $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ដែលរួមទៅរក x គេបាន៖
$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x) \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P(X \le x + \frac{1}{n}) = P(X \le x)$$

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេ៖ (a) $P(X \le 2)$, (b) $P(X \le 35)$.

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេះ (a) $P(X \leq 2)$, (b) $P(X \leq 35)$.
- Part (a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= P(1,1) + P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 3 \end{aligned}$$

Probability distribution

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេះ (a) $P(X \leq 2)$, (b) $P(X \leq 35)$.
- Part (a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= P(1,1) + P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 3 \end{aligned}$$

- Part (b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 35) &= P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 35) \\ &= 1 - P(X = 36) \\ &= 1 - P(6,6) \\ &= 1 - 1/6 \times 1/6 \end{aligned}$$

pmf និង cdf

- ចំពោះអថេរថៃដន្យដាច់ X គេកំណត់ *probability mass function* (pmf) ដោយ៖

$$p(x) = P(X = x)$$

Note: pmf អាចសរសេរជា $f(x)$ ក៏បាន!

- ចំពោះអថេរដាច់ X មានស៊ីត $x_1, x_2, \ldots$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} p(x_i) > 0 & \text{ចំពោះ } i = 1, 2, \ldots \\ p(x) = 0 & \text{ចំពោះគ្រប់តម្លៃផ្សេងទៀតនៃ } x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 & \end{cases}$$

- ទំនាក់ទំនងរវាង pmf និង cdf ៖

$$F(a) = \sum_{\text{all } x \leq a} p(x)$$

- បើគេស្គាល់ pmf នោះគេអាចគណនារក cdf បាន និងច្រាសមកវិញ។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរថៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?
- រក pmf:

$$P(X=0) = P(TTT) = (1/2)^3 = 1/8$$
$$P(X=1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8$$
$$P(X=2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8$$
$$P(X=3) = P(HHH) = (1/2)^3 = 1/8$$

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?
- រក pmf:

$$P(X=0) = P(TTT) = (1/2)^3 = 1/8$$
$$P(X=1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8$$
$$P(X=2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8$$
$$P(X=3) = P(HHH) = (1/2)^3 = 1/8$$

- រក pmf:

$$F(a) = \begin{cases} 1/8, & 0 \le a < 1 \\ 1/2, & 1 \le a < 2 \\ 7/8, & 2 \le a < 3 \\ 1, & 3 \le a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \leq b < 3 \\ 1, & 3 \leq b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

អថេរចៃដន្យដាច់

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \leq b < 3 \\ 1, & 3 \leq b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

គេបាន៖

- $P(X = 1) = P(X \leq 1) - P(X < 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b)=\begin{cases}0, & b<0\\ \frac{b}{4}, & 0\le b<1\\ \frac{1}{2}+\frac{b-1}{4}, & 1\le b<2\\ \frac{11}{12}, & 2\le b<3\\ 1, & 3\le b\end{cases}$$

ចូររក $P(X=i), i=1,2,3$?

គេបាន៖

- $P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
- $P(X=2)=P(X\le 2)-P(X<2)=\frac{11}{12}-(\frac{1}{2}+\frac{2-1}{4})=\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b)=\begin{cases}0, & b<0\\ \frac{b}{4}, & 0\le b<1\\ \frac{1}{2}+\frac{b-1}{4}, & 1\le b<2\\ \frac{11}{12}, & 2\le b<3\\ 1, & 3\le b\end{cases}$$

ចូររក $P(X=i), i=1,2,3$?

គេបាន៖

- $P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
- $P(X=2)=P(X\le 2)-P(X<2)=\frac{11}{12}-(\frac{1}{2}+\frac{2-1}{4})=\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$
- $P(X=3)=P(X\le 3)-P(X<3)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$

សង្ខេបឡើងវិញ

- *អថេរចៃដន្យ* (Random Variable)
  - អថេរចៃដន្យ X គឺជាអនុគមន៍ កំណត់លើលំហសំណាក S ដោយ
$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$
  - មាន cdf :
$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \text{គ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$
- *អថេរចៃដន្យដាច់* (Discrete random variable)
  - យកតម្លៃអាចកើតឡើង ជាចំនួនរាប់បានមួយ
  - មាន pmf :
$$p_X(x) = P(X = x)$$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$
  - $F(a) = \displaystyle\sum_{\text{គ្រប់ } x \leq a} p(x)$

សង្ឃឹមគណិត

និយមន័យ

តម្លៃ *សង្ឃឹមទុក* ឬ (*មធ្យម*) របស់អថេរចៃដន្យដាច់មួយ កំណត់ដូចខាងក្រោមៈ
$$E[X] = \sum_{x:\, p(x)>0} x \cdot P(X = x) = \sum_{x:\, p(x)>0} x p(x)$$

- $E[X]$ គឺជាតម្លៃធម្យមទំងន់របស់តម្លៃដែលអាចកើតឡើង x ដែល អថេរ X កំណត់យក។ តម្លៃនីមួយៗ ត្រូវបានវាស់ទំងន់ដោយតម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេ $p(x)$។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាបលីតេចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ $0-1$ indicator ដែល

$$X = \begin{cases} 1 & \text{if head is obtained} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូរគណនា $\mu = E[X]$?

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាបលីតេចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ $0-1$ indicator ដែល

$$X = \begin{cases} 1 & \text{if head is obtained} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូរគណនា $\mu = E[X]$?

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាបិលីតេចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអថេរចៃដន្យ $0-1$ indicator ដែល
$$X = \begin{cases} 1 & \text{if head is obtained} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
ចូរគណនា $\mu = E[X]$?
$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$
- In general, for indicator variable $X = \delta_A$ or $\mathbf{1}_A$, denoted as
$$X = \begin{cases} 1 & \text{if event } A \text{ occurs} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

សង្ឃឹមគណិត (Expectation)

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាបិលីតេចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអថេរចៃដន្យ $0-1$ indicator ដែល
$$X = \begin{cases} 1 & \text{if head is obtained} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
ចូរគណនា $\mu = E[X]$?
$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$
- In general, for indicator variable $X = \delta_A$ or $\mathbf{1}_A$, denoted as
$$X = \begin{cases} 1 & \text{if event } A \text{ occurs} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
The expected value of X equals the probability that A occurs.
$$E[X] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = P(A)$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ១៧ / 17

អថេរចៃដន្យដាច់

ហាំ ការីម

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

TUP-BA

មាតិការ

អថេរចៃដន្យ (Random Variables)

និយមន័យ

អថេរចៃដន្យ X កំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។ គេតាងអថេរចៃដន្យនេះ ដោយអក្សរធំ គឺ៖

$$X : S \to \mathbb{R}$$

- អថេរចៃដន្យមួយ គឺជាចំនួនដែលភ្ជាប់ទៅនឹងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ។
- ការប្រើអថេរចៃដន្យ គឺជាមធ្យោបាយដ៏ល្អ ក្នុងការពិពណ៌នាអំពីព្រឹត្តិការណ៍មួយ។

ឧទាហរណ៍១

- ពិនិត្យមើលលំដាប់នៃការចេញខាងរូប (head) និងខាងខ្នង (tail) ក្នុងការបោះកាក់ ស្មើសាច់ចំនួនពីរលើក។ លំហសំណាកសម្រាប់ពិសោធន៍ចៃដន្យនេះ តាងដោយ

$$S = \{hh, ht, th, tt\}$$

ឧទាហរណ៍១

- ពិនិត្យមើលលំដាប់នៃការចេញខាងរូប (head) និងខាងខ្នង (tail) ក្នុងការបោះកាក់ ស្មើសាច់ចំនួនពីរលើក។ លំហសំណាកសម្រាប់ពិសោធន៍ចៃដន្យនេះ តាងដោយ
$$S = \{hh, ht, th, tt\}$$
- ឧបមាថាយើងចាប់អារម្មណ៍តែលើការបោះណា ដែលលទ្ធផលចេញខាងរូប។ យើងអាចកំណត់អថេរចៃដន្យ X ដែលជាចំនួនខាងរូបទទួលបានក្នុងលទ្ធផលទាំង២លើក។ ដូច្នេះ ប្រសិនបើលទ្ធផល hh នោះ X នឹងស្មើនឹង 2។ ដូច្នេះ គេកំណត់បានដូចខាងក្រោម៖
$$\begin{aligned} X : S &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \ \# \ h \text{ ក្នុង } \omega \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍១ (ត)

- ដោយមានលទ្ធផលចំនួនបួន ក្នុងលំហ S គេកំណត់បានតម្លៃ X ចំពោះលទ្ធផលនីមួយៗ ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{array}{rcl} \text{inputs: } S & \xrightarrow{X} & \text{outputs: } \mathbb{R} \\ hh & \xrightarrow{X} & 2 \\ th & \xrightarrow{X} & 1 \\ ht & \xrightarrow{X} & 1 \\ tt & \xrightarrow{X} & 0 \end{array}$$

ឧទាហរណ៍២

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ តើតម្លៃ X និង ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរ X ស្មើប៉ុន្មាន?

Random variables

ឧទាហរណ៍២

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ តើតម្លៃ X និង ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់អថេរ X ស្មើប៉ុន្មាន?

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(1,1) = 1/6 \times 1/6 \\
P(X=2) &= P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 2 \\
P(X=3) &= P(1,3) + P(3,1) = 1/6 \times 1/6 \times 2 \\
&\ldots\ldots \\
P(X=36) &= P(6,6) = 1/6 \times 1/6
\end{aligned}
$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ៦ / 33

Continuous and Discrete

និយមន័យ

- *អថេរចៃដន្យដាច់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងជាចំនួនកំណត់ ឬជាចំនួនរាប់បាន តែមិនកំណត់ (ដូចជាចំនួនគត់ជាដើម) ។
- *អថេរចៃដន្យជាប់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងរាប់មិនអស់ ស្ថិតក្នុងចន្លោះមួយ (គឺជាចន្លោះនៃចំនួនពិត, e.g., $[0, 1]$) ។

Random variables

Continuous and Discrete

និយមន័យ

- *អថេរចៃដន្យដាច់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងជាចំនួនកំណត់ ឬជាចំនួនរាប់បាន តែមិនកំណត់ (ដូចជាចំនួនគត់ជាដើម) ។
- *អថេរចៃដន្យជាប់* គឺជាអថេរចៃដន្យមួយ ដែលមានតម្លៃកើតឡើងរាប់មិនអស់ ស្ថិតក្នុងចន្លោះមួយ (គឺជាចន្លោះនៃចំនួនពិត, e.g., $[0, 1]$) ។

Example.

- The number of heads obtained in a series of coin tosses.
- The count of library books checked out per hour.
- Height and weight measurements.
- Time intervals or durations.
- Temperatures.

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

- *បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ* គឺជាការពិពណ៌នាអំពីរបៀប ដែលប្រូបាប៊ីលីតេ ត្រូវបានពង្រាយ លើតម្លៃដែលអាចកើតមានរបស់អថេរចៃដន្យមួយ។ វាផ្តល់នូវវិធីមួយ ក្នុងការយល់ពីលទ្ធភាព (likelihood) នៃលទ្ធផលផ្សេងៗពីគ្នា។
- Probability distribution មានពីរប្រភេទទៅតាមប្រភេទរបស់អថេរចៃដន្យដែរ៖
  1. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរដាច់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃជាក់លាក់
     - ★ គេតាងវាដោយ probability mass function (PMF): $P(X = x)$
     - ★ Ex.: ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយគ្រាប់ គេបាន PMF កំណត់ដោយ៖ $P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ។ល។

Probability distribution

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

- *បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ* គឺជាការពិពណ៌នាអំពីរបៀប ដែលប្រូបាប៊ីលីតេ ត្រូវបានពង្រាយ លើតម្លៃដែលអាចកើតមានរបស់អថេរចៃដន្យមួយ។ វាផ្តល់នូវវិធីមួយ ក្នុងការយល់ពីលទ្ធភាព (likelihood) នៃលទ្ធផលផ្សេងៗពីគ្នា។
- Probability distribution មានពីរប្រភេទទៅតាមប្រភេទរបស់អថេរចៃដន្យដែរ៖
  1. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដាច់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរដាច់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៃតម្លៃជាក់លាក់
     - ★ គេតាងវាដោយ probability mass function (PMF): $P(X = x)$
     - ★ Ex.: ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយគ្រាប់ គេបាន PMF កំណត់ដោយ៖ $P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ។ល។
  2. បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់៖ ប្រើសម្រាប់អថេរជាប់
     - ★ ពណ៌នាអំពីប្រូបាប៊ីលីតេនៅលើចន្លោះ
     - ★ គេតាងវាដោយ probability density function (PDF): $f(x)$
     - ★ Ex.: របាយឯកលក្ខណ៍មួយកំណត់លើចន្លោះ $[a, b]$ មាន PDF កំណត់ដោយ៖

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad \text{for} \quad a \leq x \leq b$$

Cumulative distribution function (cdf)

និយមន័យ

ចំពោះអថេរចៃដន្យ X គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

ហៅថា *អនុគមន៍បាយកើន* (cumulative distribution function) របស់អថេរ X ។

Probability distribution

Cumulative distribution function (cdf)

និយមន័យ

ចំពោះអថេរចៃដន្យ X គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

ហៅថា *អនុគមន៍បាយកើន* (cumulative distribution function) របស់អថេរ X ។

ចំណាំ.

- អក្សរធំ X: ជាអថេរចៃដន្យ (random variable)
- អក្សរតូច x: ជាចំនួនពិត (a real-valued number)
- $\leq$: តូចជាង ឬស្មើ (smaller than or equal to)

លក្ខណៈរបស់ CDF

សម្គាល់៖

- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ ចំពោះគ្រប់ $a < b$
- $P(X < b)$ មិនចាំបាច់ត្រូវស្មើនឹង $P(X \le b)$ ទេ
- $P(X = b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x)$

ដូច្នេះ គេបាន

1. $F(x)$ គឺជាអនុគមន៍មិនចុះមួយ i.e., បើ $x_1 < x_2$ នោះ $F(x_1) \le F(x_2)$
2. Limits at infinity:
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \iff P(X \le \infty) = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \iff P(X > -\infty) = 1$$
3. $F(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំ i.e., គ្រប់ស្វីតចុះ $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ ដែលរួមទៅរក x គេបាន៖
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(X \le x + \frac{1}{n}) = P(X \le x)$$

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេៈ (a) $P(X \le 2)$, (b) $P(X \le 35)$.

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេៈ (a) $P(X \leq 2)$, (b) $P(X \leq 35)$.
- Part (a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= P(1,1) + P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 3 \end{aligned}$$

Probability distribution

ឧទាហរណ៍.

- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ពីរ ត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេៈ (a) $P(X \leq 2)$, (b) $P(X \leq 35)$.
- Part (a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= P(1,1) + P(1,2) + P(2,1) = 1/6 \times 1/6 \times 3 \end{aligned}$$

- Part (b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 35) &= P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 35) \\ &= 1 - P(X = 36) \\ &= 1 - P(6,6) \\ &= 1 - 1/6 \times 1/6 \end{aligned}$$

pmf និង cdf

- ចំពោះអថេរចៃដន្យដាច់ X គេកំណត់ *probability mass function* (pmf) ដោយ៖

$$p(x) = P(X = x)$$

Note: pmf អាចសរសេរជា $f(x)$ ក៏បាន!

- ចំពោះអថេរដាច់ X មានស៊ីត $x_1, x_2, \ldots$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} p(x_i) > 0 & \text{ចំពោះ } i = 1, 2, \ldots \\ p(x) = 0 & \text{ចំពោះគ្រប់តម្លៃផ្សេងទៀតនៃ } x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 & \end{cases}$$

- ទំនាក់ទំនងរវាង pmf និង cdf ៖

$$F(a) = \sum_{\text{all } x \le a} p(x)$$

- បើគេស្គាល់ pmf នោះគេអាចគណនារក cdf បាន និងច្រាសមកវិញ។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?
- រក pmf:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(TTT) = (1/2)^3 = 1/8\\
P(X=1) &= P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8\\
P(X=2) &= P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8\\
P(X=3) &= P(HHH) = (1/2)^3 = 1/8
\end{aligned}
$$

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់ចំនួនបី។ តាង អថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X?
- រក pmf:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(TTT) = (1/2)^3 = 1/8\\
P(X=1) &= P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8\\
P(X=2) &= P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = (1/2)^3 \times 3 = 3/8\\
P(X=3) &= P(HHH) = (1/2)^3 = 1/8
\end{aligned}
$$

- រក cdf:

$$
F(a) = \begin{cases} 1/8, & 0 \le a < 1 \\ 1/2, & 1 \le a < 2 \\ 7/8, & 2 \le a < 3 \\ 1, & 3 \le a \end{cases}
$$

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le b < 3 \\ 1, & 3 \le b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

អថេរចៃដន្យដាច់

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le b < 3 \\ 1, & 3 \le b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

គេបាន៖

- $P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le b < 3 \\ 1, & 3 \le b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

គេបាន៖

- $P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 2) = P(X \le 2) - P(X < 2) = \frac{11}{12} - (\frac{1}{2} + \frac{2-1}{4}) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$

អថេរចៃដន្យដាច់

ឧទាហរណ៍.

- គេមានអនុគមន៍របាយរបស់អថេរ X កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le b < 3 \\ 1, & 3 \le b \end{cases}$$

ចូររក $P(X = i), i = 1, 2, 3$?

គេបាន៖

- $P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 2) = P(X \le 2) - P(X < 2) = \frac{11}{12} - (\frac{1}{2} + \frac{2-1}{4}) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$
- $P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X < 3) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

Ham Karim (RUPP) អថេរចៃដន្យដាច់ TUP-BA Probability ១៤ / 33

សង្ខេបឡើងវិញ

- *អថេរចៃដន្យ* (Random Variable)
  - អថេរចៃដន្យ X គឺជាអនុគមន៍ កំណត់លើលំហសំណាក S ដោយ
    $$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$
  - មាន cdf :
    $$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \text{គ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$
- *អថេរចៃដន្យដាច់* (Discrete random variable)
  - យកតម្លៃអាចកើតឡើង ជាចំនួនរាប់បានមួយ
  - មាន pmf :
    $$p_X(x) = P(X = x)$$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$
  - $F(a) = \sum_{\text{គ្រប់ } x \leq a} p(x)$

អនុវត្តន៍

1. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ចំនួនពីរ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាផលគុណនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ។ តើតម្លៃ X និងប្រូបាប៊ីលីតេរបស់វា ស្មើប៉ុន្មាន?
   ចូរគណនា (a) $P(X \leq 2)$, (b) $P(X \leq 35)$?
2. កាក់ចំនួនបីត្រូវបានគេបោះ។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនចេញខាងរូប ។ ចូរសរសេរ pmf និង cdf របស់អថេរ X ។
3. ឧបមាថា អនុគមន៍របាយរបស់អថេរចៃដន្យ X កំណត់ដោយៈ
   $$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ \frac{b}{4}, & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4}, & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \leq b < 3 \\ 1, & 3 \leq b \end{cases}$$
   ចូរគណនា $P(X = i), i = 1, 2, 3.$

សង្ឃឹមគណិត

និយមន័យ

តម្លៃ *សង្ឃឹមទុក* ឬ (*មធ្យម*) របស់អថេរចៃដន្យដាច់មួយ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x:\ p(x)>0} x \cdot P(X=x) \\
&= \sum_{x:\ p(x)>0} xp(x)
\end{aligned}
$$

- $E[X]$ គឺជាតម្លៃធម្យមទំងន់របស់តម្លៃដែលអាចកើតឡើង x ដែល អថេរ X កំណត់យក។ តម្លៃនីមួយៗ ត្រូវបានវាស់ទំងន់ដោយតម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេ $p(x)$។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ indicator $0-1$ ដែល

$$
X = \begin{cases} 1 & \text{បើចេញខាងរូប} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}
$$

ចូរគណនា $\mu = E[X]$?

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ indicator $0-1$ ដែល

$$X = \begin{cases} 1 & \text{បើចេញខាងរូប} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

ចូរគណនា $\mu = E[X]$?

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

សង្ឃឹមគណិត (Expectation)

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ indicator $0-1$ ដែល

$$X = \begin{cases} 1 & \text{បើចេញខាងរូប} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

ចូរគណនា $\mu = E[X]$?

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

- ជាទូទៅ ចំពោះអថេរអាំងឌីកាទ័រ $X = \delta_A$ ឬតាងដោយ $\mathbf{1}_A$ គេកំណត់

$$X = \begin{cases} 1 & \text{បើព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ កើតឡើង} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ១៨ / 33

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ។ គេកំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ចេញខាងរូបស្មើ p ។ តាង X ជាអនុគមន៍ indicator $0-1$ ដែល
$$X = \begin{cases} 1 & \text{បើចេញខាងរូប} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$
ចូរគណនា $\mu = E[X]$?
$$E[X] = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$$
- ជាទូទៅ ចំពោះអថេរអាំងឌីកាទ័រ $X = \delta_A$ ឬតាងដោយ $\mathbf{1}_A$ គេកំណត់
$$X = \begin{cases} 1 & \text{បើព្រឹត្តិការណ៍ } A \text{ កើតឡើង} \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$
តម្លៃសង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរ X ស្មើនឹងប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង។
$$E[X] = 1\cdot P(A) + 0\cdot P(A^c) = P(A)$$

ឧទាហរណ៍

យកអថេរចៃដន្យ X តាងឱ្យចំណាត់ថ្នាក់ (GP) ដែលនិស្សិតខ្លះទទួលបាននៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ។ យក $X = \{0,1,2,3,4\}$ និងឧបមាថា PMF របស់វាកំណត់ដូចតទៅ៖
$$p(0) = 0.05,\quad p(1) = 0.05,\quad p(2) = 0.3,\quad p(3) = 0.4$$
ចូរគណនាសង្ឃឹមគណិតនៃចំណាត់ថ្នាក់ $E[X]$

ឧទាហរណ៍

យកអថេរចៃដន្យ X តាងឱ្យចំណាត់ថ្នាក់ (GP) ដែលនិស្សិតខ្លះទទួលបាននៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ។ យក $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ និងឧបមាថា PMF របស់វាកំណត់ដូចតទៅ៖

$$p(0) = 0.05, \quad p(1) = 0.05, \quad p(2) = 0.3, \quad p(3) = 0.4$$

ចូរគណនាសង្ឃឹមគណិតនៃចំណាត់ថ្នាក់ $E[X]$

សង្ឃឹមគណិតនៃអនុគមន៍របស់អថេរចៃដន្យដាច់

- បើ X គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ g គឺជាអនុគមន៍មានតម្លៃជាចំនួនពិត នោះតម្លៃសង្ឃឹមគណិត (ឬតម្លៃរំពឹងទុក) របស់អថេរ $Y = g(X)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[g(X)] = \sum_{x | p_X(x) > 0} g(x) \cdot p_X(x)$$

សង្ឃឹមគណិតនៃអនុគមន៍របស់អថេរចៃដន្យដាច់

- បើ X គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ g គឺជាអនុគមន៍មានតម្លៃជាចំនួនពិត នោះតម្លៃសង្ឃឹមគណិត (ឬតម្លៃរំពឹងទុក) របស់អថេរ $Y = g(X)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[g(X)] = \sum_{x \mid p_X(x)>0} g(x) \cdot p_X(x)$$

- *លក្ខណៈរបស់សង្ឃឹមគណិត.*
  (i) បើ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន៖

$$E[aX + b] = aE[X] + b \qquad \text{(អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ)}$$

សង្ឃឹមគណិត (Expectation)

សង្ឃឹមគណិតនៃអនុគមន៍របស់អថេរចៃដន្យដាច់

- បើ X គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់ ហើយ g គឺជាអនុគមន៍មានតម្លៃជាចំនួនពិត នោះតម្លៃសង្ឃឹមគណិត (ឬតម្លៃរំពឹងទុក) របស់អថេរ $Y = g(X)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[g(X)] = \sum_{x \mid p_X(x)>0} g(x) \cdot p_X(x)$$

- *លក្ខណៈរបស់សង្ឃឹមគណិត.*
  (i) បើ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន៖

$$E[aX + b] = aE[X] + b \qquad \text{(អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ)}$$

  (ii) ចំពោះអថេរចៃដន្យ X និង Y៖

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

សម្រាយ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- PMF របស់អថេរចៃដន្យ X និង Y កំណត់ដោយ៖

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

- គេបាន PMF របស់អថេរចៃដន្យ X និង Y អាចកំណត់បានចេញពី PMF: $p(x,y)$ ដោយ៖

$$p_X(x) = P(X=x) = \sum_y p(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_x p(x,y)$$

- គេបានកន្សោម $E(X+Y)$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y)p(x,y) = \sum_x \sum_y [x \cdot p(x,y) + y \cdot p(x,y)] \\ &= \sum_x \sum_y x \cdot p(x,y) + \sum_x \sum_y y \cdot p(x,y) \\ &= \sum_x x \cdot \sum_y p(x,y) + \sum_y y \cdot \sum_x p(x,y) = \sum x \cdot p_X(x) + \sum_y y \cdot p_Y(y) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

- យក X ជាអថេរចៃដន្យដែលយកតម្លៃណាមួយក្នុងចំណោម $-1, 0$ និង 2 និងមានប្រូបាប៊ីលីតេរៀងគ្នា៖

$$P(X=-1) = \frac{1}{5}, P(X=0) = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{3}{5}$$

1. ចូរគណនា $E[X^3]$?

   Ans. តាង $Y = X^3$ គេបាន៖

ឧទាហរណ៍

- យក X ជាអថេរចៃដន្យដែលយកតម្លៃណាមួយក្នុងចំណោម $-1, 0$ និង 2 និងមានប្រូបាបទីលីតេរៀងគ្នា៖

$$P(X=-1)=\frac{1}{5}, P(X=0)=\frac{1}{5}, P(X=2)=\frac{3}{5}$$

1. ចូរគណនា $E[X^3]$?
   Ans. តាង $Y=X^3$ គេបាន៖

2. គណនា (a) $E[2X^2]$, (b) $E[4X^2-1]$
   Ans. តាង $Y=X^2$ គេបាន៖

សង្ខេបឡើងវិញសង្ឃឹមគណិត

សង្ឃឹមគណិត តាងដោយ μ ឬ $E(X)$

- **អថេរចៃដន្យដាច់ DRV**: $E[X]=\sum_{\text{all } x} x\cdot p(x)$
- **អនុគមន៍**: $E[g(X)]=\sum_{\text{all } x} g(x)\ p(x)$
- **អនុគមន៍អាំងឌីកាទ័រ**: $E[\delta_A]=P(A)$ ដែល δ_A ជាអនុគមន៍អាំងឌីកាទ័រ (indicator function)
- **Linear function**: $E[aX+b]=aE[X]+b$
- **Constants**: $E[c]=c$ បើ c ជាចំនួនថេរ
- ចំពោះអថេរចៃដន្យដាច់ X និង Y

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance) និង គម្លាតស្តង់ដា (Standard deviation)

- តម្លៃរំពឹងទុក (ឬ មធ្យម ឬ តម្លៃសង្ឃឹមគណិត) $\mu = E[X]$ ផ្តល់លទ្ធផលជាមធ្យមទម្ងន់នៃតម្លៃដែលអាចកើតឡើងរបស់អថេរចៃដន្យ X ។

និយមន័យ

Variance គឺជារង្វាស់កម្រិតប្រែប្រួល (ឬ កម្រិតរប៉ាយ) របស់អថេរចៃដន្យ X កំណត់ដោយ៖

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

- បន្ទាប់ពីសម្រួល គេបាន

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance) និង គម្លាតស្តង់ដា (Standard deviation)

- តម្លៃរំពឹងទុក (ឬ មធ្យម ឬ តម្លៃសង្ឃឹមគណិត) $\mu = E[X]$ ផ្តល់លទ្ធផលជាមធ្យមទម្ងន់នៃតម្លៃដែលអាចកើតឡើងរបស់អថេរចៃដន្យ X ។

និយមន័យ

Variance គឺជារង្វាស់កម្រិតប្រែប្រួល (ឬ កម្រិតរប៉ាយ) របស់អថេរចៃដន្យ X កំណត់ដោយ៖

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

- បន្ទាប់ពីសម្រួល គេបាន

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

និយមន័យ

គម្លាតស្តង់ដា (Standard Deviation) គឺជាឫសការេរបស់វ៉ារ្យ៉ង់

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance)

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ២៥ / 33

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2.5$$

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2.5$$

$$E[X^2] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} + 16 \times \frac{1}{4} = 7.5$$

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2.5$$

$$E[X^2] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} + 16 \times \frac{1}{4} = 7.5$$

$$Var(X) = 7.5 - 2.5^2 = 1.25$$

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance)

ឧទាហរណ៍.

គណនាគម្លាតស្តង់ដានៃការបោះឡុកឡាក់មួយស្មើសាច់មាន៤ជ្រុង។

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2.5$$

$$E[X^2] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} + 16 \times \frac{1}{4} = 7.5$$

$$Var(X) = 7.5 - 2.5^2 = 1.25$$

$$SD(X) = \sqrt{Var[X]} = 1.12$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ២៥ / 33

ឧទាហរណ៍

- តាងអថេរចៃដន្យ $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ដែលមាន PMF កំណត់ដោយ

$$p(0) = 0.05, \quad p(1) = 0.05, \quad p(2) = 0.3, \quad p(3) = 0.4$$

គណនា $\mathrm{Var}[X]$?

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance)

ឧទាហរណ៍

- តាងអថេរចៃដន្យ $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ដែលមាន PMF កំណត់ដោយ

$$p(0) = 0.05, \quad p(1) = 0.05, \quad p(2) = 0.3, \quad p(3) = 0.4$$

គណនា $\mathrm{Var}[X]$?

Ans. គេមាន

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

- គណនា $p(4) = 1 - p(0) - p(1) - p(2) - p(3) = 0.2.$

- គណនា $E[X]$ និង $E[X^2]$

$$E[X] = 0 \times 0.05 + 1 \times 0.05 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.2 = 2.65$$

$$E[X^2] = 0^2 \times 0.05 + 1^2 \times 0.05 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.4 + 4^2 \times 0.2 = 8.05$$

ដូច្នេះ

$$\mathrm{Var}[X] = E(X^2) - (E[X])^2 = 8.05 - 2.65^2 = 1.0275$$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនា $\mathrm{Var}(X)$ បើ

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b)$$

Ans.

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance)

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនា $\mathrm{Var}(X)$ បើ

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b)$$

Ans.

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ២៧ / 33

លក្ខណៈរបស់វ៉ារ្យ៉ង់

- $\mathrm{Var}(X) \geq 0$
- $\mathrm{Var}(X) = 0$ លុះត្រាតែ X ជាចំនួនថេរ
- បើ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន

$$\boxed{\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)}$$

ដូច្នេះ

- $\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X)$ (b ជាចំនួនថេរ)
- $\mathrm{Var}(b) = 0$ (b ជាចំនួនថេរ)

ឧទាហរណ៍

បើ $E[X] = 1$ និង $Var(X) = 5$ ចូរគណនា

(a) $E[(2 + X)^2]$

(b) $Var(4 + 3X)$

ឧទាហរណ៍

បើ $E[X] = 1$ និង $Var(X) = 5$ ចូរគណនា

(a) $E[(2+X)^2]$

(b) $Var(4+3X)$

Ans.

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

$$E[aX+b] = aE[X] + b;\ Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$$

Part (a):

$$\begin{aligned} E[(2+X)^2] &= Var(2+X) + (E[2+X]^2) \\ &= Var(X) + (2+E[X])^2 = 5+9 = 14 \end{aligned}$$

Part (b)

$$Var(4+3X) = 3^2 \times Var(X) = 9 \times 5 = 45$$

វ៉ារ្យ៉ង់កំណត់បានភាពរប៉ាយរបស់អថេរ X

X_1 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-1	1
$p_{X_1}(x)$	$1/2$	$1/2$

X_2 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-2	2
$p_{X_2}(x)$	$1/2$	$1/2$

វ៉ារ្យ៉ង់កំណត់បានភាពរប៉ាយរបស់អថេរ X

X_1 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-1	1
$p_{X_1}(x)$	$1/2$	$1/2$

X_2 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-2	2
$p_{X_2}(x)$	$1/2$	$1/2$

$$\mu_1 = 0, \ \sigma_1^2 = E[X_1^2] - 0^2 = 1, \ \sigma_1 = 1$$

វ៉ារ្យ៉ង់ (Variance)

វ៉ារ្យ៉ង់កំណត់បានភាពរប៉ាយរបស់អថេរ X

X_1 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-1	1
$p_{X_1}(x)$	$1/2$	$1/2$

X_2 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

x	-2	2
$p_{X_2}(x)$	$1/2$	$1/2$

$$\mu_1 = 0, \ \sigma_1^2 = E[X_1^2] - 0^2 = 1, \ \sigma_1 = 1$$

$$\mu_2 = 0, \ \sigma_2^2 = E[X_2^2] - 0^2 = 4, \ \sigma_2 = 2$$

វ៉ារ្យ៉ង់កំណត់បានភាពរប៉ាយរបស់អថេរ X

X_1 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

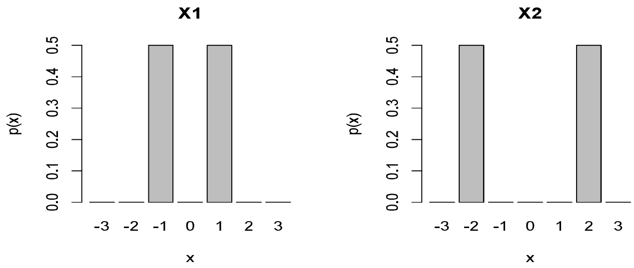
x	-1	1
$p_{X_1}(x)$	$1/2$	$1/2$

X_2 គឺជាអថេរចៃដន្យដាច់មាន pmf ៖

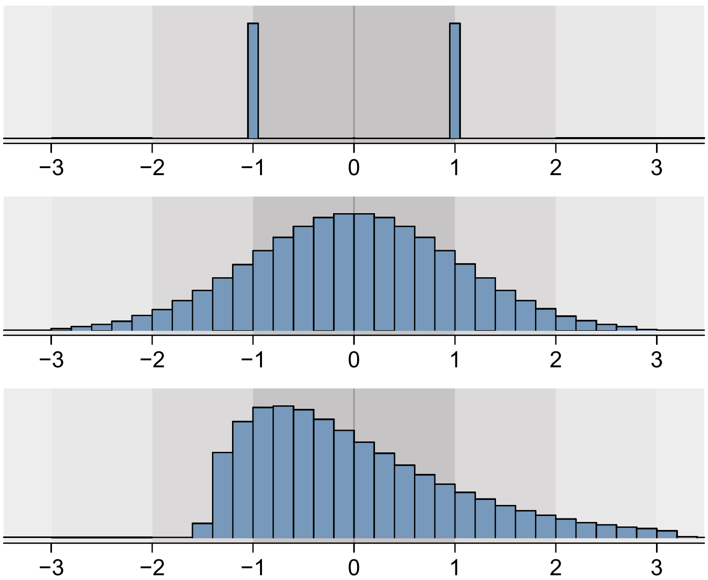
x	-2	2
$p_{X_2}(x)$	$1/2$	$1/2$

$$\mu_1 = 0, \ \sigma_1^2 = E[X_1^2] - 0^2 = 1, \ \sigma_1 = 1$$
$$\mu_2 = 0, \ \sigma_2^2 = E[X_2^2] - 0^2 = 4, \ \sigma_2 = 2$$

សន្និដ្ឋាន៖ បើវ៉ារ្យ៉ង់កើនឡើង (ឬ sd កើនឡើង) នោះកម្រិតរប៉ាយកើនឡើងដែរ។



សង្កេតរបាយមាន SD $= 1$



របាយប៊ែរនូយី (Bernoulli distribution)

ពិសោធន៍សាកល្បងមួយ មានលទ្ធផលពីរយ៉ាងគឺៈ ជោគជ័យ (1) ឬ បរាជ័យ (0)។ តាងអថេរចៃដន្យ X ជាចំនួនជោគជ័យក្នុងការសាកល្បងតែមួយលើក។

និយមន័យ

អថេរចៃដន្យ X មាន *របាយ Bernoulli* បើ

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$$

ដែល $0 \leq p \leq 1$ គឺជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃលទ្ធផលជោគជ័យ ។

- អនុគមន៍ pmf របស់របាយ Bernoulli

  $X \sim \mathrm{Ber}(p) \iff p(1)=p,\ p(0)=1-p$
- រកឃើញដោយគណិតវិទូរជនជាតិស្វីស គឺលោក Jacob Bernoulli ។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ និងទទួលលទ្ធផលចេញខាងរូប : $p=0.5$ ។
- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយមានមុខ 6 និងចេញលេខ 6 : $p=1/6$ ។
- អ្នករៀនបាននិទ្ទេស A នៅក្នុងថ្នាក់នេះ : $p \in [0,1]$ ។

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ និងទទួលលទ្ធផលចេញខាងរូប : $p = 0.5$ ។
- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយមានមុខ 6 និងចេញលេខ 6 : $p = 1/6$ ។
- អ្នករៀនបាននិទ្ទេស A នៅក្នុងថ្នាក់នេះ : $p \in [0, 1]$ ។

មធ្យម និង វ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរ $X \sim \mathrm{Ber}(p)$

របាយប៊ែរនូយី និងរបាយទ្វេធា

ឧទាហរណ៍.

- គេបោះកាក់ស្មើសាច់មួយ និងទទួលលទ្ធផលចេញខាងរូប : $p = 0.5$ ។
- គ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយមានមុខ 6 និងចេញលេខ 6 : $p = 1/6$ ។
- អ្នករៀនបាននិទ្ទេស A នៅក្នុងថ្នាក់នេះ : $p \in [0, 1]$ ។

មធ្យម និង វ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរ $X \sim \mathrm{Ber}(p)$

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$
$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ៣៣ / 33

អថេរចៃដន្យដាច់

ហាំ ការីម

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

TUP-BA

មាតិការ

អថេរចៃដន្យជាប់ (Continuous random variable)s

- *អថេរចៃដន្យជាប់* X មួយអាចយកតម្លៃក្នុងចន្លោះ $(-\infty, \infty)$ ។

អថេរចៃដន្យជាប់

អថេរចៃដន្យជាប់ (Continuous random variable)s

- *អថេរចៃដន្យជាប់* X មួយអាចយកតម្លៃក្នុងចន្លោះ $(-\infty, \infty)$ ។

និយមន័យ

X គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ បើមានអនុគមន៍ **មិនអវិជ្ជមាន** f មួយ កំណត់បានគ្រប់ $x \in (-\infty, \infty)$ ដែលគ្រប់សំណុំរង B របស់ចំនួនពិត (i.e., $B \in \mathbb{R}$) គេបាន ៖

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$$

អនុគមន៍ f ហៅថា *អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ* (probability density function) ហៅកាត់ (pdf) របស់អថេរចៃដន្យ X ។

អថេរចៃដន្យជាប់ (Continuous random variable)s

- *អថេរចៃដន្យជាប់* X មួយអាចយកតម្លៃក្នុងចន្លោះ $(-\infty, \infty)$ ។

និយមន័យ

X គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ បើមានអនុគមន៍ **មិនអវិជ្ជមាន** f មួយ កំណត់បានគ្រប់ $x \in (-\infty, \infty)$ ដែលគ្រប់សំណុំរង B របស់ចំនួនពិត (i.e., $B \in \mathbb{R}$) គេបាន ៖

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$$

អនុគមន៍ f ហៅថា *អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ* (probability density function) ហៅកាត់ (pdf) របស់អថេរចៃដន្យ X ។

ឧទាហរណ៍.

- បរិមាណភ្លៀងធ្លាក់ក្នុង១ឆ្នាំ។
- អាយុកាលប្រើប្រាស់ឡានដំបូងរបស់អ្នក។
- បរិមាណភេសជ្ជៈដែលប្រើប្រាស់ក្នុងថ្ងៃប្រកួតកីឡា ។

pdf and cdf

- ដើម្បីឱ្យ pdf កំណត់បាន (ក្រៅពីភាពមិនអវិជ្ជមាន) ៖

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

pdf and cdf

- ដើម្បីឱ្យ pdf កំណត់បាន (ក្រៅពីភាពមិនអវិជ្ជមាន) ៖

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

- អនុគមន៍ cdf របស់អថេរថៃដន្យជាប់ កំណត់ដោយ៖

$$F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

អថេរថៃដន្យជាប់

pdf and cdf

- ដើម្បីឱ្យ pdf កំណត់បាន (ក្រៅពីភាពមិនអវិជ្ជមាន) ៖

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

- អនុគមន៍ cdf របស់អថេរថៃដន្យជាប់ កំណត់ដោយ៖

$$F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

- ចំពោះអថេរថៃដន្យជាប់ ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ចំណុចទោលមួយ ត្រូវស្មើសូន្យ៖

$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$P(X < a) = P(X \le a) - P(X = a) = F(a)$$

pdf and cdf

- ដើម្បីឱ្យ pdf កំណត់បាន (ក្រៅពីភាពមិនអវិជ្ជមាន) ៖

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

- អនុគមន៍ cdf របស់អថេរចៃដន្យជាប់ កំណត់ដោយ៖

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

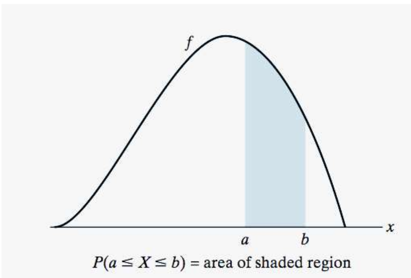
- ចំពោះអថេរចៃដន្យជាប់ ប្រូបាប៊ីលីតេរបស់ចំណុចទោលមួយ ត្រូវស្មើសូន្យ៖

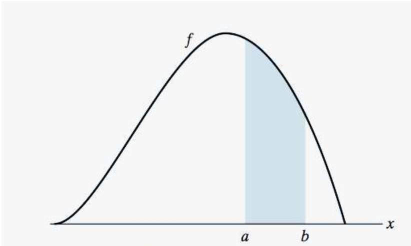
$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a) = F(a)$$

- ប្រូបាប៊ីលីតេនៅលើចន្លោះមួយ៖

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

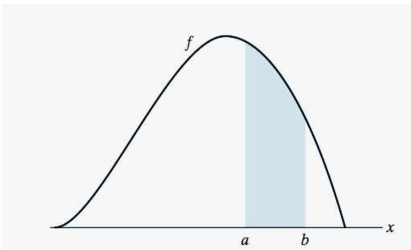




$P(a \leq X \leq b)$ = area of shaded region

- ទំនាក់ទំនងរវាង pdf និង cdf នៃអថេរចៃដន្យជាប់៖ បើស្គាល់ pdf នោះ
$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

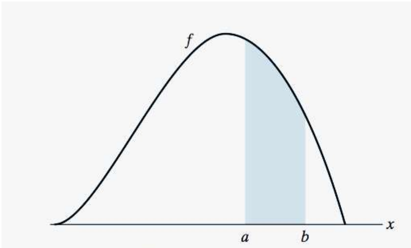
អថេរចៃដន្យជាប់



$P(a \leq X \leq b)$ = area of shaded region

- ទំនាក់ទំនងរវាង pdf និង cdf នៃអថេរចៃដន្យជាប់៖ បើស្គាល់ pdf នោះ
$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

- តើធ្វើដូចម្ដេចដើម្បីរក pdf បើគេស្គាល់ cdf?



$P(a \le X \le b)$ = area of shaded region

- ទំនាក់ទំនងរវាង pdf និង cdf នៃអថេរចៃដន្យជាប់៖ បើស្គាល់ pdf នោះ

$$F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

- តើធ្វើដូចម្ដេចដើម្បីរក pdf បើគេស្គាល់ cdf?

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

ឧទាហរណ៍.

ឧបមាថា X គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ មាន pdf កំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

$$f(x) = \begin{cases} c(8x - 4x^3), & \text{បើ } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

- ចូររកតម្លៃ c?

ឧទាហរណ៍.

ឧបមាថា X គឺជាអថេរចៃដន្យជាប់ មាន pdf កំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

$$f(x) = \begin{cases} c(8x - 4x^3), & \text{បើ } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

- ចូររកតម្លៃ c?

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 c(8x - 4x^3)\,dx \\ &= c\left(4x^2 - x^4\Big|_0^1\right) \\ 3c = 1 &\implies c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ការបកស្រាយ pdf

ចំពោះតម្លៃ $h > 0$ តូចមួយ គេបាន៖

$$\begin{aligned} P\left(x - \frac{h}{2} \leq X \leq x + \frac{h}{2}\right) &= \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\,dt \\ &\approx \left[(x + \frac{h}{2}) - (x - \frac{h}{2})\right] f(x) \\ &= h \cdot f(x) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ $f(x)$ កាន់តែធំ គេថាអថេរចៃដន្យជាប់ X កាន់តែ ‘ខិតជិត” តម្លៃ x ។

សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់

- រំលឹក៖ សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ X មាន pmf ស្មើ $p(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[X] = \sum_{\text{all } x} xp(x)$$

សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់

- រំលឹក៖ សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ X មាន pmf ស្មើ $p(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[X] = \sum_{\text{all } x} xp(x)$$

- គេកំណត់សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យជាប់ X មាន pdf ស្មើ $p(x)$ ដោយ៖

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់

- រំលឹក៖ សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ X មាន pmf ស្មើ $p(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[X] = \sum_{\text{all } x} xp(x)$$

- គេកំណត់សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យជាប់ X មាន pdf ស្មើ $p(x)$ ដោយ៖

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

- វ៉ារ្យ៉ង់ និង គម្លាតស្តង់ដា ៖

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2, \quad SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Definition:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

លក្ខណៈរបស់ $E[X]$ ចំពោះ CRV

- រំលឹក៖ សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ $Y = g(X)$ មាន pmf ស្មើ $p(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$E[g(X)] = \sum_{\text{all } x} g(x)p(x)$$

លក្ខណះរបស់ $E[X]$ ចំពោះ CRV

- រំលឹកៈ សង្ឃឹមគណិតរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ $Y = g(X)$ មាន pmf ស្មើ $p(x)$ កំណត់ដោយៈ

$$E[g(X)] = \sum_{\text{all } x} g(x)p(x)$$

- ដូចគ្នាចំពោះអថេរចៃដន្យជាប់ $Y = g(X)$ មាន pdf ស្មើ $f(x)$ ៖

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

លក្ខណះរបស់ $E[X]$ ចំពោះ CRV — ត

ចំពោះអថេរចៃដន្យជាប់ X និង Y គេបានៈ

- ផលបូកអថេរចៃដន្យ

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- បើ a និង b ជាចំនួនថេរ គេបាន

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$
$$Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$$

ឧទាហរណ៍

ចូររកមធ្យម និងវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមាន pdf កំណត់ខាងក្រោម៖

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{បើ } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

Ans.

សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យ៉ង់

ឧទាហរណ៍

ចូររកមធ្យម និងវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមាន pdf កំណត់ខាងក្រោម៖

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{បើ } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

Ans.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \\ &= \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ham Karim (RUPP) TUP-BA Probability ១១ / 13

ឧទាហរណ៍

ចូររកមធ្យម និងវ៉ារ្យ៉ង់របស់អថេរចៃដន្យជាប់ X ដែលមាន pdf កំណត់ខាងក្រោម៖

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{បើ } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

Ans.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (2/3)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - 4/9 = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 - 4/9 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

Suppose that X is a continuous random variable whose pdf is

$$f(x) = \begin{cases} c(8x - 4x^3) & \text{បើ } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

- Find $P(X > 0.5)$.

Ans.

ឧទាហរណ៍

Suppose that X is a continuous random variable whose pdf is

$$f(x) = \begin{cases} c(8x - 4x^3) & \text{បើ } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

- Find $P(X > 0.5)$.

Ans.

$$\begin{aligned} P(X > 0.5) &= \int_{0.5}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{0.5}^{1} \frac{8x - 4x^3}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(4x^2 - x^4\Big|_{0.5}^{1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[3 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{3} \times \frac{33}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

Suppose that X is a continuous random variable whose pdf is

$$f(x) = \begin{cases} c(8x - 4x^3) & \text{បើ } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

- Find the cdf function : $F(x)$.

Ans.

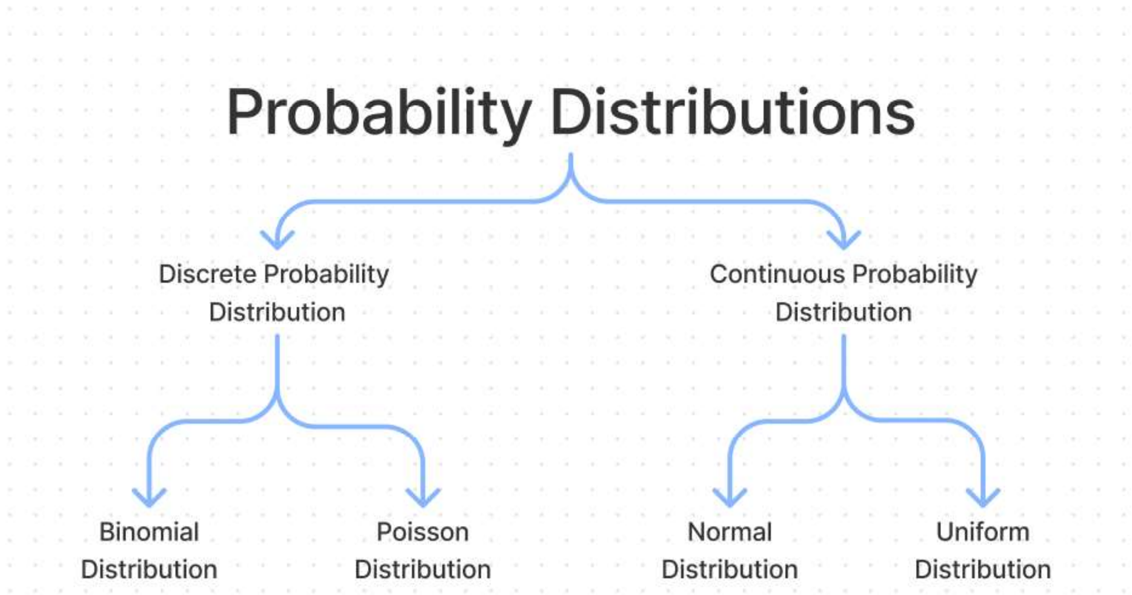
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \implies c = 1/3$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{4x^2 - x^4}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Note that $F(0) = 0$ and $F(1) = 1$.

បំណែងចែកប្រូបាប

ភាគ១



ការពិសោធន៍ Bernoulli

- ការពិសោធន៍ជាច្រើនគឺ មានលក្ខណៈតែ២យ៉ាង នៅក្នុងធម្មជាតិ។ ជាឧទាហរណ៍ កាក់ដែលបោះកាក់ វាចេញ 'ផ្កាប់' ឬ 'ផ្ងារ' របស់ដែលផលិតអាច 'ខូច' ឬ 'មិនខូច' ការឆ្លើយតបចំពោះសំណួរមួយអាចជា 'បាទ' ឬ 'ទេ' ស៊ុតមួយបាន 'ញាស់' ឬ 'មិនញាស់' ការសម្រេចចិត្តគឺ 'បាទ' ឬ 'ទេ' ជាដើម។
- ក្នុងករណីបែបនេះ ចាត់ទុកលទ្ធផលមួយក្នុងចំណោមលទ្ធផលថា 'ជោគជ័យ' និងអ្នកផ្សេងទៀត "បរាជ័យ" ។ ឧទាហរណ៍ក្នុងការបោះកាក់មួយប្រសិនបើចេញផ្ងារត្រូវបានចាត់ទុកថាជាជោគជ័យ បន្ទាប់មកការចេញផ្កាប់ គឺជាការបរាជ័យ។

ការពិសោធន៍ Bernoulli

- រាល់ពេលដែលយើងបោះកាក់ ឬបង្វិលគ្រាប់ឡុកឡាក់ ឬធ្វើការពិសោធន៍ផ្សេងៗ យើងហៅវាថា ជាការពិសោធន៍។
- ប្រសិនបើកាក់មួយត្រូវបានបោះ ឧបមាថា4 ដង ចំនួននៃការពិសោធន៍នេះគឺ 4 ដែលមួយលើកៗមានពីរយ៉ាងពិតប្រាកដគឺជោគជ័យ ឬបរាជ័យ។
- លទ្ធផលនៃការពិសោធន៍ណាមួយគឺឯករាជ្យពីគ្នាៗ នៅក្នុងការសាកល្បងនីមួយៗ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃភាពជោគជ័យ ឬបរាជ័យ នៅតែថេរ។ ការពិសោធន៍បែបឯករាជ្យបែបនេះដែលមានលទ្ធផលតែពីរជាធម្មតាហៅថា 'ជោគជ័យ' ឬ 'បរាជ័យ' ត្រូវបានគេហៅថា ការសាកល្បង Bernoulli ។

ការពិសោធន៍ Bernoulli

- និយមន័យ៖ការសាកល្បងនៃការពិសោធន៍ចៃដន្យត្រូវបានគេហៅថាការសាកល្បង Bernoulli ប្រសិនបើពួកគេបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖
  i. មានចំនួនកំណត់នៃការពិសោធន៍
  ii. ការពិសោធន៍ឯករាជ្យពីគ្នា
  iii. ការពិសោធន៍នីមួយៗមានលទ្ធផលពិតប្រាកដពីរ គឺ ជោគជ័យ ឬបរាជ័យ។
  iv. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃភាពជោគជ័យនៅតែមានដូចគ្នានៅក្នុងការពិសោធន៍នីមួយៗ។

ការពិសោធន៍ Bernoulli

- ឧទាហរណ៍ទូទៅបំផុតនៃការពិសោធន៍Bernoulli គឺការបង្វិលកាក់។ ការបង្វិលកាក់នីមួយៗមានលទ្ធផលដែលអាចកើតមានតែពីរប៉ុណ្ណោះ ផ្កាប់ ឬផ្ងារ។ ប្រសិនបើយើងចាត់ទុកផ្កាប់ថាជាជោគជ័យ នោះផ្ងារនឹងក្លាយទៅជាបរាជ័យដោយស្វ័យប្រវត្តិ ហើយផ្ទុយទៅវិញក៏ពិតដែរ។
- ឧទាហរណ៍ ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ ដើម្បីទទួលបានលេខជាក់លាក់ណាមួយក៏ជាឧទាហរណ៍មួយនៃការសាកល្បងរបស់ Bernoulli ដែរ។

អថេរចៃដន្យ Bernoulli

និយមន័យ (**អថេរចៃដន្យប៊ែរនូយី**). សម្រាប់ពិសោធន៍ប៊ែរនូយីដែលលទ្ធផលមួយជាជោគជ័យ និងមួយទៀតជាបរាជ័យ យក $p,\ 0 < p < 1$ ជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលទទួលបានជោគជ័យ។ កំណត់អថេរចៃដន្យ X ដែល

$$X = \begin{cases} 0 & \text{បើលទ្ធផលជាបរាជ័យ} \\ 1 & \text{បើលទ្ធផលជាជោគជ័យ} \end{cases}$$

នោះ X អថេរចៃដន្យប៊ែរនូយីដែលមានអនុគមន៍ម៉ាសប្រូបាប៊ីលីតេ

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$$

ឬ

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1$$

និមិត្តសញ្ញា $X \sim \mathcal{B}er(p)$ មានន័យថា X អថេរចៃដន្យប៊ែរនូយីដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p ។

អថេរចៃដន្យ Bernoulli

□

ឧទាហរណ៍ 5.16. 1. បោះកាក់ស្មើសាច់មួយ 1 ដង។ កំណត់អថេរចៃដន្យ X_1 ដែល $X_1 = 1$ បើកាក់ចេញ H និង $X_1 = 0$ បើកាក់ចេញ T នោះ $X_1 \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{2}\right)$

2. បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់ 1 ដង។ កំណត់អថេរចៃដន្យ X_2 ដែល $X_2 = 1$ បើគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខធំជាង 4 និង $X_2 = 0$ ផ្សេងពីនេះ នោះ $X_2 \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{3}\right)$

ឧទាហរណ៍ 5.17. សន្មតថាថ្នាក់មួយប្រលងជាប់និទ្ទេស C ឬគ្រាន់បើជាងនេះកាលពីការប្រលងលើកមុនដោយប្រូបាប៊ីលីតេ 0.75។ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែល $X = 1$ បើសិស្សម្នាក់ប្រលងជាប់ និង $X = 0$ បើសិស្សម្នាក់ប្រលងធ្លាក់នោះ

$$X \sim \mathcal{B}er(0.75)$$

អថេរចៃដន្យ Bernoulli

- សង្ឃឹមគណិតនិងវ៉ារ្យង់ នៃអថេរចៃដន្យ Bernoulli
  - $\mathbb{E}[X] = p$
  - $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

ព្រោះ

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{1} xp(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=0}^{1} x^2 p(x) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

ពិសោធន៍ទ្វេធា (Binomial Trial)

និយមន័យ (**ពិសោធន៍ទ្វេធា**). ពិសោធន៍ទ្វេធាជាពិសោធន៍ដែល

- ចំនួនពិសោធន៍ជាចំនួនកំណត់ n
- ពិសោធន៍នីមួយៗមានលទ្ធផលតែពីរ៖ ជោគជ័យ និងបរាជ័យ
- ពិសោធន៍នីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នា
- ប្រូបាប៊ីលីតេទទួលបានជោគជ័យក្នុងពិសោធន៍នីមួយៗស្មើនឹង $p, 0 < p < 1$

ការពិសោធន៍ទ្វេធា

អនុវត្តន៍ ៖ អ្នកលេងបាល់ទាត់ម្នាក់ ទាត់បាល់តម្រង់រកទីគោលដៅ ចំនួន ៧ ដងដែលមានប្រូបាប៊ីលីតេស្មើ 0.6 នៃការទទួលទាត់ចូលទី ក្នុងម្តងៗ ។ ចូរកំណត់ថាចំនួននៃការពិសោធន៍ និងប្រូបាប៊ីលីតេនៃការដែលទាត់មិនចូលទី ជាការ ពិសោធន៍ ទ្វេធាឬទេ ?

ការពិសោធន៍ទ្វេធា

អនុវត្តន៍ ៖ ឃ្លីចំនួនប្រាំមួយត្រូវបានដកចេញជាបន្តបន្ទាប់ពីថង់ដែលមាន 7 ឃ្លីក្រហមនិង 9 ខ្មៅឃ្លី ។ តើការពិសោធន៍នេះគឺជាការពិសោធន៍ទ្វេធា ដែរឬទេ នៅពេលដែលឃ្លីត្រូវបានហូតជាបន្តបន្ទាប់ពីថង់ក្នុងករណីនីមួយដូចខាងក្រោម ?

i. ហូតហើយដាក់ទៅវិញ
ii. ហូតហើយដាក់ទៅវិញ

អថេរចៃដន្យទ្វេធា

និយមន័យ (**អថេរចៃដន្យទ្វេធា**). អថេរចៃដន្យ X ដែលតាងអោយចំនួនជោគជ័យនៅក្នុង n ពិសោធន៍ ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ n និង p។
និមិត្តសញ្ញា $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ មានន័យថា X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ n និង p។

ឧទាហរណ៍ 1. បោះកាក់ស្មើសាច់មួយ 4 ដង និងតាង X ជាចំនួន H ដែលទទួលបាន។ វាជាពិសោធន៍ទ្វេធាព្រោះ

- ចំនួនពិសោធន៍ $n = 4$
- ពិសោធន៍នីមួយៗមានលទ្ធផលតែពីរៈ H និង T
- ពិសោធន៍នីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នា
- ប្រូបាប៊ីលីតេទទួលបាន H ក្នុងពិសោធន៍នីមួយៗស្មើនឹង $\frac{1}{2}$

អថេរចៃដន្យ X ដែលជាចំនួន H ទទួលបានជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $n = 4$ និង $p = \frac{1}{2}$ ដែលយើងប្រើនិមិត្តសញ្ញា $X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

2. នៅក្នុងសំណួរពហុជ្រើសរើសដែលមាន 10 សំណួរ និងមាន 3 ចម្លើយនៅក្នុងមួយសំណួរ។ ចំពោះសំណួរនីមួយៗមានចម្លើយត្រូវតែមួយគត់។ បើសិស្សមិនបានរៀនសម្រាប់ធ្វើតេស្តហើយសិស្សជ្រើសរើសយកចម្លើយដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនចម្លើយដែលសិស្សនោះឆ្លើយត្រូវ។ វាជាពិសោធន៍ទ្វេធាព្រោះ

- ចំនួនពិសោធន៍ $n = 10$
- ពិសោធន៍នីមួយៗមានលទ្ធផលតែពីរ៖ ចម្លើយត្រូវ និងចម្លើយខុស
- ពិសោធន៍នីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នា
- ប្រូបាប៊ីលីតេទទួលបានចម្លើយត្រូវក្នុងពិសោធន៍នីមួយៗស្មើនឹង $\frac{1}{3}$

អថេរចៃដន្យ X ដែលជាចំនួនចម្លើយត្រូវទទួលបាន ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $n = 10$ និង $p = \frac{1}{3}$ ដែលយើងប្រើនិមិត្តសញ្ញា $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

ការគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ

បើ $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ តើ $\mathbb{P}(X = x),\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន? យើងចាប់ផ្តើមចេញពីឧទាហរណ៍បោះកាក់ស្មើសាច់ 5 ដង។ យើងចាប់អារម្មណ៍នឹងប្រូបាប៊ីលីតេដែលទទួលបាន H 3 ដង មានន័យថាយើងត្រូវទទួលបាន H 3 ដងនិង T 2 ដងគត់ទោះបីជា H 3 ដងនិង T 2 ដងនៅក្នុងលំដាប់ណាក៏បាន។ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលទទួលបាន H 3 ដំបូងនិង T 2 ចុងក្រោយនៃការបោះកាក់គឺ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(HHHTT) &= \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.0313\end{aligned}$$

តាមពិតទៅមាន 10 របៀបផ្សេងគ្នាដើម្បីទទួលបាន H 3 ដងនិង T 2 ដងនៅក្នុងលំដាប់ណាក៏បានដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{ll} TTHHH & HTHTH \\ THTHH & HTHHT \\ THHTH & HHTTH \\ THHHT & HHTHT \\ HTTHH & HHHTT \end{array}$$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

ជាទូទៅ ព្រឹត្តិការណ៍ $X = x$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទទួលបាន x ជោគជ័យ និង $n-x$ បរាជ័យនៅក្នុងចំណោម n ពិសោធន៍។ ជោគជ័យនីមួយៗកើតឡើងដោយប្រូបាប៊ីលីតេ p និងប្រូបាប៊ីលីតេបរាជ័យនីមួយៗកើតឡើងដោយប្រូបាប៊ីលីតេ $1-p$ នោះប្រូបាប៊ីលីតេដែលទទួលបាន x ជោគជ័យ និង $n-x$ បរាជ័យនៅក្នុងចំណោម n ពិសោធន៍ គឺ $p^x(1-p)^{n-x}$។ យើងដឹងថាមាន $\binom{n}{x}$ របៀបដើម្បីទទួលបាន x ជោគជ័យ និង $n-x$ បរាជ័យនៅក្នុងចំណោម n ពិសោធន៍។
ដូច្នេះ ប្រូបាប៊ីលីតេដែល $X = x$ គឺស្មើនឹង $p^x(1-p)^{n-x}$ គុណនឹងចំនួនរបៀបដែលមានជោគជ័យចំនួន x ក្នុង n ពិសោធន៍ (ដោយមិនគិតលំដាប់) ដែលឱ្យដោយ

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ដែល $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ និង $0! = 1$។ ដូចនេះ

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

- សង្ឃឹមគណិតនិងវ៉ារ្យង់ នៃអថេរចៃដន្យទ្វេធា
  - $\mathbb{E}[X] = np$
  - $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

ឧទាហរណ៍ . រោងចក្រឧស្សាហកម្មមួយផ្គត់ផ្គង់សារធាតុគីមីមួយប្រភេទដល់ក្រុមហ៊ុនចំនួន 10។ ប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្រុមហ៊ុនមួយនឹងទូរសព្ទមកកុម្ម៉ង់ក្នុងថ្ងៃណាមួយស្មើនឹង 0.2 ។ ប្រូបាប៊ីលីតេនេះគឺដូចៗគ្នាចំពោះក្រុមហ៊ុនទាំង 10 ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលនៅក្នុងថ្ងៃណាមួយចំនួនក្រុមហ៊ុនដែលទូរសព្ទមកកុម្ម៉ង់

1. យ៉ាងច្រើន 3 $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} (0.2)^x (0.8)^{10-x} = 0.879$
2. យ៉ាងហោចណាស់ 3 $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(X \ge 3) = 1 - \mathbb{P}(X \le 2)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} (0.2)^x (0.8)^{10-x}$$

$$= 1 - 0.678 = 0.322$$

3. មានចំនួន 3 $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{10}{3} (0.2)^3 (0.8)^{10-3} = 0.201$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

ឧទាហរណ៍ ៖

បើ X ជាអថេរទ្វេធា B(6,1/3) ចូរគណនា

ក. $P(X = 4)$

ខ. $P(X \le 2)$

$$P(X=2) = C(8,2)\cdot(0.4)^2\cdot(1-0.4)^{8-2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot(0.4)^2\cdot(0.6)^6 = 0.2$$

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X \le 2) = \frac{64}{729} + \frac{64}{243} + \frac{240}{729} = 0.68$$

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

សាកល្បងគិត សិស្សម្នាក់ធ្វើតេស្តសាកល្បងនូវសំណួរពហុជ្រើសរើសដែលមាន 10 សំណួរបន្ទាប់ពីមិនបានចូលរៀនអស់ពេលមួយសប្តាហ៍។ សំណួរនីមួយៗមាន 5 ជម្រើសដែលអាចឱ្យសិស្សជ្រើសរើសចម្លើយមួយដោយឱកាសស្មើៗគ្នា។ សំណួរនីមួយៗមានចម្លើយត្រូវតែមួយគត់។ តើប្រូបាប៊ីលីតេដែលសិស្សនោះប្រលងជាប់ស្មើនឹងប៉ុន្មានបើពិន្ទុប្រលងជាប់គឺឆ្លើយត្រូវយ៉ាងហោចណាស់ 60% ?

អថេរចៃដន្យទ្វាធា (លំហាត់អនុវត្តន៍)

1. ស៊ុតចំនួន 10 ត្រូវបានដកចេញជាបន្តបន្ទាប់រួចដាក់ទៅវិញពីកញ្ច្រែង ដែលមាន10% ស៊ុតខូច។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលការដកនេះមានស៊ុតដែលខូចយ៉ាងហោចណាស់មួយ។
2. ល្បែងបោះកាក់មួយ បើចេញផ្កាប់អ្នកឈ្នះ2$ និងបើចេញផ្ងារអ្នកចាញ់ 1$ ។អ្នកលេងល្បែងនេះចំនួន៨ដង គណនាប្រូបាបដើម្បីឲ្យអ្នកឈ្នះបាន15$ ។
3. អ្នកលេងល្បែងមួយដោយអ្នកឈរនៅទីតាំងនឹង 0 មួយ ។ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយ បើចេញលេខ1 ឬ 6 អ្នកឈានទៅស្តាំមួយជំហាន តែបើចេញលេខក្រៅពីនេះ អ្នកទៅឆ្វេងមួយជំហាន ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឲ្យការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់លើកទី៦ អ្នកវិលមករកទីតាំង 0 វិញ ។

អថេរចៃដន្យទ្វាធា (លំហាត់អនុវត្តន៍)

4. ប្រហែល11%នៃចំនួនប្រជាជនពិភពលោកគឺជាមនុស្សប្រើដៃឆ្វេង។ អេលីន ចាប់អារម្មណ៍ក្នុងការសិក្សាចំនួនមនុស្សដែលមានដៃឆ្វេងនៅក្នុងសាលារបស់គាត់។ គាត់បានជ្រើសរើសសិស្សថ្នាក់ទី 10 នៅក្នុងវិទ្យាល័យរបស់គាត់ដែលមានសិស្សចំនួន 34 នាក់។ គណនាគម្លាតស្តង់ដារនៃការសិក្សារបស់ អេលីន។
5. និស្សិតម្នាក់ឆ្លើយសំណួរខុសឬត្រូវ (True false Questions) ចំនួន២០សំណួរ ក្នុងពេលប្រលងមុខវិជ្ជាមួយដោយឧបមាថា គាត់មិន បានរៀនមុខវិជ្ជានោះទេ ហើយគឺគាត់ចេះតែជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ ។ បើគាត់ឆ្លើយត្រូវចាប់ពី៦០% ទើបគាត់ជាប់ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឲ្យគាត់ប្រលងជាប់មុខវិជ្ជានោះ ។

អថេរចៃដន្យទ្វាធា

ឧទាហរណ៍ បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយ 480 ដង។ រកមធ្យម វ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដានៃចំនួនមុខលេខ 3 ដែលចេញ។

តាង X ជាចំនួនមុខលេខ 3 ដែលចេញនោះ $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ ដែល $n = 480, p = \frac{1}{6}$។ ដូចនេះ

$$\mathbb{E}[X] = np = 480\left(\frac{1}{6}\right) = 80$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 480\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 66.67$$

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{66.67} = 8.16$$

តើប្រើប្រូបាបអ្វី?

1. ប្រសិនបើទឹក 250 លីត្រត្រូវបានគេដឹងថាត្រូវបានបំពុលដោយបាក់តេរី 10^6 នោះ តើប្រូបាបបីលីតេដែលថា គំរូទឹក 1cc មិនមានបាក់តេរីទេស្មើប៉ុន្មាន?
2. សៀវភៅដែលមាន 150 ទំព័រមាន 100 ខុសអក្សរ។ រកប្រូបាបីលីតេដែលទំព័រដាក់លាក់មួយមាន
   a. គ្មានខុសអក្សរ
   b. ខុសអក្សរ ចំនួន ៥
   c. យ៉ាងហោច ខុសអក្សរ ២
   d. ខុសអក្សរ ច្រើនជាង ១

អថេរចៃដន្យព័រសុង

អថេរចៃដន្យព័រសុងជាអថេរចៃដន្យដាច់ប្រើសម្រាប់រាប់ចំនួនព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើងដោយចៃដន្យនៅចន្លោះពេលណាមួយ ឬលំហណាមួយ។ វាខុសពីអថេរចៃដន្យទ្វេធានៅក្នុងន័យថាទ្វេធារាប់ចំនួនជោគជ័យនិងចំនួនបរាជ័យ រីឯនៅក្នុងអថេរចៃដន្យព័រសុង ចំនួនមធ្យមនៃជោគជ័យត្រូវបានផ្តល់ឱ្យនៅក្នុងឯកតាពេល ឬលំហណាមួយ។ បើតាង X ជាចំនួននៃព្រឹត្តិការណ៍នៅចន្លោះណាមួយ និងបើចំនួនមធ្យមនៃព្រឹត្តិការណ៍នៅចន្លោះណាមួយគឺ λ នោះប្រូបាប៊ីលីតេដែលមាន x ព្រឹត្តិការណ៍នៅចន្លោះណាមួយឱ្យដោយអថេរចៃដន្យព័រសុងដូចខាងក្រោម

និយមន័យ 5.12 (**អថេរចៃដន្យព័រសុង**). អថេរចៃដន្យ X ដែលអាចយកតម្លៃ $0, 1, 2, 3, \ldots$ ហៅថាអថេរចៃដន្យព័រសុងដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\lambda > 0$ បើវាមានអនុគមន៍ម៉ាសប្រូបាប៊ីលីតេ

$$\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

និមិត្តសញ្ញា $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ មានន័យថា X ជាអថេរចៃដន្យព័រសុងដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\lambda > 0$។

អថេរចៃដន្យព័រសុង

ឧទាហរណ៍ 5.26. បើមានកំហុសក្នុងការវាយអត្ថបទចំនួន 200 ដែលនៅរាយប៉ាយដោយចៃដន្យនៅក្នុងពង្រាងឯកសារ 500 ទំព័រ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលនៅក្នុងទំព័រណាមួយមានកំហុសចំនួន 3 ។

ចម្លើយ. ចំនួនកំហុសជាមធ្យមក្នុងមួយទំព័រគឺឱ្យដោយ

$$\lambda = \frac{200}{500} = 0.4$$

តាង X ជាចំនួនកំហុសក្នុងមួយទំព័រនោះ $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ដែល $\lambda = 0.4$។ ដូចនេះ

$$\mathbb{P}(X=3) = e^{-0.4}\frac{(0.4)^3}{3!} = 0.0072$$

អថេរចៃដន្យព័រសុង

ឧទាហរណ៍ ផ្នែកលក់នៃក្រុមហ៊ុនមួយទទួលការហៅចូលទូរសព្ទជាមធ្យម 3 ដងក្នុងមួយម៉ោងតាមប្រព័ន្ធទូរសព្ទមិនគិតថ្លៃ។ ចំពោះមួយម៉ោងណាមួយ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលគេនឹងទទួលការហៅចូលទូរសព្ទ

1. យ៉ាងច្រើន 3
2. យ៉ាងហោចណាស់ 3
3. មានចំនួន 5 ឬច្រើនជាង

ចម្លើយ. តាង X ជាចំនួនហៅចូលទូរសព្ទដែលទទួលក្នុងម៉ោងណាមួយនោះ $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ដែល $\lambda = 3$។ ដូចនេះ យើងបាន

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le 3) &= \sum_{x=0}^{3} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0.6472\\
\mathbb{P}(X \ge 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \le 2)\\
&= 1 - \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{x!}\\
&= 1 - 0.4232 = 0.5768\\
\mathbb{P}(X \ge 5) &= 1 - \mathbb{P}(X \le 4)\\
&= 1 - \sum_{x=0}^{4} e^{-3}\frac{3^x}{x!}\\
&= 1 - 0.8152 = 0.1848
\end{aligned}$$

អនុវត្តន៍

លំហាត់ 1. បើ 2% នៃអំពូលដែលផលិតដោយក្រុមហ៊ុនមួយជាអំពូលខូច។ គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុងចំណោមអំពូល 200 ដែល

(a) មានអំពូលខូច 2

(b) មានអំពូលខូចច្រើនជាង 2

(c) មានអំពូលខូចយ៉ាងច្រើន 2

2. ម៉ាស៊ីនកូពីមួយកូពីចេញដោយចៃដន្យនូវក្រដាសសចំនួន 10 សន្លឹកក្នុងចំណោម 500 សន្លឹកដែលបានកូពី។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុងចំណោម 300 សន្លឹកដែលបានកូពីមាន 5 សន្លឹកជាក្រដាសស។

3. នៅក្នុងពង្រាងសៀវភៅដែលមាន 400 ទំព័រមានកំហុសចំនួន 200 ដែលនៅរាយប៉ាយដោយចៃដន្យ។ បើសិនជាទំព័រមួយត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលវាមានកំហុសមួយ។

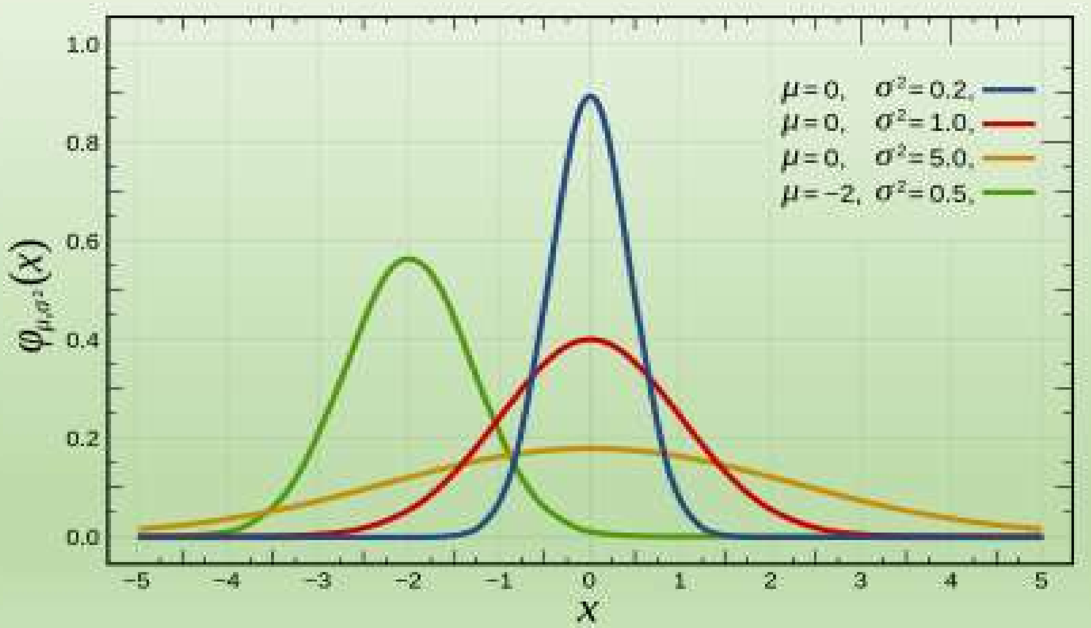
4. ចំនួនអង្គធាតុវិទ្យុសកម្មដែលបញ្ចេញដោយអាចម៍ផ្កាយត្រូវបានកត់ត្រា។ ចំនួនមធ្យមនៃអង្គធាតុត្រូវបានរកឃើញថាស្មើនឹង 3.5 ក្នុងមួយនាទី។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុងមួយនាទីណាមួយ

(a) មិនមានអង្គធាតុ

(b) មានអង្គធាតុ 2

(c) យ៉ាងហោចណាស់មាន 5 អង្គធាតុ

ប្រូបាបអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់



1

ចំណោទដែលត្រូវការចម្លើយ!

1. នៅក្នុងការស្ទង់មតិដែលធ្វើឡើងដោយមជ្ឈមណ្ឌលជាតិសម្រាប់ស្ថិតិសុខភាព កម្ពស់មធ្យមគំរូរបស់ស្ត្រីនៅសហរដ្ឋអាមេរិក (អាយុ 20-29 ឆ្នាំ) គឺ 163.068 cm ជាមួយនឹង គម្លាតស្តង់ដា 7.366 cm។ តើចន្លោះកំពស់ណានៃស្ត្រី ដែលមាន
   a. 68% នៃកម្ពស់របស់ស្ត្រី
   b. ៩៥% នៃកម្ពស់របស់ស្ត្រី
   c. កម្ពស់ទាំងអស់ឬស្ទើរតែទាំងអស់របស់ស្ត្រី

2

ចំណោទដែលត្រូវការចម្លើយ!

2. ក្រុមហ៊ុនដឹកទំនិញមួយបានរកឃើញថារថយន្តដឹកទំនិញរបស់ខ្លួនជាមធ្យមស៊ីសាំង11.6 លីត្រក្នុងចំងាយផ្លូវ១០០ គីឡូម៉ែត្រ ជាមួយនឹងគម្លាតស្តង់ដារ 1.6លីត្រ ក្នុងការដឹកជញ្ជូនផ្លូវហាយវេ។ តើប្រូបាប៊ីលីតេស្មើប៉ុន្មានបើ
   a. ស៊ីសាំងតិចជាង១០លីត្រក្នុងចំងាយ១០០គីឡូម៉ែត្
   b. លើសពី១៣លីត្រក្នុងចំងាយ១០០ គីឡូម៉ែត្រ
   c. រវាងពី១០ទៅ១៣.២ លីត្រក្នុងចំងាយ១០០ គីឡូម៉ែត្រ

3

អំពីអថេរចៃដន្យណ័រម៉ាល់

- បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ គឺជាគោលគំនិតសំខាន់ណាស់នៅក្នុងស្ថិតិវិទ្យា។បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ គឺជាបំណែងចែកមានរាងកណ្តឹងដែលត្រូវបានកំណត់ដោយមធ្យម និងគម្លាតស្តង់ដាររបស់វា ហើយអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីពិពណ៌នាអំពីបាតុភូតធម្មជាតិជាច្រើន។បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ ស្តង់ដារគឺជាការចែកចាយធម្មតាដែលមានមធ្យម 0 និងគម្លាតស្តង់ដារនៃ 1 ហើយអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតឡើង។ ការយល់ដឹងអំពីបំណែងចែកទាំងនេះ និងរបៀបប្រើប្រាស់វាអាចជួយយើងធ្វើការសម្រេចចិត្តប្រកបដោយការយល់ដឹង និងទាញការសន្និដ្ឋានត្រឹមត្រូវពីទិន្នន័យ។

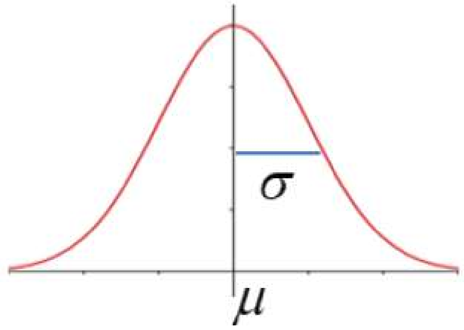
4

អំពីអថេរចៃដន្យណ័រម៉ាល់

- បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ គឺជាបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដែលត្រូវបានគេប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយនៅក្នុងស្ថិតិ ហិរញ្ញវត្ថុ វិស្វកម្ម វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម និងវិទ្យាសាស្ត្រធម្មជាតិ។ វាគឺជាបំណែងចែក ដែលមានខ្សែកោងរាងកណ្ដឹង ហើយត្រូវបានកំណត់ដោយមធ្យម និងគម្លាតស្តង់ដាររបស់វា។

បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

បំណែងចែកន័រម៉ាល់ជាបំណែងចែកដែលមានសារៈសំខាន់ខ្លាំង ហើយត្រូវគេប្រើប្រាស់នៅក្នុងវិស័យស្ថិតិវិទ្យាទាំងមូល។ ក្រាហ្វរបស់វាដែលគេហៅឈ្មោះថា *ខ្សែកោងន័រម៉ាល់* មានសណ្ឋានជារាង«ជួង»



នៅឆ្នាំ១៧៣៣ Abraham DeMoivre បានបង្កើតសមីការគណិតវិទ្យារបស់ខ្សែកោងន័រម៉ាល់នេះឡើង។ វាជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការចាប់ផ្តើមនូវទ្រឹស្តីជាច្រើននៅក្នុងស្ថិតិវិទ្យា។ បំណែងចែកន័រម៉ាល់នេះក៏ត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា *បំណែងចែកហ្គោស*(Gaussian distribution) ដើម្បីជាកិត្តិយសដល់ Karl Friedrich Gauss (១៧៧៧, ១៨៥៥)

បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេរបស់អថេរចៃដន្យ X ដែលមានមធ្យម μ និងវ៉ារ្យង់ σ^2 ត្រូវកំណត់ដោយ

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2};-\infty<x<+\infty$$

ដែល $\pi = 3.14159...$ និង $e = 2.71828...$ ។

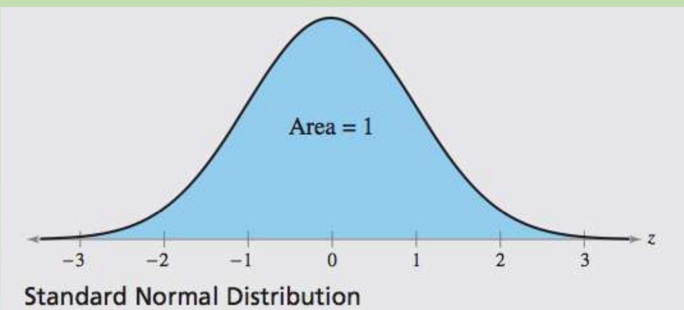
ចំណាំ៖ ក្នុងករណីជាច្រើន គេតាងអថេរចៃដន្យ X ដែលមាន មធ្យម μ និងគម្លាតស្តង់ដា σ ដោយ

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

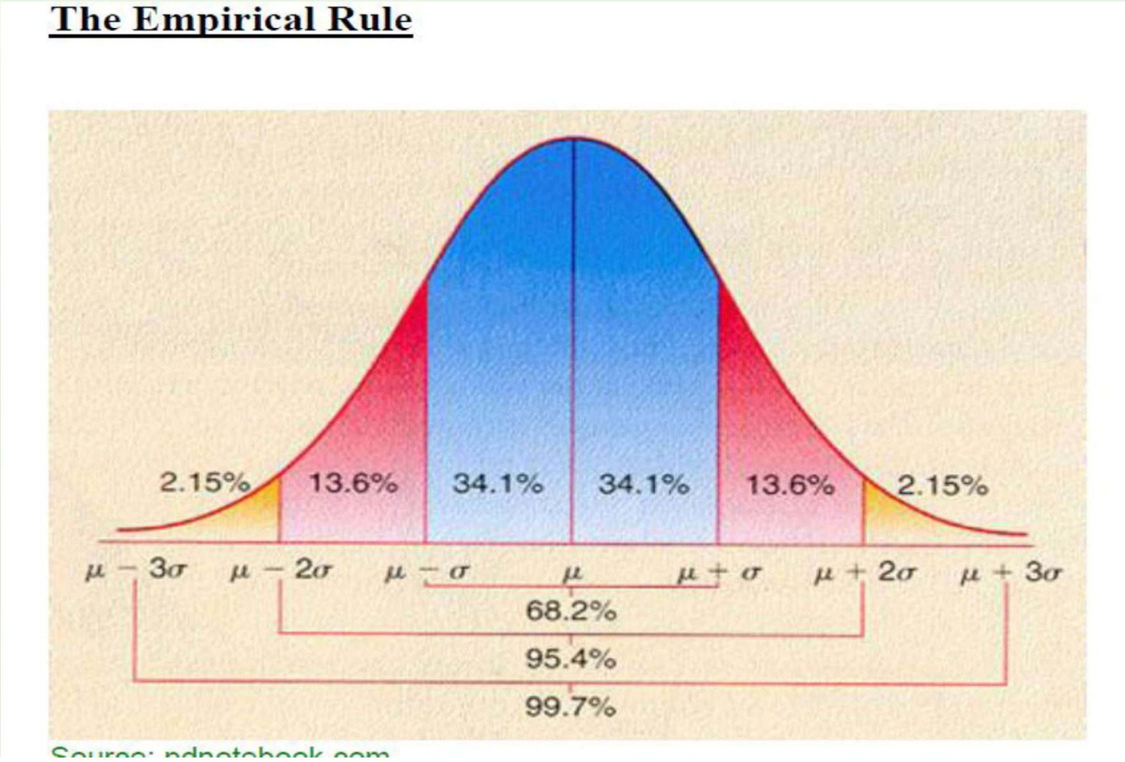
បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

លក្ខណៈនៃបំណែងចែកណ័រម៉ាល់

- ដោយវាជាអថេរចៃដន្យជាប់ ដូច្នេះ ប្រូបាបរបស់វាត្រូវបាន គណនាតាមក្រឡាផ្ទៃក្រោមខ្សែកោង
- បំណែងចែកណ័រម៉ាល់មានរាងដូចជួង ឆ្លុះគ្នាធៀបមធ្យម
- មានតម្លៃម៉ូដតែមួយគត់
- បំណែងចែកណ័រម៉ាល់ តម្លៃ មធ្យម=មេដ្យាន=ម៉ូដ
- តម្លៃអតិបរមា នៃ $f(x)$ គឺត្រង់ $x = \mu$
- ក្រឡាផ្ទៃក្រោមខ្សែកោងនិងអ័ក្សដេកស្មើ 1



បំណែងចែកណរម៉ាល់



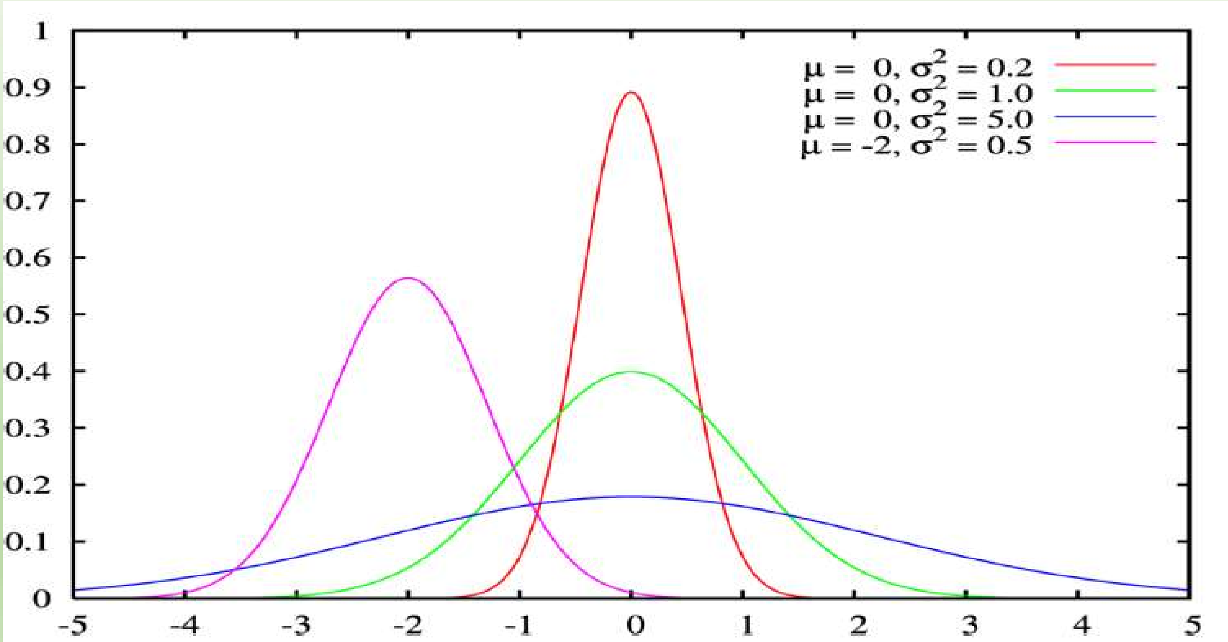
9

បំណែងចែកណរម៉ាល់

- បើទិន្នន័យនៃសំណុំទិន្នន័យមានទម្រង់ Normal នោះ
  - ✓ ប្រហែល 68%នៃទិន្នន័យនៅចន្លោះ $\mu - \sigma$ និង $\mu + \sigma$
  - ✓ ប្រហែល 95%នៃទិន្នន័យនៅចន្លោះ $\mu - 2\sigma$ និង $\mu + 2\sigma$
  - ✓ ប្រហែល 99.7%នៃទិន្នន័យនៅចន្លោះ $\mu - 3\sigma$ និង $\mu + 3\sigma$
- បំណែងចែក Normal មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រចំនួនពីរ គឺ មធ្យម μ និងគម្លាតស្តង់ដា σ

10

បំណែងចែកណ័រម៉ាល់



11

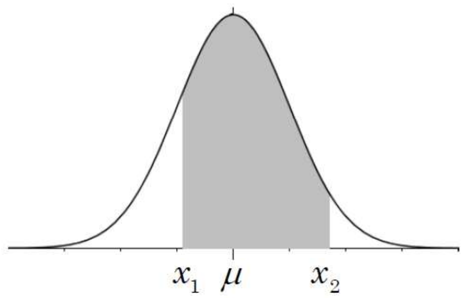
បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

- **ក្រាឡាផ្ទៃក្រោមខ្សែកោងណ័រម៉ាល់**

ខ្សែកោងរបស់បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេជាប់ណាមួយ ឬអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេណាមួយ ត្រូវបង្កើតឡើងក្នុងរបៀបយ៉ាងណាឱ្យផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងក្នុងចន្លោះ $x = x_1$ និង $x = x_2$ ស្មើនឹងប្រូបាប៊ីលីតេដែលអថេរចៃដន្យ X នៅក្នុងចន្លោះ $x = x_1$ និង $x = x_2$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះខ្សែកោងន័រម៉ាល់ក្នុងរូប៤.៣

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$$

ត្រូវតំណាងដោយតំបន់ដែលមានផ្ទៃធូតៗ។



$P(x_1 < X < x_2) =$ ផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ធូតៗ

បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

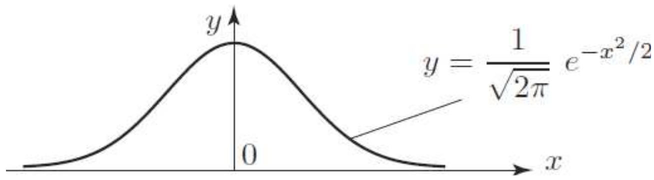
ដើម្បីគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល X ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះមួយ គេត្រូវធ្វើអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលជាកិច្ចការស្មុគស្មាញ ហើយវារឹតតែស្មុគស្មាញទៅទៀតដោយសារអនុគមន៍នេះប្រែប្រួលអាស្រ័យលើប៉ារ៉ាម៉ែត្រចំនួនពីរ គឺ μ និង σ។ អាស្រ័យហេតុនេះ ហើយទើបគេបំប្លែងអនុគមន៍ទាំងអស់នេះទៅជាអនុគមន៍មួយដែលមានមធ្យមស្មើ០ និងវ៉ារ្យ៉ង់ស្មើ១ ដែលគេស្គាល់ថាជាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា។ អថេរចៃដន្យថ្មី តាងដោយ Z ដែល

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

នៅពេលដែលអថេរចៃដន្យ X កំណត់យកតម្លៃ x ណាមួយ នោះអថេរចៃដន្យ Z មានតម្លៃ $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ។

បំណែងចែកណ័រម៉ាល់

$$\begin{aligned}P(x_1<X<x_2)&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\\&=\int_{z_1}^{z_2}n(z;0,1)dz=P(z_1<Z<z_2)\end{aligned}$$



និយមន័យ

បំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេនៃអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម០ និងវ៉ារ្យ៉ង់១ ហៅថាបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដា។

តារាងបំណែងចែកន័រម៉ាល់ស្តង់ដាត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីរកផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង។ ផ្ទៃក្រឡានេះគឺជាប្រូបាប៊ីលីតេ។

បំណែងចែកណរម៉ាល់ស្តង់ដារ

- ឧទាហរណ៍៖ បើអថេរចៃដន្យ X ជាអថេរចៃដន្យណរម៉ាល់ N(45, 0.000625) ចូរបំលែងវាជាអថេរចៃដន្យណរម៉ាល់ស្តង់ដា

$$Z = (X - 45)/0.025$$

- ឧទាហរណ៍៖ បើអថេរចៃដន្យ X ជាអថេរចៃដន្យណរម៉ាល់ N(45, 0.000625) យកតម្លៃ 44.95 ទៅ 45.05 តើ Z ប្រែប្រួលក្នុងចន្លោះណា ?

$$X = 45.05,\ Z = \frac{45.05 - 45}{0.025} = 2$$
$$X = 44.95,\ Z = \frac{44.95 - 45}{0.025} = -2$$

15

បំណែងចែកណរម៉ាល់ស្តង់ដារ

អនុវត្តន៍ ប្រាក់ចំណូលប្រចាំខែរបស់បុគ្គលិកលក់កុំព្យូទ័ររបស់ក្រុមហ៊ុនមួយប្រហាក់ប្រហែលបំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមាន មធ្យមស្មើនឹង 75ពាន់រៀល និងមានគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង6ពាន់រៀល។

ក. តើប្រាក់ចំនូលប្រហែល 68%ស្ថិតនៅចន្លោះប៉ុន្មានពាន់រៀល?

ខ. តើប្រាក់ចំនូលប្រហែល 95%ស្ថិតនៅចន្លោះប៉ុន្មានពាន់រៀល?

គ. តើប្រាក់ចំនូលប្រហែល 99.73% ស្ថិតនៅចន្លោះប៉ុន្មានពាន់រៀល?

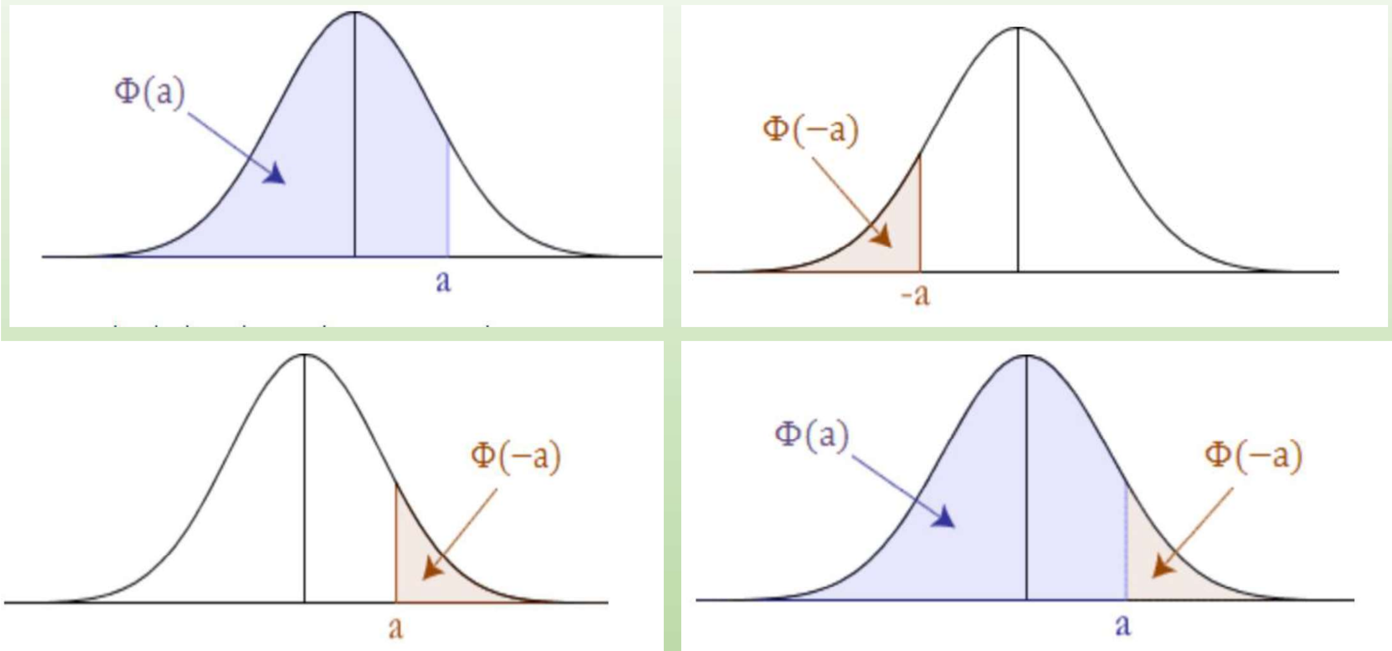
16

វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

- ដោយហេតុថា ការគណនាប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យណ័រម៉ាល់ ត្រូវបានធ្វើឡើងតាមការគណនាអាំងតេក្រាល ដែលមានការលំបាកមួយចំនួន ដូច្នេះ គេបានបង្កើតតារាងដើម្បីឲ្យអ្នក ប្រើប្រាស់យកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការគណនាដោយពឹងលើតារាង ឬដោយការប្រើប្រាស់កម្មវិធីកុំព្យូទ័រផ្សេងៗដូចជា EXCEL

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.

វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ



វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

លំហាត់អនុវត្តន៍ អថេរចៃដន្យ X ដែល $X \sim N(50,8)$ ។ គណនា

ក. $P(48 < X < 54)$ ខ. $P(52 < X < 55)$ គ. $P(|X-50| < \sqrt{8})$

ក. $P(48 < X < 54)$ យើងបំលែង $X \sim N(50,8)$ ទៅ $Z \sim N(0,1)$ ដែល $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

ដោយ $\sigma^2 = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8}$

$$P(48 < X < 54) = P(\frac{48-50}{\sqrt{8}}, \frac{X-50}{\sqrt{8}}, \frac{54-50}{\sqrt{8}})$$
$$= P(-0.71 < Z < 1.41)$$
$$= 0.2611 + 0.4207$$
$$= 0.6818$$

19

វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

លំហាត់អនុវត្តន៍ អថេរចៃដន្យ X ដែល $X \sim N(50,8)$ ។ គណនា

ក. $P(48 < X < 54)$ ខ. $P(52 < X < 55)$ គ. $P(|X-50| < \sqrt{8})$

ខ. $P(52 < X < 55) = (\frac{52-50}{\sqrt{8}}, \frac{X-50}{\sqrt{8}}, \frac{55-50}{\sqrt{8}})$

$$= P(0.71 < Z < 1.77)$$
$$= 0.4616 - 0.2611$$
$$= 0.2005$$

គ. $P(|X-50| < \sqrt{8}) = (-\sqrt{8} < X - 50 < \sqrt{8})$

$$= P(-1 < \frac{X-50}{\sqrt{8}} < 1)$$
$$= P(-1 < Z < 1)$$
$$= 0.3413 + 0.3413$$
$$= 0.6826$$

20

វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

លំហាត់អនុវត្តន៍ សន្មត X ជាអថេរចៃដន្យន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យម $\mu = 300$ និងវ៉ារ្យ៉ង់ $\sigma = 50$ ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែល X កំណត់យកតម្លៃធំជាង362.

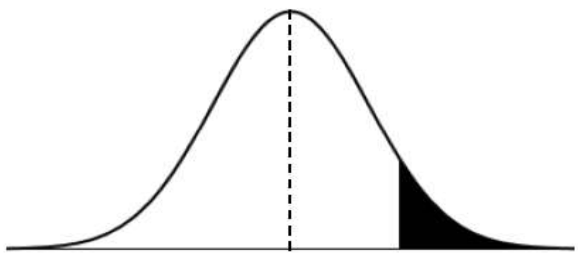
ដំណោះស្រាយ

តម្លៃz ដែលត្រូវគ្នានឹង $x = 362$ គឺ

$$z = \frac{362 - 300}{50} = 1.24$$

ដូច្នេះ យើងបាន

$$P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24)$$
$$= 1 - 0.8925 = 0.1075$$



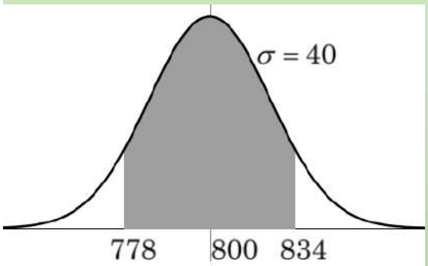
វិធីគណនាប្រូបាបបំណែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

ឧទាហរណ៍៤.៨ គេដឹងថាអាយុកាលប្រើប្រាស់របស់អំពូលភ្លើងដែលផលិតដោយក្រុមហ៊ុនមួយមានបំណែងចែកន័រម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើ800ម៉ោង និងគម្លាតស្តង់ដាស្មើ40ម៉ោង។ រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអំពូលភ្លើងមួយអាចប្រើប្រាស់បានក្នុងរយៈពេលពី778ម៉ោងទៅ834ម៉ោង។

តាងអថេរ X ជាអាយុកាលប្រើប្រាស់របស់អំពូលភ្លើង(គិតជាម៉ោង) នោះអ្វីដែលយើងត្រូវរកគឺ $P(778 < X < 834)$ ។ តម្លៃ z ដែលត្រូវគ្នានឹង $x_1 = 778$ និង $x_2 = 834$ គឺ

$$z_1 = \frac{778 - 800}{40} = -0.55$$

$$z_2 = \frac{834 - 800}{40} = 0.85$$



ដូច្នេះ

$$P(778 < X < 834) = P(-0.55 < Z < 0.85)$$
$$= P(Z < 0.85) - P(Z < -0.55)$$
$$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$$

វិធីគណនាប្រូបាបបំលែងចែកណ័រម៉ាល់ស្តង់ដារ

<u>លំហាត់ទី5</u>: X ជាអថេរនៃ $N(100,36)$ $P(X<a)=0.8907$ ។ គណនាតម្លៃ a ។

បើយើងបំលែង $X \sim N(100,36)$ ទៅ $Z \sim N(0,1), Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

យើងមាន

$$P(X<a)=0.8907, Z=\frac{X-100}{6}$$

$$P(\frac{X-100}{6}<\frac{a-100}{6})=P(Z<\frac{a-100}{\sigma})$$

$$=0.8907 \quad P(Z<1.23)=0.5+0.3907$$

តែ $P(z<1.23)=0.5+0.3907$

$$=0.8907$$

នោះ $\frac{a-100}{6}=1.23$

$$\Rightarrow a=100+7.38$$

$$=107.38$$

ដូច្នេះ $a=107.38$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION

Z Score Table

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189

Negative Z Score Table   Positive Z Score Table

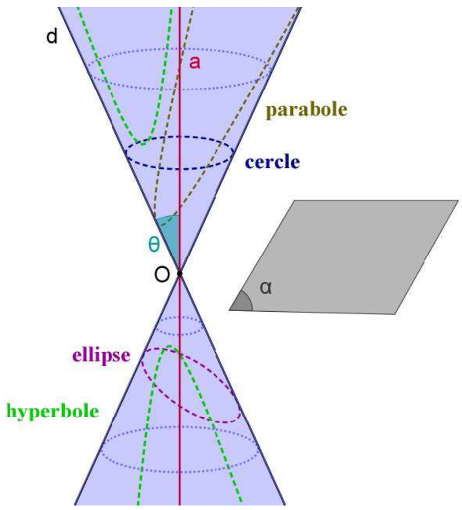
ជំពូក ៤

ផ្នែកកោនិក

៤.១ សេចក្តីផ្តើម

ក្នុងមុខវិជ្ជាគណិតវិភាគ គេឃើញខ្សែកោងតាងឱ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ត្រូវបានគេហៅថា “parabole” ហើយ អនុគមន៍ខ្លះ ក្រាហ្វមានមែកពីរដូចគ្នា $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ហៅថា “hyperbole” ។ រង្វង់ដែលមានផ្ចិត $\Omega(a,b)$ និងកាំ r គឺជាសំណុំចំនុច $M(x,y)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការដឺក្រេទី២ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ។ ក្រៅពីនេះ ចំពោះ «រង្វង់រាងមូលពងក្រពើ» ហៅថា «អេលីប» ។

ខ្សែកោងទាំងអស់នេះ ត្រូវបានគេសិក្សាតាំងពីបុរាណមក ដែលវាមានតួនាទីសំខាន់បម្រើក្នុងវិស័យរូបវិទ្យា (ជាពិសេស ផ្នែកតារាសាស្រ្ត) ។ ខ្សែកោងទាំងនេះ អាចត្រូវបានកំណត់ថា ជាប្រសព្វរវាងកោនពីរទល់កំពូលគ្នា ជាមួយនឹងប្លង់មួយ :



៤.១.១ សមីការកំណុំរបស់កោនិក

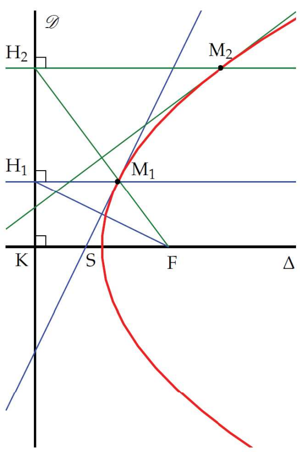
និយមន័យ ៤.១.

គេឱ្យ F ជាចំណុចនឹង, $\mathscr{D}$ ជាបន្ទាត់ និង e ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យ ($F \notin \mathscr{D}$)។ ចំពោះចំណុច M មួយក្នុងប្លង់ តាង H ជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ចំណុច M មកលើ $\mathscr{D}$ ។ កោនិកមួយ ដែលមានកំណុំ F គឺជាសំណុំចំណុច M ទាំងឡាយណា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

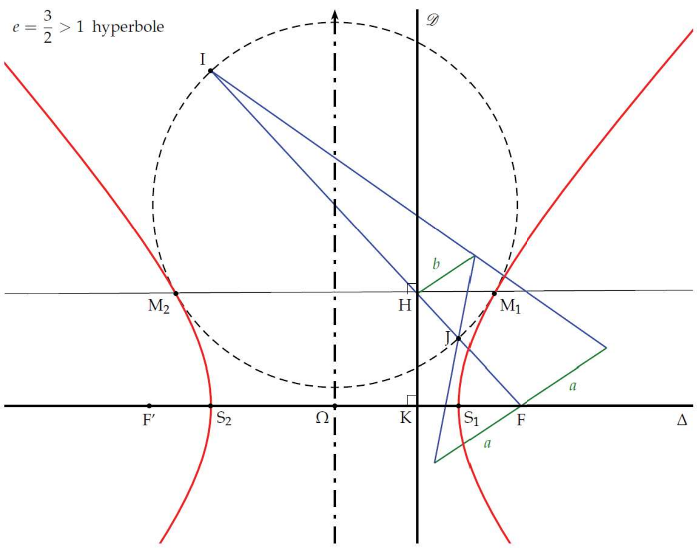
$$\Gamma = \left\{ M : \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

ដែល e ហៅថា **អេសង់ទ្រីស៊ីតេ** (eccentricity) ហើយបន្ទាត់ $\mathscr{D}$ ហៅថា **ប្រាប់ទិស** (ឬ ឌីរិកទ្រីក $=$ directrix) របស់កោនិក ។ បន្ទាត់ Δ ដែលកាត់កែងនឹង $\mathscr{D}$ កាត់តាមកំណុំ F ហៅថា **អ័ក្សកំណុំ** របស់កោនិក ។ ក្នុងករណី ៖

- បើ $0 < e < 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *អេលីប* (ellipse)
- បើ $e = 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *ប៉ារាបូល* (parabola)
- បើ $e > 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *អ៊ីពែរបូល* (hyperbola)



$e = 1:\ MF = MH$



$e \neq 1:\ MF = eMH$

អេសង់ទ្រីស៊ីតេ និង កំណុំ

ទ្រឹស្តីបទ ១.១: (អេសង់ទ្រីស៊ីតេ និង កំណុំ)

តាង p ជាចម្ងាយពីកំណុំ F ទៅប្រាប់ទិស $\mathscr{D}$ ។ អាស្រ័យលើតម្លៃរបស់អេសង់ទ្រីស៊ីតេ e គេទទួលបានកោនិក ដូចខាងក្រោម៖

(i) បើ $e=1$ នោះកោនិក ជាប៉ារ៉ាបូល ដែលមានសមីការ $Y^2=2pX$ នៅក្នុងតម្រុយ $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$។ S ជាចំណុចកំពូលរបស់ប៉ារ៉ាបូល។

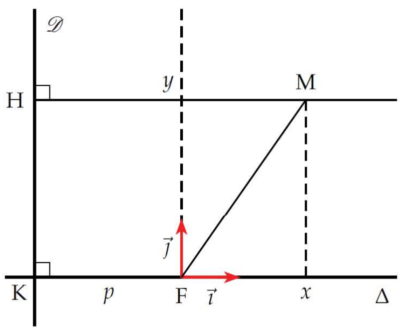
(ii) បើ $e\neq 1$ នោះ កោនិកមានផ្ចិត Ω និងកំណុំទីពីរ F' ឆ្លុះគ្នានឹងកំណុំ F ធៀបនឹង Ω ។ សមីការរបស់វានៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ មានទម្រង់ ៖

- បើ $e<1$ នោះសមីការកោនិក $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ជា អេលីប ។
- បើ $e>1$ នោះសមីការកោនិក $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ជា អ៊ីពែរបូល ។

ដូច្នេះ គេបាន៖

$$a^2=\frac{e^2p}{(1-e^2)^2}\quad \text{និង}\quad b^2=\frac{e^2p}{|1-e^2|}$$

NB: អថេរ X និង Y បានមកពីការប្តូរគោល!



តាង p ជាចម្ងាយរវាង F និងប្រាប់ទិសរបស់កោនិក។ ចំនុច M មានកូអរដោនេ (x,y) នៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ $\left(F,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេបាន M ស្ថិតនៅលើកោនិកដែលមានកំណុំ F, ប្រាប់ទិស $\mathscr{D}$ និង

អេសង់ទ្រីស៊ីតេ e លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{aligned}
\frac{MF}{MH}=e \iff & MF^2=e^2MH^2\\
\iff & x^2+y^2=e^2(x+p)^2\\
\iff & x^2+y^2=e^2x^2+2e^2px-e^2p^2=0\\
\iff & \left(1-e^2\right)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0
\end{aligned}$$

សិក្សាករណីនីមួយៗ៖

i) បើ $e=1$ គេបាន៖

$$S\left(-\frac{p}{2},0\right) \quad \text{និង} \quad \begin{cases} X=x+\frac{p}{2}\\ Y=y\end{cases}$$

ក្នុងតម្រុយ $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$: សមីការ $Y^2=2pX$ គឺជាប៉ារ៉ាបូល មានអ័ក្ស Δ និងកំពូល S ។

ii) ករណី $e\neq 1$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned}
\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2&=0\\
\left(1-e^2\right)\left(x^2-\frac{2e^2p}{1-e^2}x\right)+y^2&=e^2p^2\\
\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2-\frac{e^4p^2}{1-e^2}+y^2&=e^2p^2\\
\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^4p^2}{1-e^2}+e^2p^2\\
\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^4p^2+e^2p^2-e^4p^2}{1-e^2}\\
\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^2p^2}{1-e^2}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះតាង $\Omega\left(\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$ និង $\begin{cases} X=x-\frac{e^2p}{1-e^2}\\ Y=y\end{cases}$

ក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេបានសមីការ

$$\left(1-e^2\right) X^2+Y^2=\frac{e^2 p}{1-e^2}$$

ដែល

$$\frac{X^2}{\frac{e^2 p^2}{\left(1-e^2\right)^2}}+\frac{Y^2}{\frac{e^2 p^2}{1-e^2}}=1, \tag{a}$$

ដែលអាស្រ័យទៅនឹងសញ្ញារបស់ $1-e^2$ ។

- ករណី $1-e^2>0 \Leftrightarrow e<1$ គេតាង :

$$a^2=\frac{e^2 p^2}{\left(1-e^2\right)^2} \quad \text{និង} \quad b^2=\frac{e^2 p^2}{1-e^2}$$

ដូច្នេះសមីការ (a) : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ គឺជាអេលីប មានផ្ចិត Ω និងអ័ក្សឆ្លុះ (ΩX) និង (ΩY) ។

- ករណី $1-e^2<0 \Leftrightarrow e>1$ គេតាង :

$$a^2=\frac{e^2 p^2}{\left(1-e^2\right)^2} \quad \text{និង} \quad b^2=-\frac{e^2 p^2}{1-e^2}$$

ដូច្នេះសមីការ (a) : $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ គឺជាអ៊ីពែរបូល មានផ្ចិត Ω និងអ័ក្សឆ្លុះ (ΩX) និង (ΩY) ។

៤.២ ធាតុសម្គាល់ (Characteristic elements)

៤.២.១ ប៉ារ៉ាបូល

ឧទាហរណ៍ ១២. ចូរកំណត់ធាតុសម្គាល់របស់ប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម៖

$$y^2-3x-4y-2=0$$

គេរកចំណុចកំពូល S របស់ប៉ារ៉ាបូលៈ

$$\begin{aligned} y^2-3x-4y-2=0 &\Leftrightarrow (y-2)^2-4-3x-2=0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2=3(x+2) \end{aligned}$$

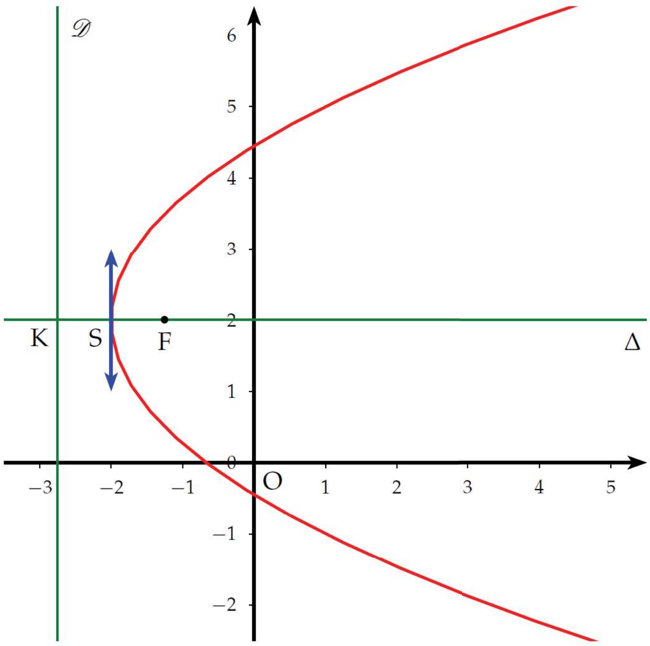
ដូច្នេះ $S(-2;2)$ និងដោយប្តូរអថេរ $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y-2 \end{cases}$ នោះគេបានសមីការ : $Y^2=3X$ ដែល $3=2p\Leftrightarrow p=\frac{3}{2}$ ។

ដោយ S កណ្តាល់ $[KF]$ គេបាន :

$$K=\left(x_S-\frac{p}{2},y_S\right)=\left(-\frac{11}{4},2\right)$$

និង

$$F=\left(x_S+\frac{p}{2},y_S\right)=\left(-\frac{5}{4},2\right)$$



៤.២.២ អេលីប

ទ្រឹស្តីបទ ២.១: (អេលីប)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{ដែល } a^2>b^2$$

នោះសមីការនេះជាសមីការ អេលីប។
បើគេតាង $c=\sqrt{a^2-b^2}$ នោះគេទទួលបានធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e=\frac{c}{a}\quad ,\quad p=\frac{b^2}{c}\quad \text{និង}\quad \Omega F=c$$

សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ ក្នុងទម្រង់៖ $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអេលីប ។ លើសពីនេះ បើ កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x នោះអ័ក្សសំខាន់ (major axis) របស់អេលីប ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x ដូច្នេះ $a^2>b^2$ ។

ដោយ $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$ ។ ដូច្នេះ ៖

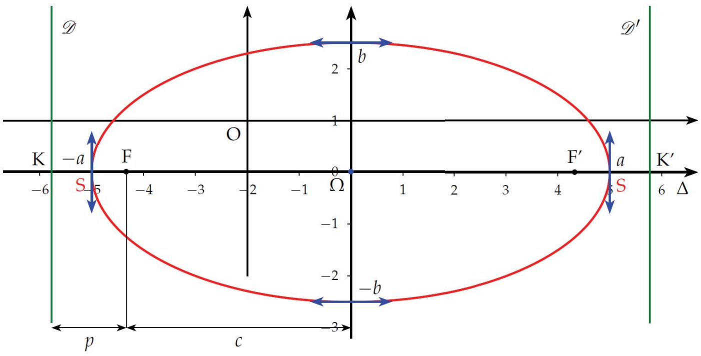
- $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2=a^2-b^2$ គេបាន $e^2=\frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e=\frac{c}{a}$ ។

- $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}\Leftrightarrow p^2=\frac{b^2\left(1-e^2\right)}{e^2}=\frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^4}{c^2}\Leftrightarrow p=\frac{b^2}{c}$

- $\Omega F=\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{b^2}{p}=b^2\times\frac{c}{b^2}=c$

ឧទាហរណ៍ ១៣. ចូរកំណត់ធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$(x-2)^2+4(y+1)^2-25=0$$



សមីការកោនិកជាអេលីប មាន $a = 5$ និង $b = \frac{5}{2}$ ៖

$$c = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \quad \Omega F = c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

៤.២.៣ អ៊ីពែបូល

ទ្រឹស្តីបទ ២.២: (អ៊ីពែបូល)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយនៅក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

នោះសមីការកោនិកនេះជា អ៊ីពែបូល ។

បើគេតាង $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ នោះគេបាន ធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega F = c$$

គេបានសមីការអាស៊ីមតូត : $Y = \frac{b}{a}X$ និង $Y = -\frac{b}{a}X$

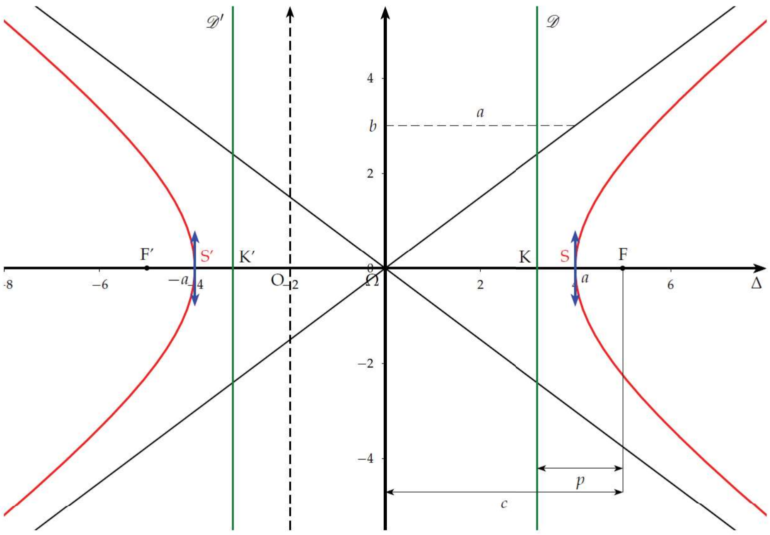
សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ ក្រោមទម្រង់ : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអ៊ីពែបូល ។
ដោយគេមាន $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ ។ គេបាន :

- $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2 = a^2 + b^2$ នោះគេបាន $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e = \frac{c}{a}$ ។

- $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2\left(e^2-1\right)}{e^2} = \frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega\text{F} = \frac{e^2p}{e^2-1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

ឧទាហរណ៍ ១៤. ចូរគណនាធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$



គេមាន $a = 4$ និង $b = 3$ ។ ដូច្នេះ

$$c = 5, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}, \quad p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}, \quad \Omega F = c = 5, \quad \text{អាស៊ីមតូត}:\ \ \text{T}Y = \pm\frac{3}{4}$$

ជំពូក ៥
អថេរចៃដន្យមានរបាយប្រូបាបីលីតេរួម

(Jointly Distributed Random Variables)

Ham Karim

RUPP

TUP-BA

មាតិការ

1. របាយប្រូបាបីលីតេរួម
2. អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Outline

1. របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម
2. អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Joint PMF

Definition

គេឱ្យអថេរចៃដន្យដាច់ ពីរ X និង Y ។ អនុគមន៍របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម (joint PMF) របស់អថេរ X និង Y កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

ចំណាំ.

- សញ្ញា , (comma) មានន័យថា “និង” ដូច្នេះ គេសរសេរ

$$\begin{aligned} P_{XY}(x, y) &= P(X = x, Y = y) \\ &= P((X = x) \text{ និង } (Y = y)) \end{aligned}$$

- $\sum_{\forall (x_i, y_j)} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$

ម៉ាជីណាល PMF (Marginal PMF)

គេដឹងថាអនុគមន៍ PMF កំណត់បានព័ត៌មានទាំងអស់ ទាក់ទងនឹងបំណែងចែករបស់ X និង Y ។ ដូច្នេះ គេអាចរកបានអនុគមន៍ PMF របស់អថេរ X ចេញពីអនុគមន៍ PMF រួមជាមួយ Y ។

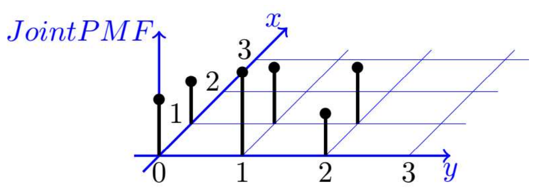
$$
\begin{aligned}
P_X(x) &= P(X = x) \\
&= \sum_{y_j} P\left(X = x, Y = y_j\right) \quad \text{ច្បាប់ប្រូបា.សរុប} \\
&= \sum_{y_j} P_{XY}\left(x, y_j\right)
\end{aligned}
$$

គេហៅ $P_X(x)$ ថា ម៉ាជីណាល PMF របស់អថេរ X ។ ដូចគ្នាដែរ គេកំណត់បាន ម៉ាជីណាល PMF របស់អថេរ Y ដោយ ៖ $P_Y(Y) = \sum_{x_i} P_{XY}\left(x_i, y\right)$

ឧទាហរណ៍. Joint PMF

គេឱ្យអថេរចៃដន្យពីរ X និង Y មាន PMF រួម :

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$X=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



(a) រក $P(X = 0, Y \leq 1)$ (b) ចូររកម៉ាជីណាល PMFs របស់អថេរ X និង Y ។

Joint cdf

Definition

គេឱ្យអថេរចៃដន្យមួយគូ (ជាអថេរដាច់ ឬ អថេរជាប់) X និង Y ។ អនុគមន៍របាយ ប្រូបាប៊ីលីតេកើន-រួម របស់អថេរ X និង Y កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

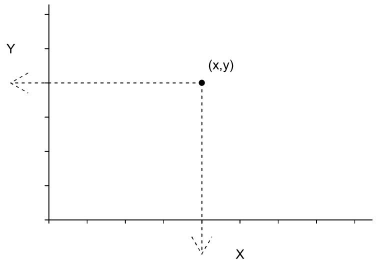
$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

Joint cdf

Definition

គេឱ្យអថេរចៃដន្យមួយគូ (ជាអថេរដាច់ ឬ អថេរជាប់) X និង Y ។ អនុគមន៍របាយ ប្រូបាបីលីតេកើន-រួម របស់អថេរ X និង Y កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P[X \leq x, Y \leq y] \\ &= P[(X,Y) \text{ ស្ថិតនៅទិសនិរតីនៃចំណុច } (x,y)] \end{aligned}$$



លក្ខណៈរបស់ joint cdf

- សម្រាប់អថេរចៃដន្យមួយៈ គេបាន ម៉ាជីណាល cdf (marginal cdf)

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x,\infty)$$

លក្ខណះរបស់ joint cdf

- សម្រាប់អថេរចៃដន្យមួយៈ គេបាន ម៉ាជីណាល cdf (marginal cdf)

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F_{X,Y}(\infty, y)$$

វ៉ាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

លក្ខណះរបស់ joint cdf

- សម្រាប់អថេរចៃដន្យមួយៈ គេបាន ម៉ាជីណាល cdf (marginal cdf)

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F_{X,Y}(\infty, y)$$

- ប្រូបាប៊ីលីតេរួម

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y)$$

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

របាយប្រូបាបលីតេរួម

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)			
P(W=k)			

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺៈ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{66}$		
P(W=k)			

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺៈ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{66}$	$2 \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{66}$	
P(W=k)			

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$	$2\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{36}{66}$	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$
P(W=k)			

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរ ដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$	$2\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{36}{66}$	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$
P(W=k)	$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{28}{66}$		

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$	$2\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{36}{66}$	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$
P(W=k)	$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{28}{66}$	$2\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{32}{66}$	

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$	$2\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{36}{66}$	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$
P(W=k)	$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{28}{66}$	$2\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{32}{66}$	$\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{6}{66}$

ឧទាហរណ៍ : អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតូមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា. របស់ B និង W កំណត់ដោយ :

	0	1	2
P(B=k)	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$	$2\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{36}{66}$	$\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{66}$
P(W=k)	$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{28}{66}$	$2\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{32}{66}$	$\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{6}{66}$

ចំណាំ. $P(B=k)=\dfrac{\binom{6}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{12}{2}}$ ហើយ $P(W=k)=\dfrac{\binom{4}{k}\binom{8}{2-k}}{\binom{12}{2}}$

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតូមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w)=P(B=b,W=w)$

		W: 0	1	2	
	0				
B	1				
	2				

$$P(B=b,W=w)=\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}}\right.$$

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

W

		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$			
B	1				
	2				

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \end{cases}$$

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

W

		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$		
B	1				
	2				

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \end{cases}$$

របាយប្រូបាបលីតេរួម

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W			
		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$	
B	1				
	2				

$$P(B=b,W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

របាយប្រូបាបលីតេរួម

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W			
		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$	
B	1	$\frac{12}{66}$			
	2				

$$P(B=b,W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ & \\ & \end{cases}$$

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W		
		0	1	2
B	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$
	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	
	2			

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1 \\ & \end{cases}$$

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W		
		0	1	2
B	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$
	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0
	2			

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1 \\ & \end{cases}$$

HK (RUPP) Chapter 5 Probability ១១/25

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w)=P(B=b,W=w)$

		W = 0	W = 1	W = 2
B	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$
	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0
	2	$\frac{15}{66}$		

$$P(B=b,W=w)=\begin{cases}1/66 & \text{បើ } b=0, w=0\\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1\\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2\\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0\\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1\\ 15/66 & \text{បើ } b=2, w=0\end{cases}$$

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w)=P(B=b,W=w)$

		W = 0	W = 1	W = 2
B	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$
	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0
	2	$\frac{15}{66}$	0	0

$$P(B=b,W=w)=\begin{cases}1/66 & \text{បើ } b=0, w=0\\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1\\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2\\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0\\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1\\ 15/66 & \text{បើ } b=2, w=0\end{cases}$$

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមាន ស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W			
		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$	
B	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0	
	2	$\frac{15}{66}$	0	0	

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1 \\ 15/66 & \text{បើ } b=2, w=0 \end{cases}$$

$$P(B=b, W=w) = \frac{\binom{6}{b}\binom{4}{w}\binom{2}{2-b-w}}{\binom{12}{2}}, \text{ ចំពោះ } 0 \le b, w \le 2 \text{ និង } b+w \le 2$$

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមាន ស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺ៖ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W			
		0	1	2	
	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$
B	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0	$\frac{36}{66}$
	2	$\frac{15}{66}$	0	0	$\frac{15}{66}$

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1 \\ 15/66 & \text{បើ } b=2, w=0 \end{cases}$$

$$P(B=b, W=w) = \frac{\binom{6}{b}\binom{4}{w}\binom{2}{2-b-w}}{\binom{12}{2}}, \text{ ចំពោះ } 0 \le b, w \le 2 \text{ និង } b+w \le 2$$

HK (RUPP) Chapter 5 Probability ១១ / 25

គេទាញយកស្រោមជើងពីរដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ទៅវិញ ចេញពីថតតុមួយ ដែលមានស្រោមជើងចំនួនដប់ពីរពណ៌ គឺៈ ខ្មៅចំនួន 6 , សចំនួន 4 និង ស្វាយចំនួន 2 ។
តាង B ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ខ្មៅ ហើយ W ជាចំនួនស្រោមជើងពណ៌ស។

ដូច្នេះ របាយប្រូបា.រួម កំណត់ដោយ : $p_{B,W}(b,w) = P(B=b, W=w)$

		W = 0	W = 1	W = 2	
B	0	$\frac{1}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$
	1	$\frac{12}{66}$	$\frac{24}{66}$	0	$\frac{36}{66}$
	2	$\frac{15}{66}$	0	0	$\frac{15}{66}$
		$\frac{28}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{6}{66}$	

$$P(B=b, W=w) = \begin{cases} 1/66 & \text{បើ } b=0, w=0 \\ 8/66 & \text{បើ } b=0, w=1 \\ 6/66 & \text{បើ } b=0, w=2 \\ 12/66 & \text{បើ } b=1, w=0 \\ 24/66 & \text{បើ } b=1, w=1 \\ 15/66 & \text{បើ } b=2, w=0 \end{cases}$$

$$P(B=b, W=w) = \frac{\binom{6}{b}\binom{4}{w}\binom{2}{2-b-w}}{\binom{12}{2}},$$ ចំពោះ $0 \le b, w \le 2$ និង $b + w \le 2$

របាយម៉ាជីណាល (Marginal Distributions)

ចំណាំ. ផលបូកតាមជួរឈរ និងជួរដេក គឺជាបំណែងចែករបស់ B និង W រៀងគ្នា។

$$P(B=b) = P(B=b, W=0) + P(B=b, W=1) + P(B=b, W=2)$$

$$P(W=w) = P(B=0, W=w) + P(B=1, W=w) + P(B=2, W=w)$$

របាយម៉ាជីណាល (Marginal Distributions)

ចំណាំ. ផលបូកតាមជួរឈរ និងជួរដេក គឺជាបំណែងចែករបស់ B និង W រៀងគ្នា។

$$P(B = b) = P(B = b, W = 0) + P(B = b, W = 1) + P(B = b, W = 2)$$

$$P(W = w) = P(B = 0, W = w) + P(B = 1, W = w) + P(B = 2, W = w)$$

គេហៅថា របាយម៉ាជីណាល របស់អថេរ B និង W ។

ជាទូទៅ

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y P(X = x \mid Y = y)P(Y = y)$$

របាយលក្ខខណ្ឌ

របាយលក្ខខណ្ឌកំណត់ដោយ ៖

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{\text{joint pmf}}{\text{marginal pmf}}$$

របាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យជាប់

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មានare របាយរួមជាប់ បើមានអនុគមន៍មួយ $f(x,y)$ ដែល

1. Non-negative : $f(x,y) \geq 0$ គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ និង
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$

ដូច្នេះ $f_{X,Y}(x,y)$ ហៅថា អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប.រួម (joint probability density function) របស់អថេរ X និង Y ។

របាយប្រូបាបីលីតេរួម

របាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យជាប់

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មានare របាយរួមជាប់ បើមានអនុគមន៍មួយ $f(x,y)$ ដែល

1. Non-negative : $f(x,y) \geq 0$ គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ និង
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$

ដូច្នេះ $f_{X,Y}(x,y)$ ហៅថា អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប.រួម (joint probability density function) របស់អថេរ X និង Y ។

- គ្រប់សំណុំ $C \subset \mathbb{R}^2$ គេបាន

$$P[(X,Y) \in C] = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$

របាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យជាប់

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មានare របាយរួមជាប់ បើមានអនុគមន៍មួយ $f(x, y)$ ដែល

1. Non-negative : $f(x, y) \geq 0$ គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ និង
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$

ដូច្នេះ $f_{X,Y}(x, y)$ ហៅថា អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប.រួម (joint probability density function) របស់អថេរ X និង Y ។

- គ្រប់សំណុំ $C \subset \mathbb{R}^2$ គេបាន

$$P[(X, Y) \in C] = \iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\, dx\, dy$$

- ទំនាក់ទំនងរវាង pdf រួម និង cdf រួម

$$F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy$$

របាយប្រូបាបលីតេរួម

របាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យជាប់

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មានare របាយរួមជាប់ បើមានអនុគមន៍មួយ $f(x, y)$ ដែល

1. Non-negative : $f(x, y) \geq 0$ គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ និង
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$

ដូច្នេះ $f_{X,Y}(x, y)$ ហៅថា អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប.រួម (joint probability density function) របស់អថេរ X និង Y ។

- គ្រប់សំណុំ $C \subset \mathbb{R}^2$ គេបាន

$$P[(X, Y) \in C] = \iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\, dx\, dy$$

- ទំនាក់ទំនងរវាង pdf រួម និង cdf រួម

$$F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy$$

HK (RUPP) Chapter 5 Probability ១៤ / 25

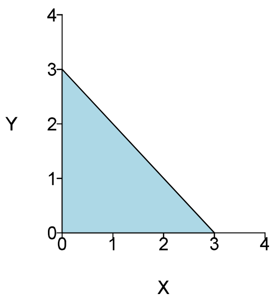
ម៉ាជីណាល pdfs

អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប.រួម ត្រូវបានកំណត់តាម "អាំងតេក្រាល" លើអថេរថៃជន្យមួយ ដូចខាងក្រោម ៖

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

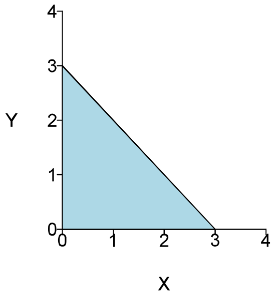
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$



យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$

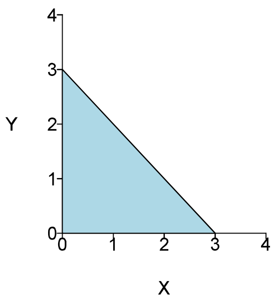
ដោយដង់ស៊ីតេរួមជាចំនួនថេរ នោះគេបាន



$$f(x,y)=\begin{cases} c & \text{for } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$

ដោយដង់ស៊ីតេរួមជាចំនួនថេរ នោះគេបាន



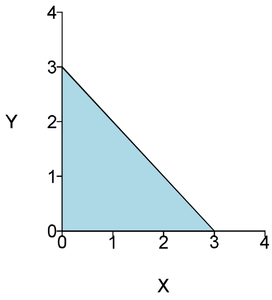
$$f(x,y)=\begin{cases} c & \text{for } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

ព្រោះ

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$

ដោយដង់ស៊ីតេរួមជាចំនួនថេរ នោះគេបាន



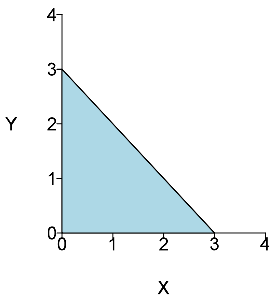
$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x+y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

ព្រោះ

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \iint_{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3} c\, dx\, dy \end{aligned}$$

យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$

ដោយដង់ស៊ីតេរួមជាចំនួនថេរ នោះគេបាន

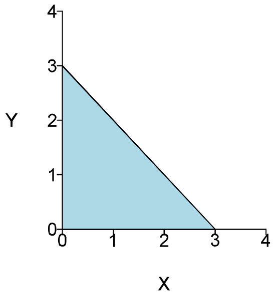


$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x+y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

ព្រោះ

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \iint_{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3} c\, dx\, dy \\ &= c \times \text{ផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ} = c \times \frac{3 \times 3}{2} \end{aligned}$$

យក X និង Y ចេញពីរូបត្រីកោណខាងក្រោម ។ ចូរគណនា joint pdf : $f_{X,Y}(x,y)$



ដោយដង់ស៊ីតេរួមជាចំនួនថេរ នោះគេបាន

$$f(x,y)=\begin{cases} c & \text{for } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3\\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

ព្រោះ

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 3} c\,dx\,dy$$
$$=c\times \text{ផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ}=c\times\frac{3\times 3}{2}$$

ដូច្នេះ $c=\frac{2}{9}$ ។

រំលឹក

cdf រួម របស់អថេរចៃដន្យ X និង Y :

$$F_{X,Y}(x,y)=P[X\leq x, Y\leq y], -\infty<x,y<\infty$$

- ប្រូបាប. របស់គូ (X,Y) ស្ថិតក្នុងចតុកោណ

$$P(x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2)$$
$$=F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)$$

- ម៉ាជីណល cdfs

$$F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty),\quad F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty,y)$$

វបាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យដាច់ពីរ ៖

- pmf រួម

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

- ម៉ាជីណាល pmfs

$$p_X(x) = \sum_{y:p(x,y)>0} p_{X,Y}(x,y), \quad p_Y(y) = \sum_{x:p(x,y)>0} p_{X,Y}(x,y)$$

វបាយរួមរបស់អថេរចៃដន្យជាប់ពីរ ៖

- pdf រួម
  - Non-negative : $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$
  - គ្រប់សំណុំ $C \subset \mathbb{R}^2$,

$$P[(X,Y) \in C] = \iint_{(x,y)\in C} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

- ម៉ាជីណាល pdfs

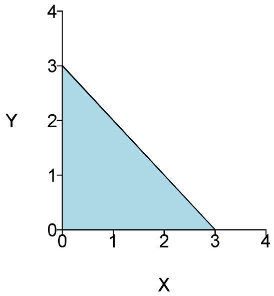
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?



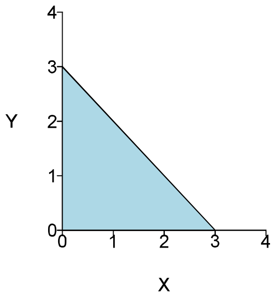
របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?

ចំពោះ $x \in [0,3]$,

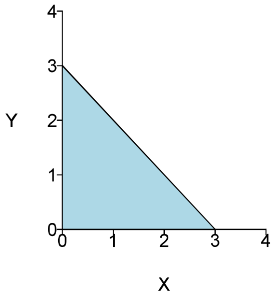


យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?

ចំពោះ $x \in [0,3]$,



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

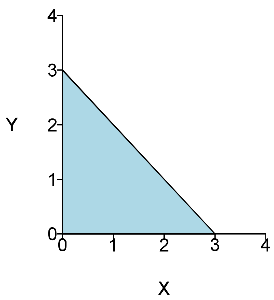
របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?

ចំពោះ $x \in [0,3]$,

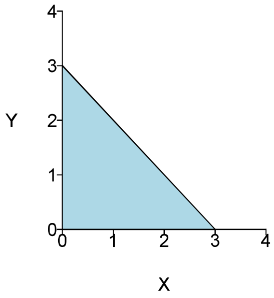


$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_{0}^{3-x} \frac{2}{9}\, dy$$

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?



ចំពោះ $x \in [0,3]$,

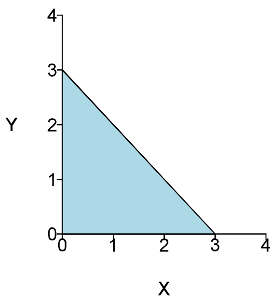
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^{3-x} \frac{2}{9}\, dy$$

Be careful about the range of Y given $X = x$.

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{for } x \geq 0, y \geq 0 \text{ and } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?



ចំពោះ $x \in [0,3]$,

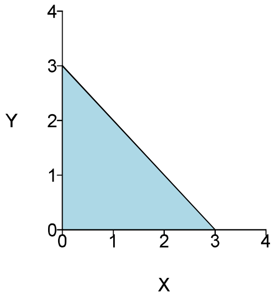
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^{3-x} \frac{2}{9}\, dy = \frac{2}{9}(3-x)$$

Be careful about the range of Y given $X = x$.

យក X និង Y មាន pdf រួមខាងក្រោម៖

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{9} & \text{for } x\geq 0, y\geq 0 \text{ and } x+y\leq 3\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ចូររកម៉ាជីណាល pdf $f_X(x)$?



ចំពោះ $x\in[0,3]$,

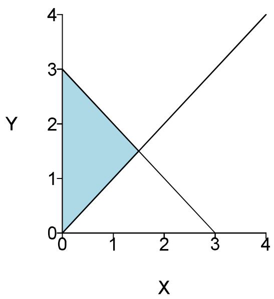
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_0^{3-x}\frac{2}{9}\,dy=\frac{2}{9}(3-x)$$

Be careful about the range of Y given $X=x$.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}(3-x) & \text{ចំពោះ } x\in[0,3]\\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

ក្នុងឧទាហ៍ខាងលើ ចូររក $P(X<Y)$?

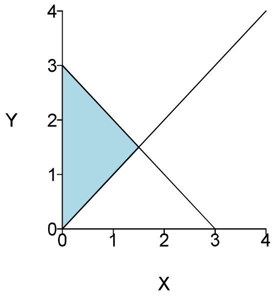
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3\\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$



ក្នុងឧទាហ៍ខាងលើ ចូររក $P(X < Y)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3, x < y\}$.

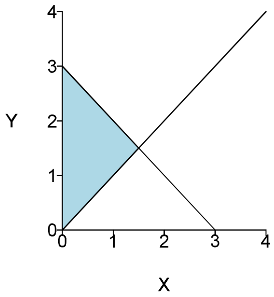


របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

ក្នុងឧទាហ៍ខាងលើ ចូររក $P(X < Y)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

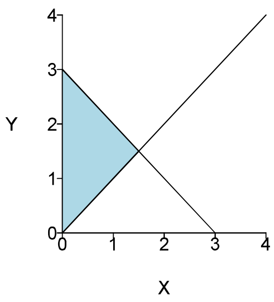
កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3, x < y\}$.



$$P(X < Y) = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$

ក្នុងឧទាហ៏ខាងលើ ចូររក P(X < Y) ?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$



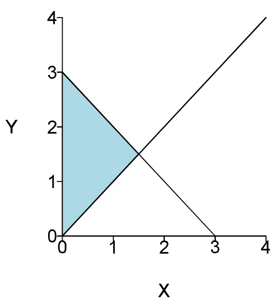
កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3, x < y\}$.

$$P(X < Y) = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_x^{3-x} \frac{2}{9}\,dy \right] dx$$

របាយប្រូបាប៊ីលីតេរួម

ក្នុងឧទាហ៏ខាងលើ ចូររក P(X < Y) ?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$



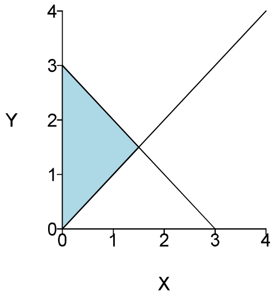
កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3, x < y\}$.

$$P(X < Y) = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_x^{3-x} \frac{2}{9}\,dy \right] dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{9}(3 - 2x)\,dx$$

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូររក $P(X<Y)$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3\\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3, x<y\}$.



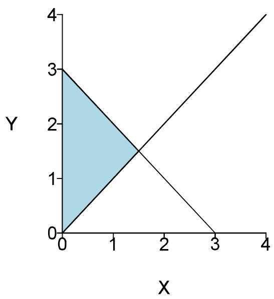
$$P(X<Y)=\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\int_x^{3-x}\frac{2}{9}\,dy\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{2}{9}(3-2x)\,dx=\frac{2}{9}\times\left[3x-x^2\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right]$$

របាយប្រូបាបីលីតេរួម

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូររក $P(X<Y)$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3\\ 0 & \text{ករណីផ្សេង}\end{cases}$$

កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0 \text{ និង } x+y\leq 3, x<y\}$.

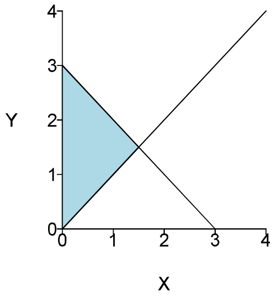


$$P(X<Y)=\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[\int_x^{3-x}\frac{2}{9}\,dy\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{2}{9}(3-2x)\,dx=\frac{2}{9}\times\left[3x-x^2\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$=\frac{2}{9}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)$$

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូររក $P(X < Y)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{ចំពោះ } x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3 \\ 0 & \text{ករណីផ្សេង} \end{cases}$$

កំណត់តំបន់ (ដែន)
$C = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ និង } x + y \leq 3, x < y\}$.



$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_x^{3-x} \frac{2}{9}\,dy\right] dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{9}(3-2x)\,dx = \frac{2}{9} \times \left[3x - x^2\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Outline

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា (independent) បើគ្រប់សំណុំចំនួនពិត $A, B \subset \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា (independent) បើគ្រប់សំណុំចំនួនពិត $A, B \subset \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា លុះត្រាតែ

- Cdf: គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា (independent) បើគ្រប់សំណុំចំនួនពិត $A, B \subset \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា លុះត្រាតែ

- Cdf: គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- បើអថេរទាំងពីរដាច់ នោះ pmf : គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

Definition

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា (independent) បើគ្រប់សំណុំចំនួនពិត $A, B \subset \mathbb{R}$ គេបាន ៖

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

អថេរចៃដន្យ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា លុះត្រាតែ

- Cdf: គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- បើអថេរទាំងពីរដាច់ នោះ pmf : គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

- បើអថេរទាំងពីរជាប់ នោះ pdf : គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

ឧទាហរណ៍.

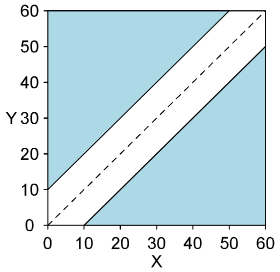
បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

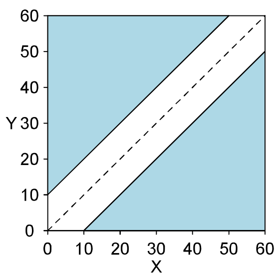
តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។



ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។



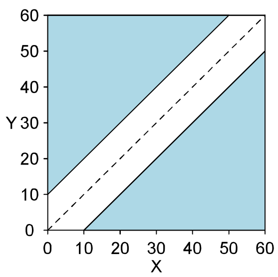
$$P(|X-Y|>10)$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។

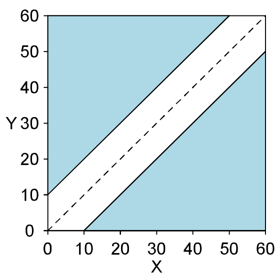


$$P(|X-Y|>10)$$
$$=P(Y>X+10)+P(Y<X-10)$$

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។



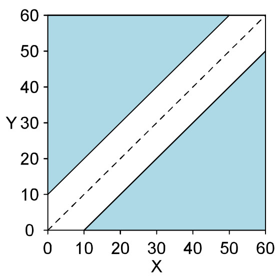
$$
\begin{aligned}
&P(|X-Y|>10)\\
&=P(Y>X+10)+P(Y<X-10)\\
&=2P(Y>X+10)
\end{aligned}
$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។

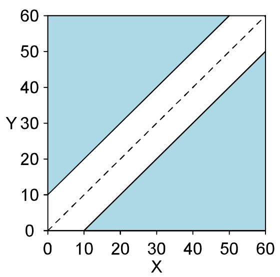


$$
\begin{aligned}
&P(|X-Y|>10)\\
&=P(Y>X+10)+P(Y<X-10)\\
&=2P(Y>X+10)\\
&=2\iint_{y>x+10} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។



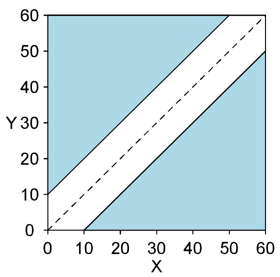
$$
\begin{aligned}
& P(|X-Y|>10) \\
&= P(Y>X+10)+P(Y<X-10) \\
&= 2P(Y>X+10) \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យគ្នា

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។

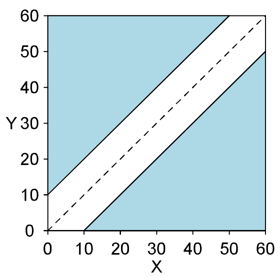


$$
\begin{aligned}
& P(|X-Y|>10) \\
&= P(Y>X+10)+P(Y<X-10) \\
&= 2P(Y>X+10) \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10} (1/60)^2\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

ឧទាហរណ៍.

បុរសនិងស្ត្រីម្នាក់សម្រេចចិត្តជួបគ្នានៅទីតាំងជាក់លាក់មួយ ។ ប្រសិនបើពួកគេម្នាក់ៗមកដល់ទីណាត់នៅខណៈមួយ កំណត់បានរបាយឯកសណ្ឋាន (uniformly distributed) នៅចន្លោះម៉ោង 12 ថ្ងៃត្រង់ ដល់ម៉ោង 1 រសៀល ។ ចូររកប្រូបាប៊ីលីតេដែលអ្នកមកដល់ដំបូង ត្រូវរង់ចាំយូរជាង 10 នាទី។

តាងអថេរចៃដន្យ X, Y ជាខណៈពេល ដែលពួកគេមកដល់ (uniform ចន្លោះ 0 ទៅ 60 នាទី) ។



$$
\begin{aligned}
& P(|X-Y|>10) \\
&= P(Y>X+10)+P(Y<X-10) \\
&= 2P(Y>X+10) \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{y>x+10} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_{10}^{60}\int_{0}^{y-10}(1/60)^2\,dx\,dy = 25/36
\end{aligned}
$$

អថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យ

អថេរចៃដន្យជាប់ (ឬ ដាច់) X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា bf លុះត្រាតែ អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ (ម៉ាស់) ប្រូបាប៊ីលីតេរួម កំណត់ដោយ ៖

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y), \quad -\infty < x, y < \infty$$

សេចក្តីផ្តើមស្ថិតិ

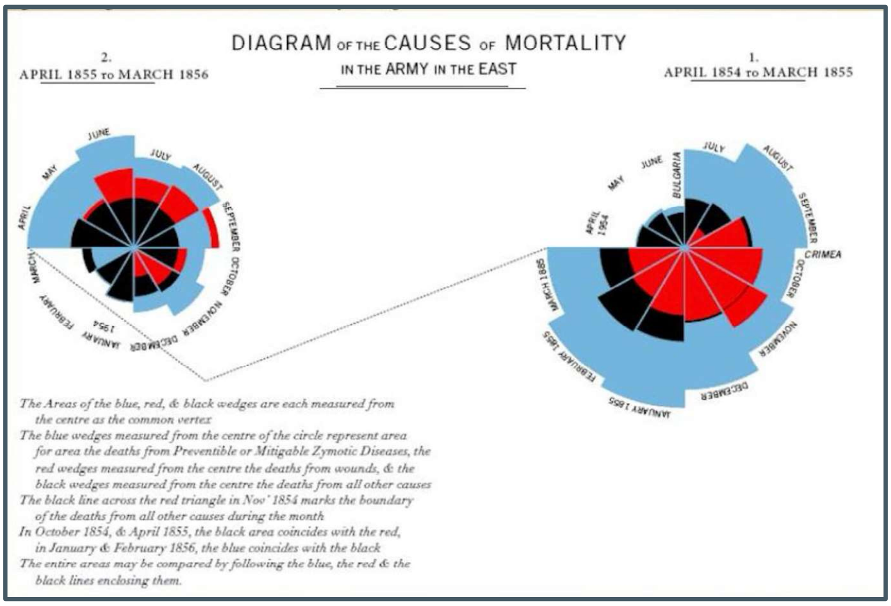
Introduction to statistics

ហាំ ការីម

TUP-BA (RUPP)

Introduction

Florence Nightingale



តើស្ថិតិជាអ្វី?

- វិទ្យាសាស្ត្រនៃការប្រមូល ការបង្ហាញ ការវិភាគ និងការបកស្រាយសមហេតុផលទៅលើទិន្នន័យ។
- ការប្រមូល ការរៀបចំ ការសង្ខេប និងការវិភាគទិន្នន័យ
  → *Descriptive* statistics (ស្ថិតិព័ណ៌នា)
- ការទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋានអំពីតួនៃទិន្នន័យ នៅពេលដែលមានតែផ្នែកមួយនៃទិន្នន័យប៉ុណ្ណោះ ដែលត្រូវបានអង្កេត
  → *Inferential* statistics (ស្ថិតិសន្និដ្ឋាន)

តើយើងនឹងរៀនអ្វីខ្លះ?

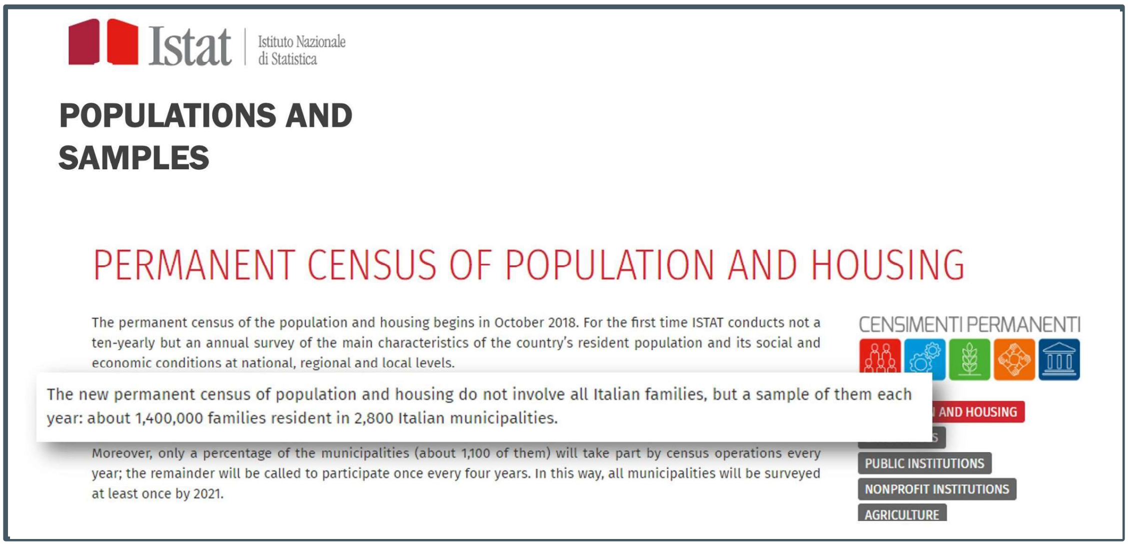
- របៀបប្រមូលទិន្នន័យ
- របៀបសង្ខេបទិន្នន័យ
- របៀបធ្វើការសម្រេចចិត្តជាមួយទិន្នន័យដែលមាន

ការធ្វើសំណាក
Sampling

វត្ថុបំណងនៃការសិក្សា៖

- ស្វែងយល់ពីភាពខុសគ្នារវាងប៉ូពុយឡាស្យុង និង សំណាក (គំរូតាង)
- ស្វែងយល់ពីភាពខុសគ្នារវាងយុទ្ធសាស្ត្រនៃការធ្វើសំណាក
- ស្វែងយល់ពីល្បឿននៃការធ្វើសំណាក និងភាពមានលំអៀង

ប៉ូពុយឡាស្យុង *vs* សំណាក



ឱកាស *vs* *សំណាកចៃដន្យ*

- 🎯 **គំរូឱកាស** គឺជាគំរូដែលទាញចេញពីផ្នែកនៃប៉ូពុយឡាស្យុង ដែលនៅជិតដៃ (ប្រហែលជាមិនតំណាងឱ្យប៉ូពុយឡាស្យុងទាំងមូលទេ)។

- 📌 អ្នកជំងឺទាំងអស់ដែលមានវត្តមាននៅឯគ្លីនិកមួយកន្លែង ក្នុងអំឡុងពេលមួយជាក់លាក់មួយ ត្រូវបានគេចុះឈ្មោះ ។

Opportunity *vs* random sample

- 🎯 **សំណាកចៃដន្យ** គឺជាសំណាកមួយដែលប្រូបាប៊ីលីតេទទួលបានគំរូជាក់លាក់ណាមួយ អាចត្រូវបានគេគណនា (ដែលគួរតែតំណាងឱ្យប៉ូពុយឡាស្យុងទាំងមូល) ។

- 📌 សំណុំអ្នកជំងឺដែលឆ្លងរោគ ដែលគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ ត្រូវបានចុះឈ្មោះ ។

Strategy 1: ការធ្វើសំណាកចៃដន្យងាយ ៗ
(Simple random sampling)

- 🎯 សំណាកមួយ មានទំហំ n ត្រូវបានគេដកចេញពីប៉ូពុយឡាស្យុងមួយ មានទំហំ N ដោយធានាឱ្យបានថា គ្រប់សំណាកទំហំ n គឺទំនងជាស្មើៗគ្នា ។

Strategy 1: ការធ្វើសំណាកចៃដន្យងាយ

📌 $N = 90$
$n = 10$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Strategy 1: ការធ្វើសំណាកចៃដន្យងាយ

📌 $N = 90$
$n = 10$

$49, 65, 25, 74, 18$
$90, 47, 24, 71, 37$

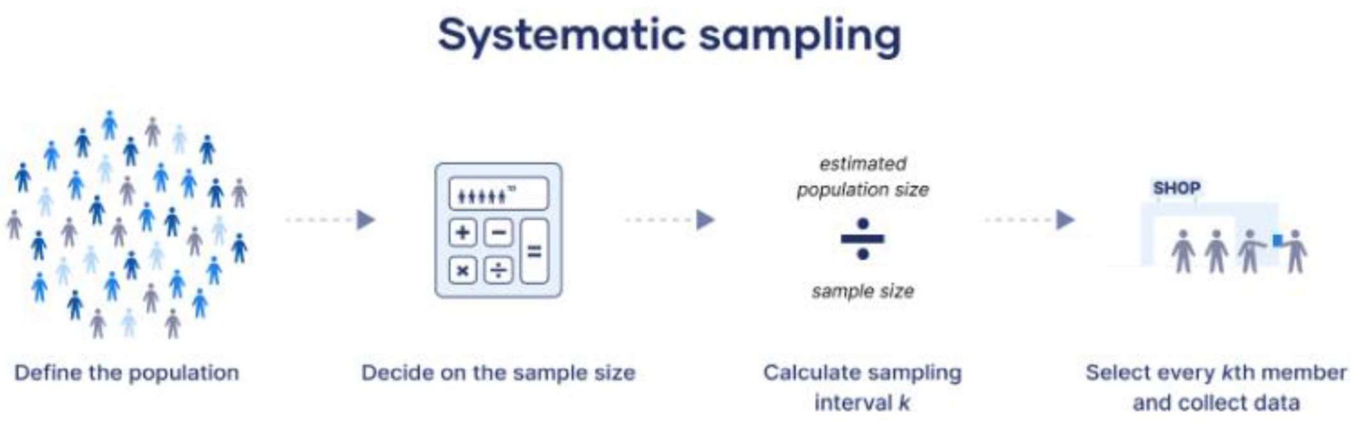
Strategy 2: ការធ្វើសំណាកជាប្រព័ន្ធ

(Systematic Sampling)

📌 $N = 90$
$n = 10$

$x = 42$

$step = N/n = 90/10 = 9$



Strategy 2: Systematic Sampling

📌 $N = 90$
$n = 10$

$x = 42$

$step = N/n = 90/10 = 9$

La Tombola di PianetaBambini.it TABELLONE

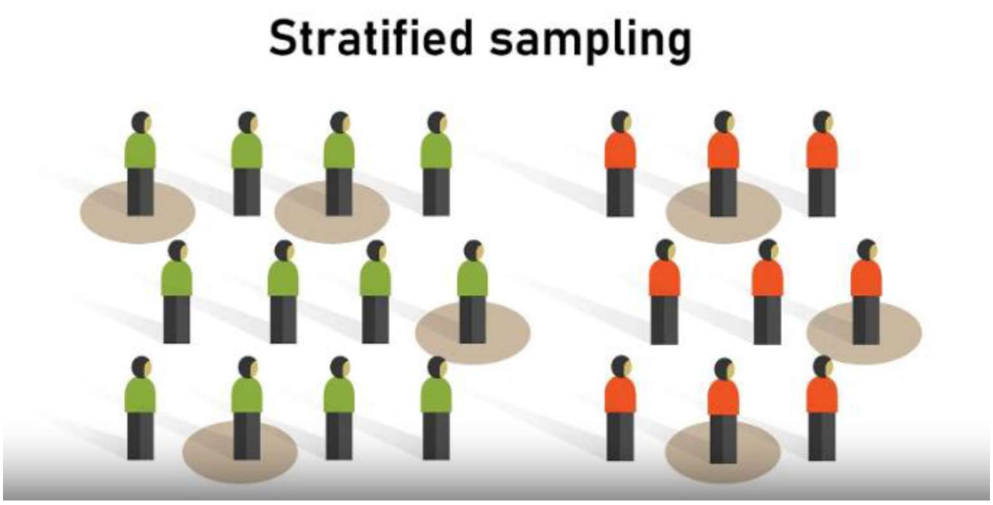
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Strategy 3: ការធ្វើសំណាកចៃដន្យតាមកម្រិត (Stratified Random Sampling)

🎯 ប៉ូពុយឡាស្យុងត្រូវបានបែងចែកទៅជាក្រុមដូចគ្នា (strata) ហើយសំណាកចៃដន្យងាយ ត្រូវបានដកចេញពី stratum នីមួយៗ

Variation #1: សំណាកជាប្រព័ន្ធតាមកម្រិត (stratified systematic sample)

Variation #2: សំណាកតាមកម្រិតសមមាត្រទៅនឹងទំហំ (stratified sampling proportional to size)



Strategy 3: Stratified Random Sampling

📌 $N = 90$
$N_{female} = 60$
$N_{male} = 30$

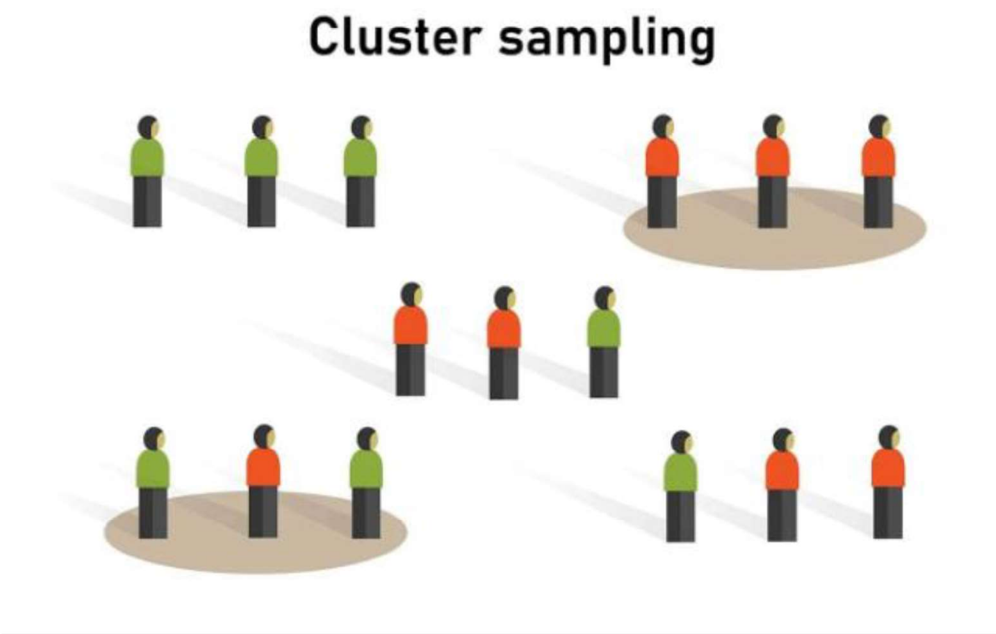
$n = 9$
$n_{female} = 6$
$n_{male} = 3$

$$Females: 46, 20, 26, 50, 47, 3$$
$$Males: 69, 85, 87$$

Strategy 4: ការធ្វើសំណាកតាមចង្កោម (Cluster sampling)

🎯 ប៉ូពុយឡាស្យុងត្រូវបានគេបែងចែកទៅជាចង្កោមៗ ហើយសំណាកចៃដន្យមួយត្រូវបានគេដកចេញ (The population is divided into clusters, and a simple random sample is drawn)

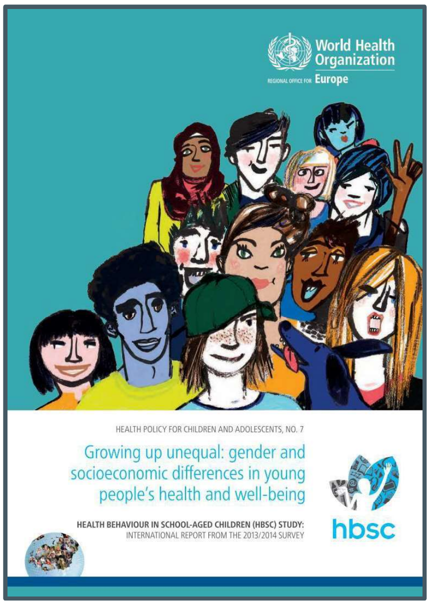
Variation: ដំណាក់កាលទី១ (ការអង្កេតអ្វីៗទាំងអស់) *vs*
ដំណាក់កាលទី២ (ការធ្វើសំណាកនៅក្នុងចង្កោម)



Strategy 4: Cluster sampling

Sampling in the wild

https://hbsc.org



Exercise #1

? អ្នកតំណាងរោងចក្រផលិតឈើស កំពុងសាកសួរសំណួរអំពីការប្រើប្រាស់ឈើស ទៅកាន់រាល់អតិថិជនទី5 ដែលដើរចូលក្នុងផ្សារទំនើប។ តើយុទ្ធសាស្ត្រនៃការធ្វើសំណាកណាមួយ ដែលគេប្រើ?

a) simple random sampling

b) systematic sampling

c) stratified sampling

d) none of the above

Exercise #1 -- Solution

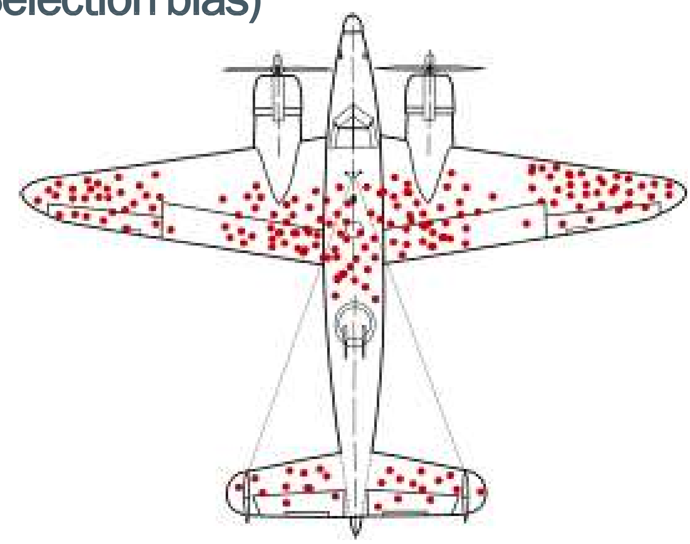
? A representative of a cheese factory is asking questions on cheese consumption to every 5th customer entering the supermarket

Which kind of sampling strategy are they using?

a) simple random sampling
b) systematic sampling
c) stratified sampling
d) none of the above ✅

លំអៀងក្នុងការជ្រើសរើស (Selection bias)

- Survivor bias
- Volunteer bias
- Lost to follow up bias
- . . .



Selection bias in the wild

Patterns of item nonresponse behaviour to survey questionnaires are systematic and associated with genetic loci

Gianmarco Mignogna, Caitlin E. Carey, Robbee Wedow, Nikolas Baya, Mattia Cordioli, Nicola Pirastu, Rino Bellocco, Kathryn Fiuza Malerbi, Michel G. Nivard, Benjamin M. Neale, Raymond K. Walters & Andrea Ganna

Nature Human Behaviour **7**, 1371–1387 (2023) | Cite this article

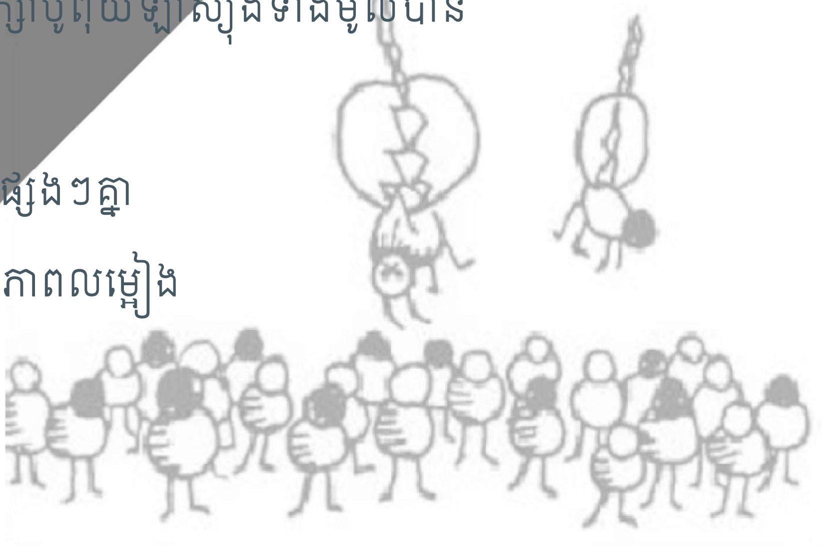
Exercise #2 -- Solution

? អ្នកស្រាវជ្រាវបានផ្ញើរលិខិតទៅអ្នកចូលនិវត្តន៍ ដើម្បីសួរអំពីសុខភាពផ្លូវចិត្តរបស់ពួកគេ បន្ទាប់ពីការបិទចរាចរក្នុងអំឡុងពេល COVID-19។ អ្នកចូលនិវត្តន៍ ត្រូវបានស្នើឱ្យបង្ហោះចម្លើយត្រឡប់មកពួកគេវិញ ។ តើការសិក្សារបស់ពួកគេមានកម្រិតល្អៀងណាមួយ?

a) No
b) Yes, *volunteer bias*
c) Yes, *survivor bias*
d) Both b) and c) ✅

សង្ខេប

- នៅពេលដែលគេមិនអាចសិក្សាប៉ុពុយឡាស្យុងទាំងមូលបាន គេជ្រើសរើសគំរូតំណាង
- មានយុទ្ធសាស្ត្រធ្វើសំណាកផ្សេងៗគ្នា
- សំណាកទាំងឡាយ អាចមានភាពលម្អៀង



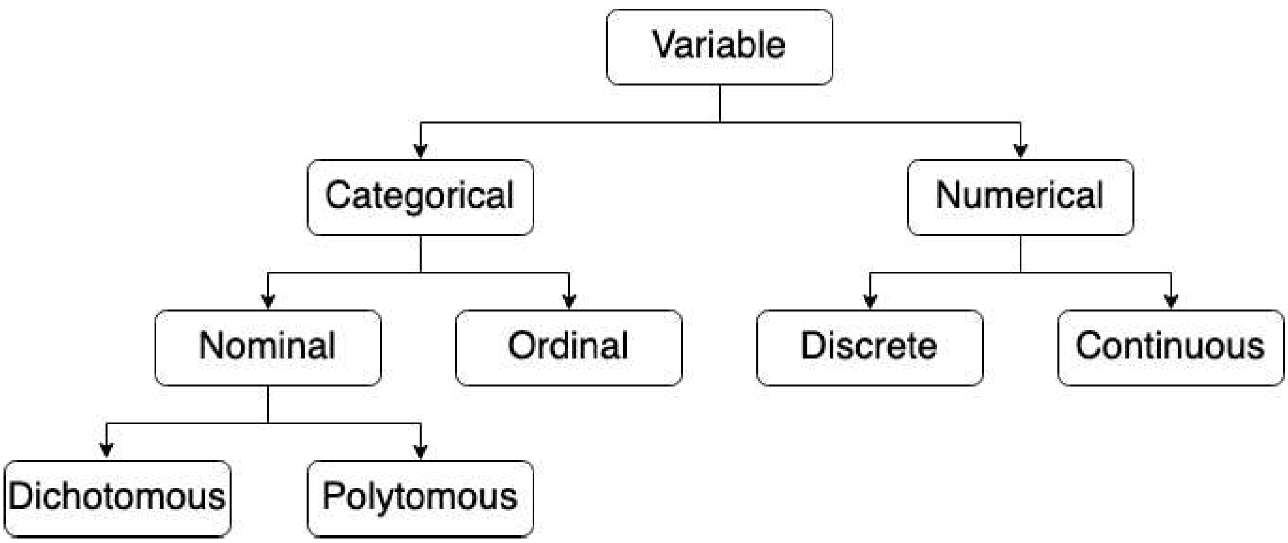
ការសង្ខេបទិន្នន័យ

Summarise data

Learning objectives

- Understand the differences between data types
- Be able to summarise each data type using measure of centrality and dispersion
- Understand the difference between parameters and statistics
- Understand why visualise your data is important

ប្រភេទទិន្នន័យ



Exercise #3

? តើទិន្នន័យប្រភេទណាខ្លះត្រូវបានបញ្ចូលក្នុងតារាងនេះ?

Table 1 Patient characteristics.

	All cohorts
N (pre-treatment)	88
N (follow-up)	66
Sex	
Male	57 (64.8%)
Female	31 (35.2%)
Age (years)	60.5 ± 15.0
BMI (kg/m²)	28.0 ± 5.4
***BRAF* mutant**	40 (45.5%)
LDH (≤ULN)	58 (65.9%)
Metastatic stage	
Stage III unresectable	2 (2.3%)
M1a	14 (15.9%)
M1b	17 (19.3%)
M1c	32 (36.4%)
M1d	23 (26.1%)
ECOG performance status	
0	47 (53.4%)
1	31 (35.2%)
2	8 (9.1%)
3	2 (2.3%)
ICI therapy	
Ipilimumab	1 (1.1%)
Pembrolizumab	20 (22.7%)
Nivolumab	30 (34.1%)
Ipilimumab + Nivolumab	37 (42.0%)

Visconti A., *et al.*, Total serum *N*-glycans associate with response to immune checkpoint inhibition therapy and survival in patients with advanced melanoma, BMC Cancer, 2023 doi:10.1186/s12885-023-10511-3

Why do we care?

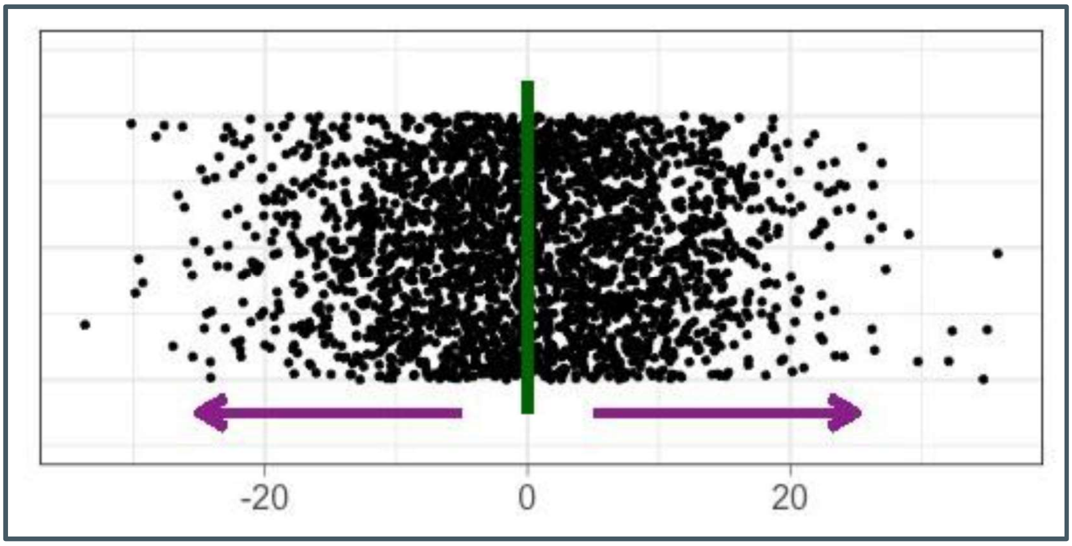
លក្ខណៈរបស់អ្នកជំងឺ៖

- អថេរគុណភាព (ប្រភេទ) ត្រូវបានបង្ហាញជាចំនួន (ភាគរយ)
- អថេរជាប់ ត្រូវបានកំណត់៖ មធ្យម +/- គម្លាតស្តង់ដារ

Table 1 Patient characteristics.

	All cohorts
N (pre-treatment)	88
N (follow-up)	66
Sex	
Male	57 (64.8%)
Female	31 (35.2%)
Age (years)	60.5 ± 15.0
BMI (kg/m²)	28.0 ± 5.4
***BRAF* mutant**	40 (45.5%)
LDH (≤ULN)	58 (65.9%)
Metastatic stage	
Stage III unresectable	2 (2.3%)
M1a	14 (15.9%)
M1b	17 (19.3%)
M1c	32 (36.4%)
M1d	23 (26.1%)
ECOG performance status	
0	47 (53.4%)
1	31 (35.2%)
2	8 (9.1%)
3	2 (2.3%)
ICI therapy	
Ipilimumab	1 (1.1%)
Pembrolizumab	20 (22.7%)
Nivolumab	30 (34.1%)
Ipilimumab + Nivolumab	37 (42.0%)

រង្វាស់តម្លៃកណ្ដាល និង ភាពរប៉ាយ
(Measures of centrality and dispersion)



Measure of centrality: ម៉ូដ (mode)

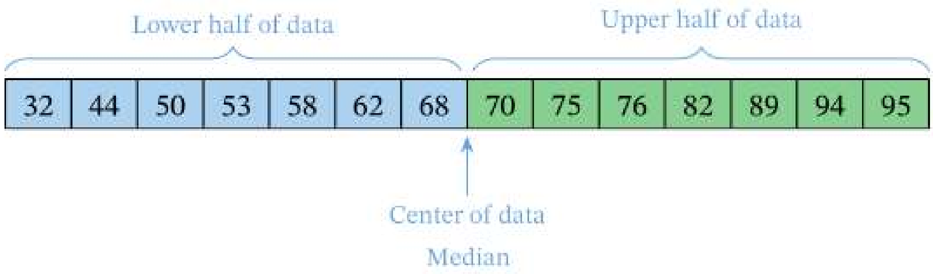
🎯 តម្លៃដែលលេចចេញញឹកញាប់បំផុត
The most frequent item

📌 $x = \{1, 1, 1, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 9\}$
$\text{mode}(x) = 1$

$x = \{1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 9\}$
$\text{mode}(x) = 1 \wedge 4$

Measure of centrality: median

🎯 The "middle" value



⚠️ Data should be sorted!

Measure of centrality: median

🎯 តម្លៃចំកណ្ដាល (the "middle" value)

📌 $n = 7, x = \{1, 3, 3, 6, 7, 8, 9\}$

$$\text{median}(x) = x_{(n+1)/2} = x_{(7+1)/2} = x_4 = 6$$

📌 $n = 8, x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$$\begin{aligned}\text{median}(x) &= \frac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2} = \frac{x_{(8/2)} + x_{((8/2)+1)}}{2} \\ &= \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5\end{aligned}$$

⚠️ Data should be sorted!

Measure of centrality: median

🎯 Robust to outliers

📌 $n = 7, x = \{1, 3, 3, 6, 7, 8, 9\}$

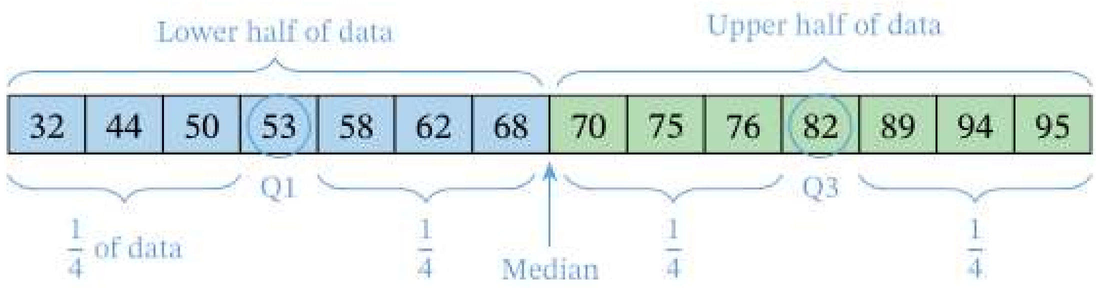
$$\text{median}(x) = x_{(n+1)/2} = x_{(7+1)/2} = x_4 = 6$$

📌 $n = 7, x = \{1, 3, 3, 6, 7, 8, 109\}$

$$\text{median}(x) = x_{(n+1)/2} = x_{(7+1)/2} = x_4 = 6$$

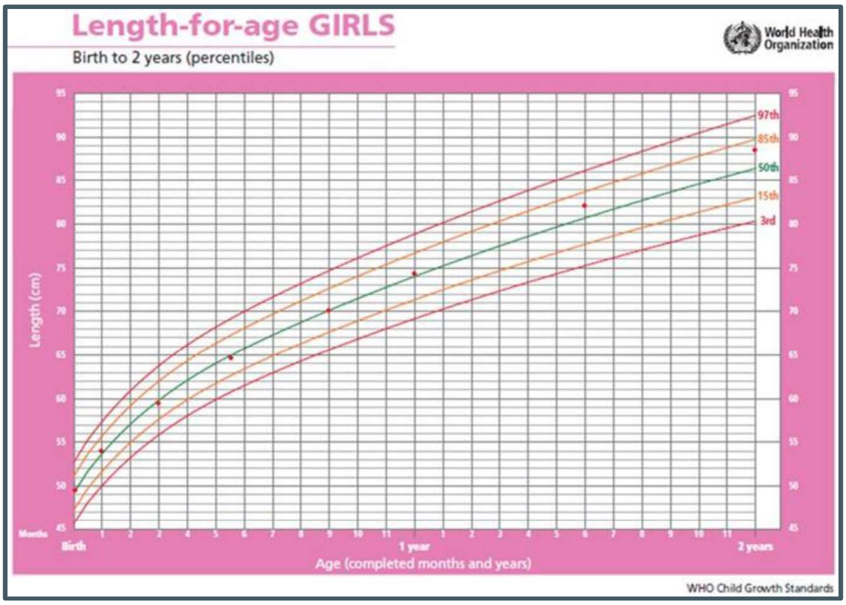
⚠️ Data should be sorted!

Quartiles



⚠️ Data should be sorted!

Percentiles



Measure of centrality: mean

🎯 Arithmetic mean

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

📌 $x = \{4, 36, 45, 50, 75\}$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{4+36+45+50+75}{5} = 42$

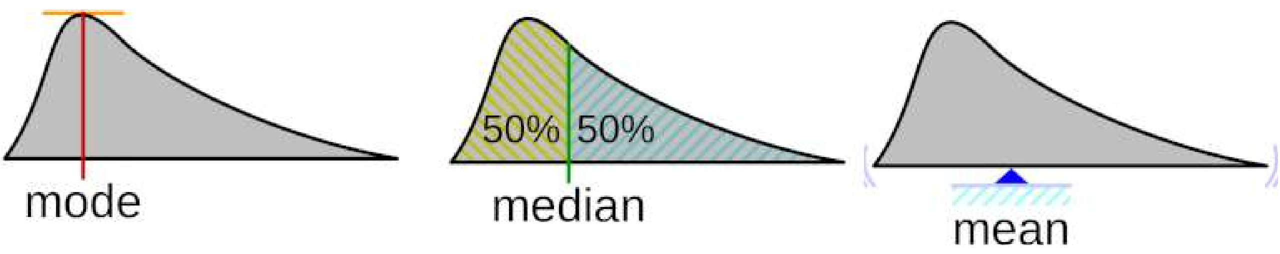
Measure of centrality: mean

🎯 Not really robust to outliers

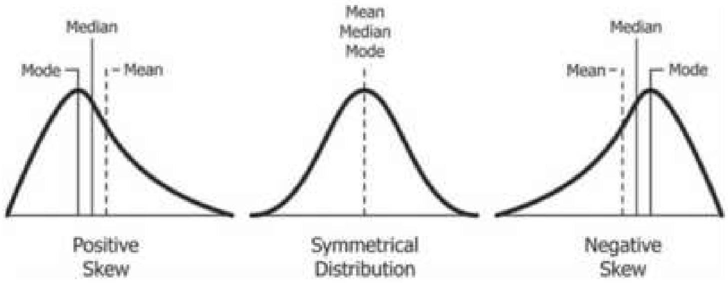
📌 $x = \{4, 36, 45, 50, 175\}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{4+36+45+50+175}{5} = 62$$

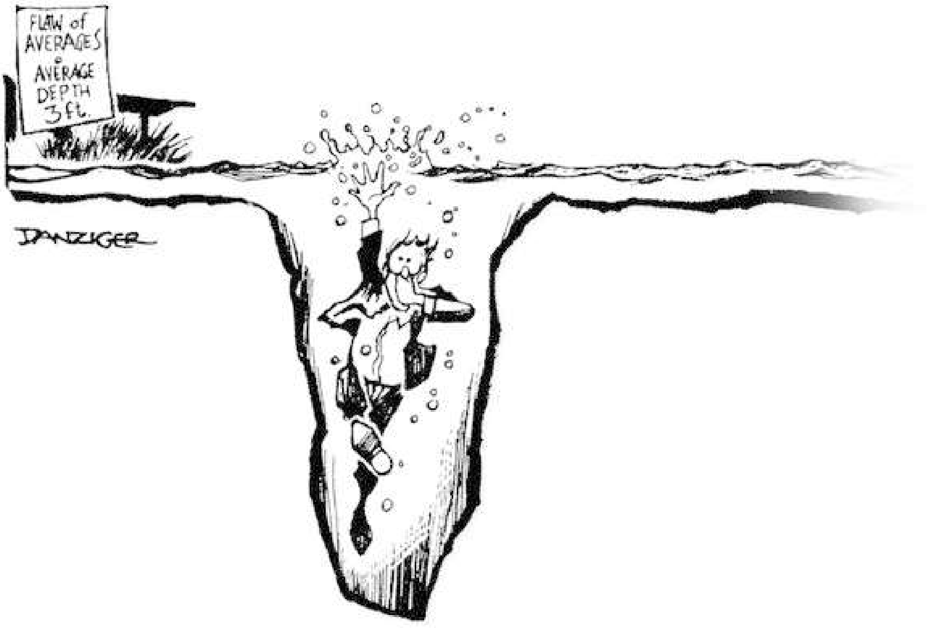
Mode *vs* median *vs* mean



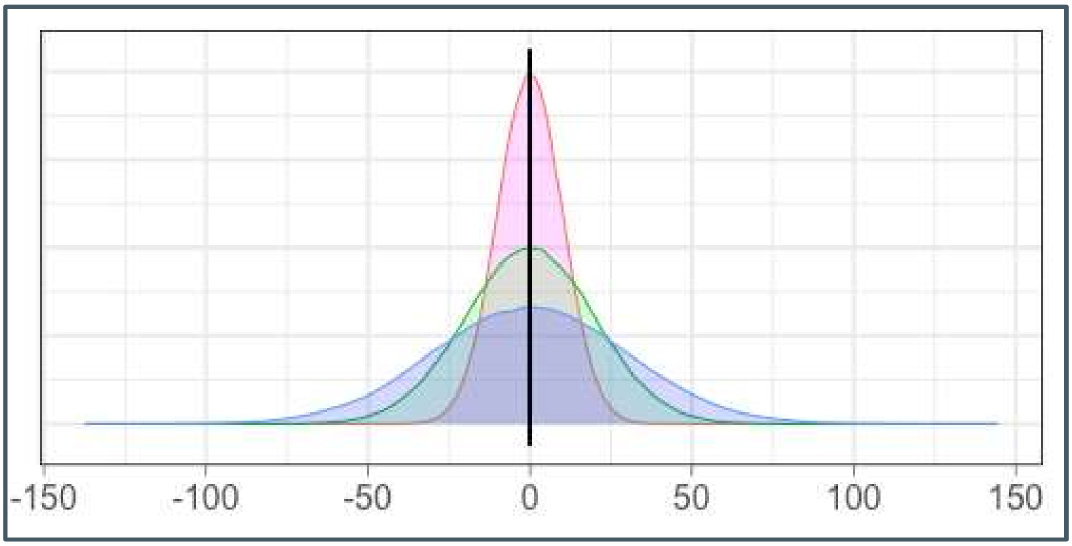
The shape of a distribution



Measures of dispersion



Measures of dispersion



Measure of dispersion: range

🎯 $\text{range}(x) = \max(x) - \min(x)$

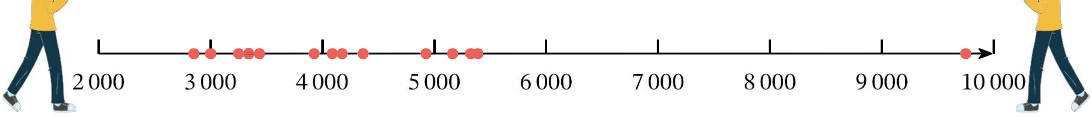
📌 $x = \{6, 7, 15, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 47, 49\}$

$\text{range}(x) = \max(x) - \min(x) = 49 - 6 = 43$

Measure of dispersion: range

Number of Messages Exchanged in 1 Month

4 942	3 331	2 830	5 424	3 506	5 483	3 004
4 411	3 942	4 199	9 754	4 091	3 423	5 253

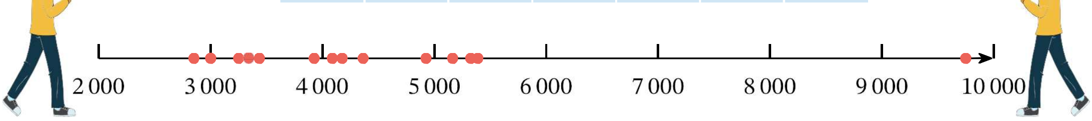


? $\text{range}(x) = \ ?$

Measure of dispersion: range

Number of Messages Exchanged in 1 Month

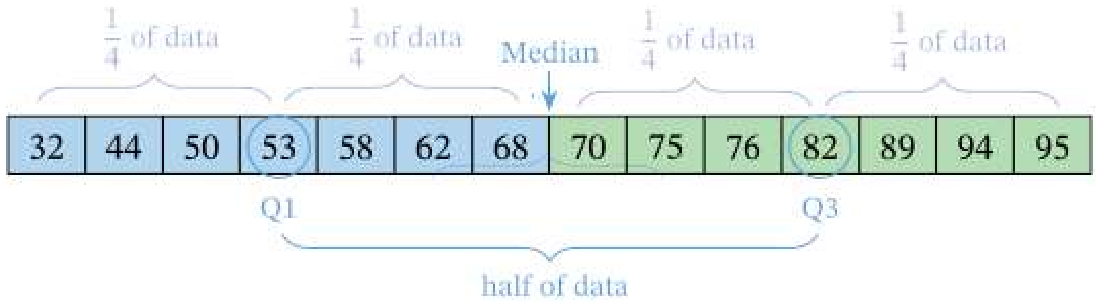
4 942	3 331	2 830	5 424	3 506	5 483	3 004
4 411	3 942	4 199	9 754	4 091	3 423	5 253



? $\text{range}(x) = \max(x) - \min(x) = 9,754 - 2,830 = 6,924$

Measure of dispersion: interquartile range

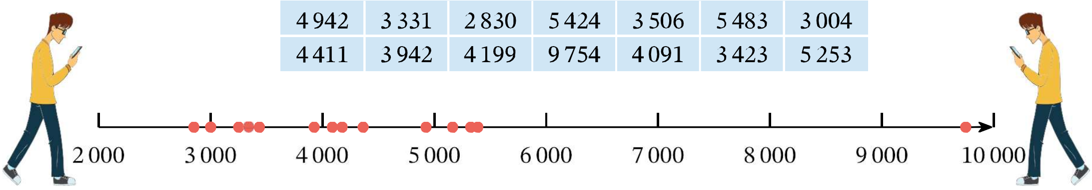
🎯 $\mathrm{IQR}(x) = \mathrm{Q3}(x) - \mathrm{Q1}(x)$



Measure of dispersion: interquartile range

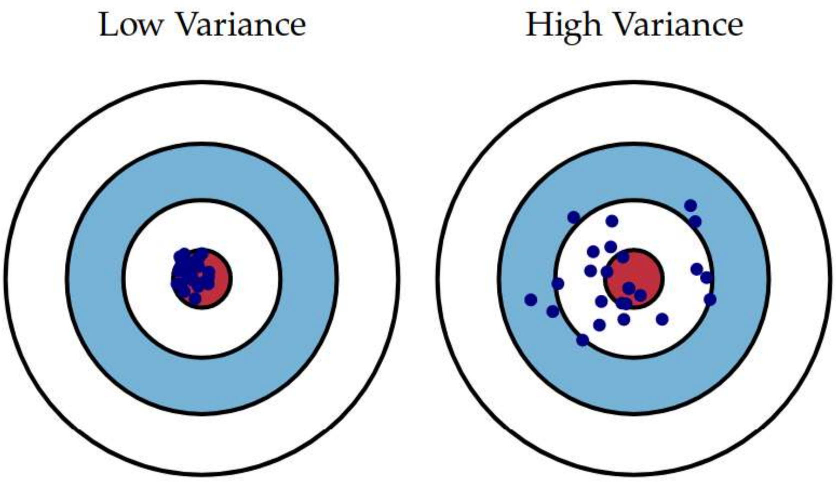
Number of Messages Exchanged in 1 Month

4 942	3 331	2 830	5 424	3 506	5 483	3 004
4 411	3 942	4 199	9 754	4 091	3 423	5 253



📌 $\mathrm{range}(x) = \max(x) - \min(x) = 9,754 - 2,830 = 6,924$
📌 $\mathrm{IQR}(x) = \mathrm{Q3}(x) - \mathrm{Q1}(x) = 5,253 - 3,423 = 1,830$

Measure of dispersion: variance



Measure of dispersion: variance

🎯 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

where $\bar{x} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$

📌 $x = \{1, 2, 3\} \quad \bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$$s = \frac{1}{3-1} \times [(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2] =$$
$$= \frac{1}{2} \times [1^2 + 0^2 + 1^2] = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Measure of dispersion: variance

🎯 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

why $\frac{1}{n-1}$? $\rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$

📌 $x = \{1, 2, 3\} \quad \bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = (1-2) + (2-2) + (3-2) = \\ = -1 + 0 + 1 = 0$$

Measure of dispersion: standard deviation

🎯 $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

where $\bar{x} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$

📌 $x = \{1, 2, 3\} \quad \bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$$s = \sqrt{\frac{1}{3-1} \times [(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2]} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2} \times [1^2 + 0^2 + 1^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 2} = \sqrt{1} = 1$$

Centrality, dispersion, and data types

Data type	Centrality Measure	Dispersion Measure
Nominal	Mode	-
Ordinal	Mode, Median	Range, IQR
Numeric	Mode, Median, Mean	Range, IQR, standard deviation

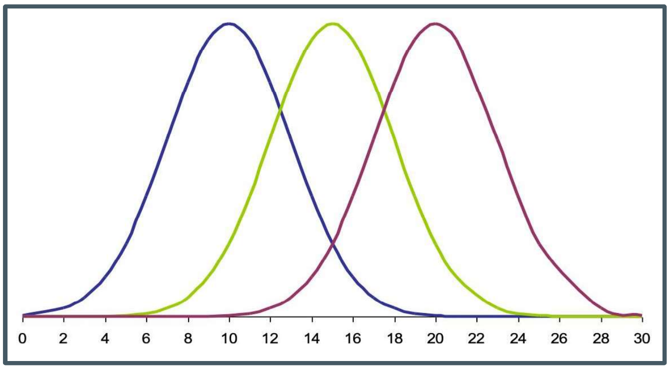
Parameters *vs* statistics

- Parameters: calculated on the population (μ, σ)
- Statistics: calculated on the sample ($\bar{x}, s$)

Exercise #4

? Which curve has the larger mean?

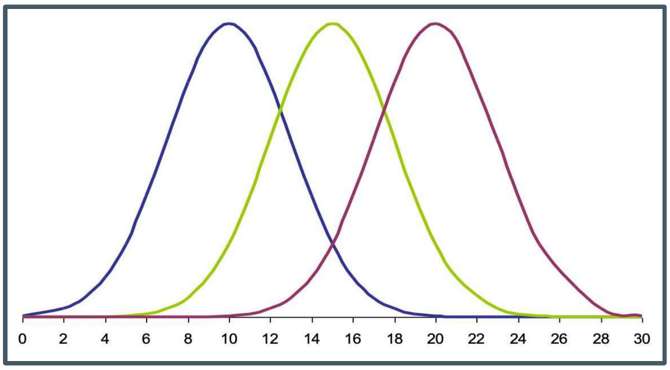
a) blue
b) green
c) red



Exercise #4 -- Solution

? Which curve has the larger mean?

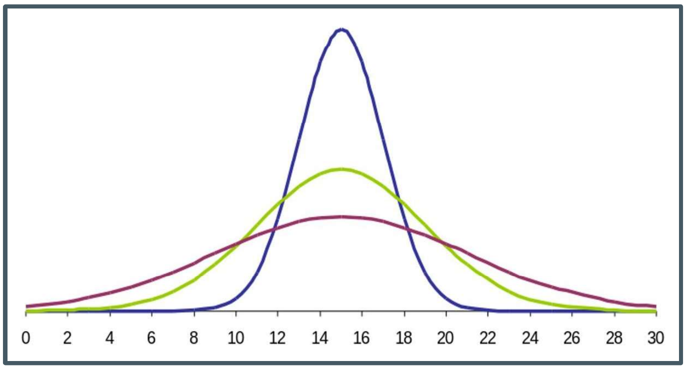
a) blue
b) green
c) red ✅



Exercise #5

? Which curve has the larger standard deviation?

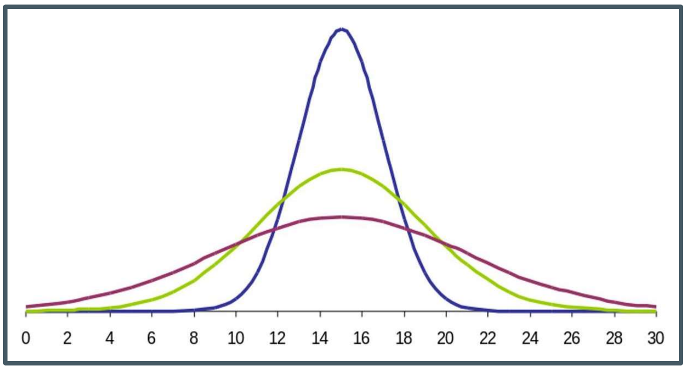
a) blue
b) green
c) red



Exercise #5 -- Solution

? Which curve has the larger standard deviation?

a) blue
b) green
c) red ✅



Exercise #6

❓ Researchers have collected age, sex, and cholesterol
How should they summarise their data?

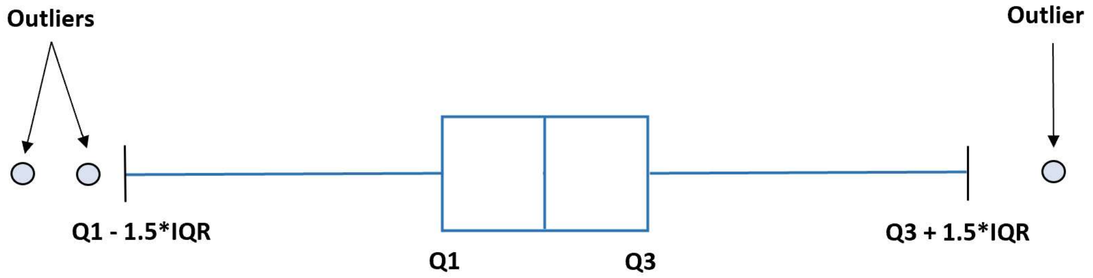
a) Age: mean (SD), sex: N (%), cholesterol: mean (SD)
b) Age: median (IQR), sex: N (%), cholesterol: median (IQR)
c) Age: mean (SD), sex: mean (SD), cholesterol: mean (SD)
d) Either a) or b)
e) Either a) or c)

Exercise #6 -- Solution

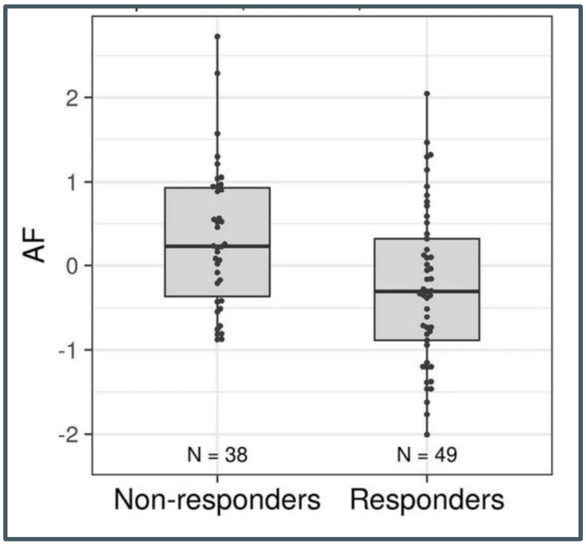
❓ Researchers have collected age, sex, and cholesterol
How should they summarise their data?

a) Age: mean (SD), sex: N (%), cholesterol: mean (SD)
b) Age: median (IQR), sex: N (%), cholesterol: median (IQR)
c) Age: mean (SD), sex: mean (SD), cholesterol: mean (SD)
d) Either a) or b) ✅
e) Either a) or c)

Data visualisation: boxplots

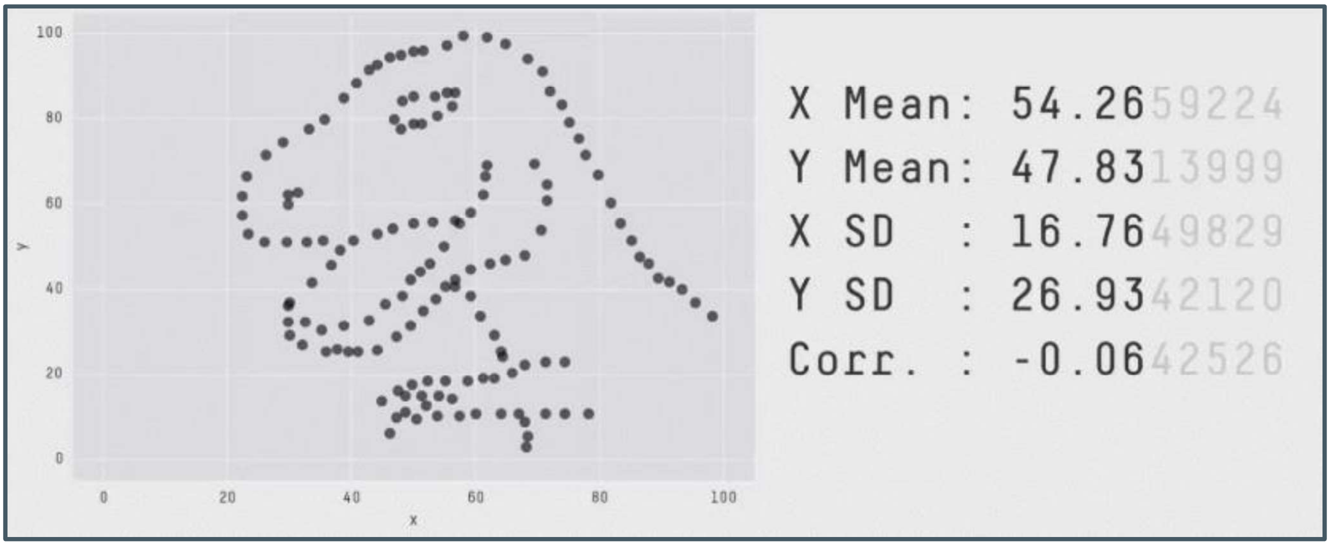


Boxplots in the wild



Visconti A., *et al.*, Total serum *N*-glycans associate with response to immune checkpoint inhibition therapy and survival in patients with advanced melanoma, BMC Cancer, 2023 doi:10.1186/s12885-023-10511-3

Data visualisation: DataSaurus Dozen



Summary

- Data come in different types
- Data are described with measures of centrality and dispersion
- Visualising your data is always a good idea