មុខវិជ្ជាៈ
វិភាគចំនួនពិត

កញ្ចប់សមត្ថភាពទី ១

ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ

ការពណ៌នាអំពីមុខវិជ្ជា

វិភាគចំនួនពិត រៀបចំឡើងសម្រាប់គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្នុងកម្មវិធី TUP។ មុខវិជ្ជានេះផ្តោតលើខ្លឹមសារសំខាន់ៗដូចជា ស្វ៊ីតចំនួនពិត លីមីត ដេរីវេ អាំងតេក្រាល អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីត។

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក៖

ក្រោយពីបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះដោយជោគជ័យអ្នកសិក្សានឹង៖

- ចុងបញ្ចប់នៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ និស្សិតអាចទទួលបានចំណេះដឹង ដូចខាងក្រោម៖
  - CLO1. បង្ហាញលក្ខណៈគ្រឹះនៃស្វ៊ីត លីមីត ដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលបានត្រឹមត្រូវ
  - CLO2. ពណ៌នាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃលីមីត ដេរីវេ និងអាំងតេក្រាល និងលក្ខណៈរបស់វា
  - CLO3. កំណត់បានត្រឹមត្រូវលីមីតតាមប្រភេទរាងមិនកំណត់ ដេរីវេតាមរូបមន្ត និងអាំងតេក្រាលតាមវិធាននីមួយៗ ផ្អែកតាមអនុគមន៍ដែលគេឲ្យ
  - CLO4. បង្ហាញការប្រើប្រាស់អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ
  - CLO5. បង្ហាញពីសារៈសំខាន់នៃលក្ខណៈពិសេសរបស់ស្វ៊ីត ដោយមានឧទាហរណ៍គំរូជាក់ស្តែង
- ចុងបញ្ចប់នៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ និស្សិតអាចទទួលបានជំនាញ ដូចខាងក្រោម៖
  - CLO6. ប្រើរូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីក្នុងគណិតវិភាគ ដូចជាស្វ៊ីត លីមីត អនុគមន៍ ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានានាក្នុងជីវភាពដែលពាក់ព័ន្ធ
  - CLO7. ប្រើដេរីវេ ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាជាក់ស្តែងមួយចំនួនដែលពាក់ព័ន្ធ
  - CLO8. បកស្រាយចម្លើយ បានត្រឹមត្រូវ ក្នុងចំណោទបែបស្វ៊ីត ឬអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត។
- ចុងបញ្ចប់នៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ និស្សិតអាចអភិវឌ្ឍអាកប្បកិរិយា ដូចខាងក្រោម៖
  - CLO10. សម្របខ្លួនដើម្បីធ្វើការជាក្រុមប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព ក៏ដូចជាឯកត្តជន
  - CLO11. បង្កើតការយល់ដឹងអំពីគណិតវិភាគ ដើម្បីស្វែងយល់បន្ថែមក្នុងមុខវិជ្ជាដែលពាក់ព័ន្ធ

របាយតម្លៃសិក្សា

ដើម្បីបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ អ្នកសិក្សាត្រូវ

១. វត្តមានចូលសិក្សា ១០%

២. ការចូលរួមសកម្មភាពសិក្សា ២០%

៣. ការវាយតម្លៃកំឡុងពេលសិក្សា ៣០%

៤. ការប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជាសិក្សា ៤០%

អារម្ភកថា

វិស័យអប់រំ ត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាចាត់ទុកថាជាវិស័យអាទិភាព និងត្រូវបានធ្វើកំណែទម្រង់ជាប្រចាំ ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការសិក្សានៅគ្រប់កម្រិត។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាបាននិងកំពុងពិនិត្យឡើងវិញកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន និងជំរុញកំណែទម្រង់សាលារៀននៅគ្រប់កម្រិត ដើម្បីធានាថាសាលារៀនមានដំណើរការប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាពសម្រាប់ការសិក្សារៀនសូត្ររបស់សិស្ស និងផ្តល់ដល់សិស្សនូវវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា កាយសម្បទា ឆ្លើយតបបានទៅតាមតម្រូវការទីផ្សារការងារ និងចូលរួមចំណែកពេញលេញក្នុងការអភិវឌ្ឍសហគមន៍ និងប្រទេសជាតិ ឈានឆ្ពោះទៅសម្រេចបានចក្ខុវិស័យកម្ពុជាឆ្នាំ២០៣០ និងឆ្នាំ២០៥០។

ជាផ្នែកមួយនៃកំណែទម្រង់ការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណវុឌ្ឍិគ្រូបង្រៀនតាមរយៈគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ក្រសួងបានរៀបចំ "ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សាសម្រាប់ការបណ្តុះបណ្តាលបរិញ្ញាបត្រអប់រំ វិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀន ឯកទេសទាំង ៦ (អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ, គណិតវិទ្យា, គីមីវិទ្យា, ជីវវិទ្យា, រូបវិទ្យា, ប្រវត្តិវិទ្យា) ដើម្បីប្រើប្រាស់ក្នុងកម្មវិធីក្រឹតការគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅតាមសាលារៀនចំណេះទូទៅ។ ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះជាឯកសាររស់ ដែលនឹងអាចមានការកែសម្រួលទៅតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង ជាពិសេសនៅដំណាក់កាលអន្តរកាលនៃការអនុវត្តយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន។

ក្រសួងមានជំនឿយ៉ាងមុតមាំ លើប្រសិទ្ធភាពនៃការអនុវត្តក្របខណ្ឌកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលនេះ ដែលនឹងនាំគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅគ្រប់ភូមិសិក្សា សម្រេចបានគោលដៅអប់រំ ដែលនឹងចូលរួមចំណែកក្នុងការសម្រេចបានចក្ខុវិស័យរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជា។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងសូមកោតសរសើរដ៏ស្មោះចំពោះ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យនាយកគម្រោង និងក្រុមការងារគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ជាពិសេសក្រុមការងារនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញដែលបានខិតខំផលិតឯកសារក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះឡើង សម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលក្នុងគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ។

ថ្ងៃ ចន្ទ ១៣រោច ខែទុតិយាសាឍ ឆ្នាំថោះ បញ្ចស័ក ព.ស ២៥៦៧
រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១៤ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០២៣
រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ហង់ជួន ណារ៉ុន

គណៈកម្មការ

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ហង់ជួន ណារ៉ុន**	រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ	**ណាត ប៊ុនរឿន**	រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
៣. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត	**ជេត ចាលី**	សាកលវិទ្យាធិការសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត	**ឈុន ហុក**	សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក	**ប៉ាល់ ដែល**	សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត	**សំអេ អង្គារតន៍**	អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
៧. លោក	**ព្រឹង មរកត**	ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រង

១ .លោកបណ្ឌិត	**សុខ សុត្រា**	ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក	**មាក ភាមេរ៉ាន**	ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៣. លោកបណ្ឌិត	**ជ័យ ចាន់រឿន**	ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត	**ម៉ម សុជាតិ**	ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក	**សុត វិសាល**	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់សិក្សាអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត	**ឃុន គីមលាង**	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៧. លោកស្រីបណ្ឌិត	**ស៊ូ កល្យាណ**	អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៨. លោក	**ហង់ ស៊ីម**	សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៩. លោក	**ដួង ប៉េងអាន**	អ្នកសម្របសម្រួលកម្មវិធីមធ្យមសិក្សា មហាវិទ្យាល័យអប់រំ
១០. កញ្ញា	**ហុង ឡៃហៀក**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
១១. លោក	**សើ ពន្លក**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

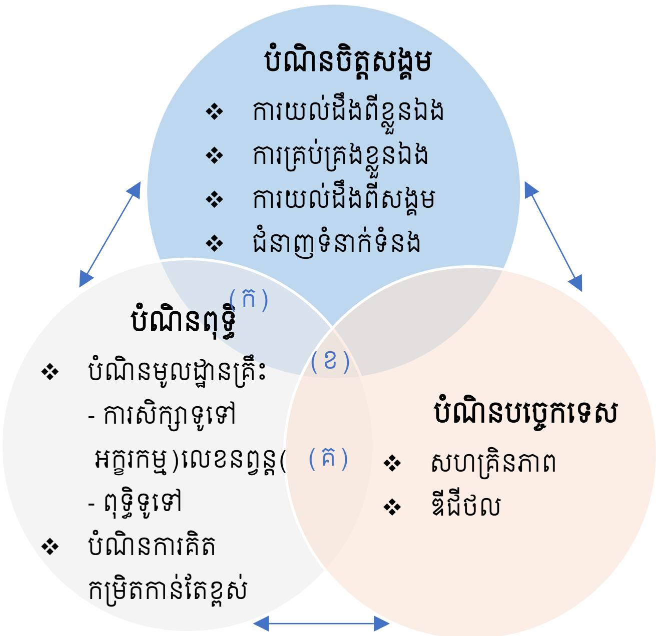
១. លោកបណ្ឌិត	**សំអេ អង្គារតន៍**	អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
២. លោក	**ព្រឹង មរកត**	ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា
៣. លោក	**ង៉ោ ប៉េងឡុង**	ប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៤. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត	**សិត សេង**	នាយកវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ
៥. លោកបណ្ឌិត	**ឈុក ច័ន្ទនាយា**	អនុប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៦. លោក	**កែវ សារ៉ាត់**	ទីប្រឹក្សាបច្ចេកទេសគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ

៤. ការរិកុំព្យូទ័រ

១. លោក	**ម៉ៅ ម៉ារ៉ាឌី**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក	**ឌន សំណាង**	បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក

ការសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនេះគឺផ្ដោតលើប្រតិបត្តិជាក់ស្ដែងរបស់អ្នកសិក្សាដែលអនុវត្តផ្ទាល់នៅសាលារៀន។ ទាំងអ្នកសិក្សា និងសិស្ស (ដែលអ្នកសិក្សានឹងធ្វើការជាមួយផ្ទាល់) ចាំបាច់មាន (១) បំណិនចិត្តសង្គម (២) បំណិនពុទ្ធិ និង (៣) បំណិនបច្ចេកទេស ជាមូលដ្ឋាន (ដូចក្នុងរូបទី១)។ កញ្ចប់សមត្ថភាពទាំងបីខាងដើមនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សា អភិវឌ្ឍបំណិនចិត្តសង្គម បំណិនពុទ្ធិ និងពង្រឹងសមត្ថភាពផ្នែក (ក)ការសម្រេចចិត្ត ទំនាក់-ទំនង សេចក្ដីអំណត់ ទឹកចិត្តអាណិតអាសូរ និងការគ្រប់គ្រងខ្លួនឯង ថែមទាំងអាចអនុវត្តការបង្រៀនមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យាប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងនវានុវត្តន៍ដោយប្រើប្រាស់ឧត្តមានុវត្តន៍ផ្សេងៗ (ខ) ការដោះស្រាយបញ្ហា និង ការរៀបចំនិងការចាត់ចែង (គ) បច្ចេកទេសកម្រិតមធ្យម និងកម្រិតខ្ពស់។



រូបភាពទី១
ប្រភព៖ WDR2018 (p.103)

ដោយឡែក សម្រាប់អ្នកសិក្សាកម្មវិធីនេះផ្ទាល់ នឹងទទួលបាន៖

(១) **ចំណេះដឹងឯកទេសគណិតវិទ្យាកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ**

❖ មុខវិជ្ជា ពីជគណិតលីនេអ៊ែ
❖ ចិត្តសង្គម ភាពជាអ្នកដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រង
❖ សន្លឹកកិច្ចការស្វ័យសិក្សានៅមធ្យមសិក្សា
❖ ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យា

(២) **ចំណេះដឹងវិធីគរុកោលស្យ សាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំរូបវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សា**

❖ វិធីសាស្ត្របង្រៀន
❖ វិធីសាស្ត្រវាយតម្លៃ
❖ ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ

- ❖ ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ
- ❖ បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ

(៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោលស្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង

- ❖ អនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន
- ❖ ការអនុវត្តកម្មវិធីស្វ័យសិក្សារូបវិទ្យា ពីទីថ្នាក់៧-ទី១២
- ❖ របាយការណ៍នៃការអនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុកសម្រាប់បរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

វិជ្ជាសម្បទា

PLO1- ពន្យល់អំពីទ្រឹស្តី និងគោលការណ៍នៃការអប់រំក្នុងបរិបទសកលលោក និងបរិបទប្រទេសដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំងទៅនឹងការអនុវត្តជាក់ស្តែងនៃការបង្រៀន។

PLO2- បកស្រាយអំពីដំណើរការអនុវត្តកិច្ចការសម្រាប់ការបង្វឹកលើការរៀបចំកម្មវិធីសិក្សា និងការបង្រៀនរូបវិទ្យាប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។

បំណិនសម្បទា

PLO3- អនុវត្តបំណិនចិត្តសង្គម និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថលសម្រាប់បង្កើនការប្រាស្រ័យទាក់ទងគ្នាក្នុងការងារ និងជីវភាពប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងដោះស្រាយបញ្ហាប្រកបដោយភាពច្នៃប្រឌិត និងការទទួលខុសត្រូវ។

PLO4- បង្កើតគន្លឹះ និងទម្រង់សម្រាប់ដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រងការបង្រៀនដោយផ្តោតលើផលសម្រេចនៃការសិក្សារបស់សិស្សឆ្ពោះទៅរកស្តង់ដាសាលារៀនមានប្រសិទ្ធភាព និងនិរន្តភាពសាលារៀនតាមរយៈការសិក្សា ការអនុវត្តជាក់ស្តែង និងការស្រាវជ្រាវ។

PLO5- អនុវត្តការងារអភិវឌ្ឍកម្មវិធីសិក្សា ការរៀននិងការបង្រៀនរូបវិទ្យា និងការសិក្សាបែបគម្រោងភ្ជាប់នឹងបំណិនរកចំណូលសម្រាប់សាលារៀនប្រកបដោយក្រមសីលធម៌វិជ្ជាជីវៈ។

ចរិយាសម្បទា

PLO6- អភិវឌ្ឍឥរិយាបថវិជ្ជមាន និងវប្បធម៌រៀនពេញមួយជីវិតសម្រាប់បំពេញការងារ និងទាក់ទងជាមួយអ្នកដទៃប្រកបដោយគុណតម្លៃ មនុស្សធម៌ សាមគ្គីភាព និងការចែករំលែកគ្នា។

PLO7- បង្កើតបង្តាញ/ការដឹកនាំបណ្តាញសម្រាប់កសាងភ្នាក់ងារពង្រីកឧត្តមានុវត្តន៍សម្រាប់ការរៀន និងការបង្រៀន។

សម្គាល់៖ Program Learning Outcome (PLO) លទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំ

ការបញ្ចប់សមត្ថភាព និង រចនាសម្ព័ន្ធកម្មវិធីសិក្សា

កម្មវិធីបរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ តម្រូវឱ្យអ្នកសិក្សាសិក្សាចំនួន ៦៣ ក្រេឌីតដែលមានរយៈពេលចន្លោះពី ១២ ទៅ ១៨ខែ។ ការសិក្សានិងធ្វើឡើងតាមរយៈការរៀនពីចម្ងាយ (ភាគច្រើនចន្លោះពី ៦០%

ទៅ ៧០%) និងសិក្សាផ្ទាល់នៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញនិង សាលាហាត់ការ (ភាគតិចចន្លោះពី ៤០% ទៅ ៣០%)។ ការសិក្សាផ្តោតលើបណ្តុំមុខវិជ្ជា (១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៣៦ ក្រេឌីត) (២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (១២ (+៣) ក្រេឌីត) (៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង(១២ ក្រេឌីត)។ បន្ថែមពីលើនេះទៀតអ្នកសិក្សាត្រូវអនុវត្តខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនៅសាលាសាមីផ្ទាល់តែម្តងដោយមានការណែនាំពីគ្រូបង្វឹក ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ គ្រូបង្រៀននៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងមន្ត្រីអប់រំមកពីនាយកដ្ឋានជំនាញផ្សេងៗរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលមានបទពិសោធន៍អនុវត្តជាក់ស្តែងកន្លងមក ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	ចំនួនក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	៣៦
២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	១២ (+៣)
៣)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	១២
សរុប	៦០ (+៣)

សម្គាល់៖ *សម្រាប់កញ្ចប់សមត្ថភាពចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សាបានបន្ថែមមុខវិជ្ជាបំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ ចំនួន ៣ក្រេឌីត*

លក្ខណៈទូទៅនៃមុខវិជ្ជាសិក្សា

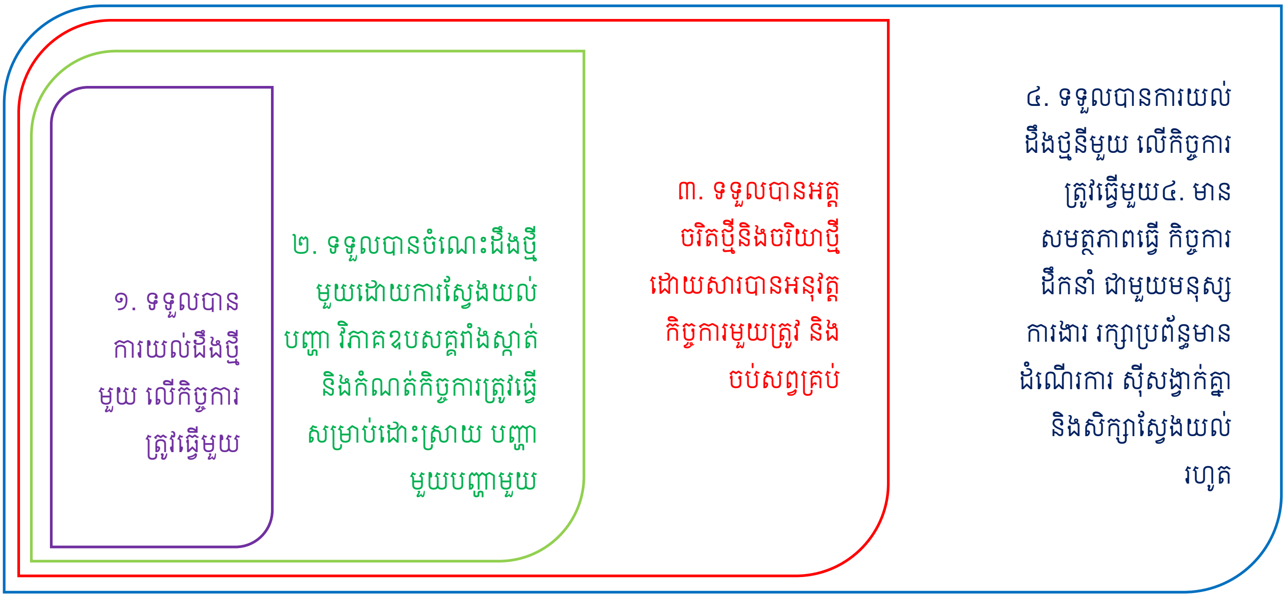
មុខវិជ្ជាសិក្សាសម្រាប់កម្រិតបរិញ្ញាបត្រអប់រំនេះនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សាបំពេញកញ្ចប់សមត្ថភាពដូចខាងក្រោម ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងលទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំហើយឱ្យអ្នកសិក្សាមានសមត្ថភាពសម្រាប់បំពេញការងារប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	មុខវិជ្ជាសិក្សា	ក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	មុខវិជ្ជាឯកទេស១	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស២	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៣	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៤	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៥	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត១ (ចងចាំ)	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត២ (យល់ដឹង)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៣ (ហ្វឹកហាត់)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៤ (វាយតម្លៃ)	៣
	ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស	៩
(៣)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	វិធីសាស្ត្របង្រៀន បត់បែនតាមសមត្ថភាពសិស្ស និងទស្សនទានអប់រំថ្មីៗ	៣
	ប្រឹក្សា និងហ្វឹកហ្វឺនគរុសល្យលើយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះវង្វាយតម្លៃអប់រំ	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ	៣

	បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ *	៣
៤)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	ការអនុវត្ត ស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី១)	៣
	ការអនុវត្ត ស្តង់ដានៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី២)	៦
	របាយការណ៍និងការការពារស្តីពីការអនុវត្តស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
សរុប		**៦៣**

លំហូរបង្រៀន និងរៀន

លំហូរបង្រៀននិងរៀន ១មេរៀន ឬកិច្ចការមួយ រួមជាមួយបំណិនមួយ និងចរិយាមួយ



ការវាយតម្លៃលើការសិក្សា

ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាគឺផ្តោតលើលទ្ធផលសិក្សាជាគោល។ ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមានបីដំណាក់កាលធំៗ គឺ ការវាយតម្លៃលើការសរសេរ (២) ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមុខវិជ្ជា (១) ឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស និង ការវាយតម្លៃសរុបដោយពិនិត្យលើការបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌ (៣) សម្រាប់បញ្ចប់ការសិក្សា។

៦.៤.១ គោលការណ៍វាយតម្លៃ

គោលការណ៍រួមសម្រាប់ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាមានដូចតទៅ៖

១) អ្នកសិក្សាតម្រូវឱ្យមានវត្តមានក្នុងការសិក្សាតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ មិនតិចជាង៧០%។ ក្នុងករណីអ្នកសិក្សាមានវត្តមានតិចជាង៧០% នឹងមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជានោះទេ

២) ក្នុងករណីដែលអ្នកសិក្សាធ្លាក់មុខវិជ្ជាណាមួយក្នុងឆមាស នឹងមិនអនុញ្ញាតឱ្យបន្តការសិក្សាទៅឆ្នាំបន្ទាប់ និងប្រឡងបញ្ចប់ឡើយ

៣) អ្នកសិក្សាទាំងអស់ត្រូវធ្វើកិច្ចការស្រាវជ្រាវសំខាន់ៗតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ និងប្រគល់ជូនគ្រូឧទ្ទេសតាមមុខវិជ្ជាដែលបានកំណត់

៤) អ្នកសិក្សាត្រូវប្រឡងបញ្ចប់ការសិក្សាដែលធ្វើឡើងបន្ទាប់ពីចប់ឆមាសនីមួយៗ តាមការកំណត់ក្នុងកម្មវិធីសិក្សា

៥) អ្នកសិក្សាត្រូវចងក្រងឯកសារវឌ្ឍនភាពនៃកិច្ចការស្នូលរួមមានការហាត់ការ និងកម្មសិក្សាដែលផ្តោតលើ (ក) សកម្មភាពប្រតិបត្តិ (ខ) លទ្ធផលដែលសម្រេចបាន និង (គ) ការឆ្លុះបញ្ចាំង និងមេរៀនបទពិសោធន៍ និង

៦) អ្នកសិក្សាត្រូវតែជាប់មធ្យមភាគនៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានិងការធ្វើកម្មសិក្សា ដើម្បីទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។

ការផ្តល់ពិន្ទុ និងប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់

អ្នកសិក្សាអាចទទួលពិន្ទុចាប់ពី 00 ដល់ 100 ទៅតាមការវាយតម្លៃផ្អែកលើលក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដែលបានកំណត់ក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជា ការបំពេញកម្មសិក្សា និងការសរសេរនិងការការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។ ពិន្ទុដែលជាប់ត្រូវចាប់ផ្តើមពីមធ្យមភាគពិន្ទុ 50% ឬពិន្ទុនិទ្ទេស 2.00 ឡើងទៅ។

ពិន្ទុគឺកំណត់ពី 00.00 ដល់ 100 (មធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប ឬ Grade Point Average–GPA)។ រូបមន្តគណនារកមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) គឺមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) ស្មើផលបូកសរុបរវាងផលគុណនៃពិន្ទុនិទ្ទេស (Grade Point–P) និងតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកនៃមុខវិជ្ជានីមួយៗ (Attempted Credit Value–C) ចែកនឹងផលបូកសរុបនៃតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកគ្រប់មុខវិជ្ជា។

ប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់កម្មវិធី គឺផ្អែកទៅលើតម្លៃនៃពិន្ទុអតិបរមា 100% និង 50% នៃពិន្ទុអប្បបរមា។ ប្រព័ន្ធដាក់ពិន្ទុនេះ ត្រូវបានបកប្រែទៅជា «ពិន្ទុជានិទ្ទេស» និង «ពិន្ទុជាតម្លៃលេខ» ដូចដែលពិពណ៌នាខាងក្រោម៖

ពិន្ទុជាភាគរយ%	និទ្ទេស	ពិន្ទុនិទ្ទេស	មូលវិចារណ៍
85%-100%	A	4.00	ល្អប្រសើរ
80%-84%	B+	3.50	ល្អណាស់
70%-79%	B	3.00	ល្អ
65%-69%	C+	2.50	ល្អបង្គួរ
50%-64%	C	2.00	មធ្យម
<49%	F	1.50	ធ្លាក់

៦.៥ គោលការណ៍ប្រតិបត្តិ

ដើម្បីធានានូវការផ្តល់សេវាអប់រំប្រកបដោយគុណភាព និងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ មហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញអនុវត្តតាមគោលការណ៍ បទបញ្ញត្តិ និងបទដ្ឋានគតិយុត្តិរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ព្រមទាំងគោលការណ៍ច្បាប់នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ជាមួយគ្នានេះដែរ អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវគោរពតាមបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងឈរលើស្មារតីស្មោះត្រង់ ទទួលខុសត្រូវខ្ពស់ និងភាពម្ចាស់ការ និងគោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា។ សម្រាប់គោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានវាយតម្លៃលើចំណុចសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

៦ ១.៥.ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយា

ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានប្រមូលផ្តុំលើការគោរពវិន័យចាត់តាំង ការមករៀនទៀងទាត់ ការយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការសិក្សា ការខិតខំស្រាវជ្រាវ ការអនុវត្តភារកិច្ច និងស្មារតីសាមគ្គីភាពនៅក្នុងថ្នាក់ ក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងក្រៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា។ ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានធ្វើឡើងតាមរយៈយោបល់ឯកភាពពីមតិភាគច្រើនដាច់ខាតរបស់ក្រុមប្រឹក្សាវិន័យ ដោយផ្អែកលើលក្ខណសម្បត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ និងបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ។

៦ ២.៥.ការក្លែងបន្លំឯកសារ

អ្នកសិក្សាដែលក្លែងបន្លំឯកសារ នឹងត្រូវលុបឈ្មោះចេញពីបញ្ជីនិស្សិតដោយស្វ័យប្រវត្តិ ព្រមទាំងទទួលទោសតាមច្បាប់ជាធរមាន។ អ្នកសិក្សាត្រូវចាំថា ការលួចចម្លងស្នាដៃ ការលួចកម្មសិទ្ធិបញ្ញា និងគំនិតរបស់អ្នកដទៃគឺជាបទល្មើសសិក្សាធ្ងន់ធ្ងរដែលអាចឈានដល់ការបញ្ឈប់បុគ្គលដែលប្រព្រឹត្តបទល្មើសពីកម្មវិធី។ ត្រូវសម្រេចឱ្យធ្លាក់ជាស្ថាពរ បើអ្នកសិក្សារូបណាចម្លងដោយផ្ទាល់ពីអ្នកសិក្សាដទៃទៀត ឬប្រភពផ្សេងៗ ឬការប្រើសម្ភារៈ ឬឯកសារផ្សេងទៀត ដែលមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតក្នុងការប្រឡង។

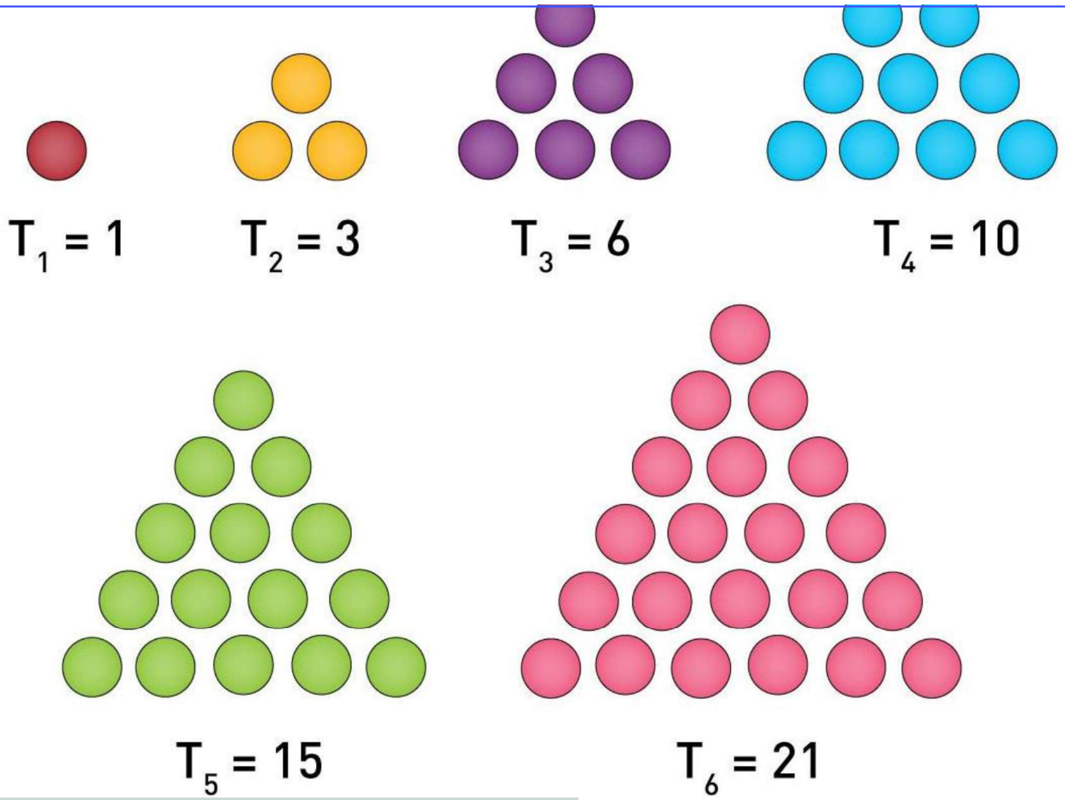
៦.៥.៣ ឯកសារជំនួយស្មារតី/របាយការណ៍/កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

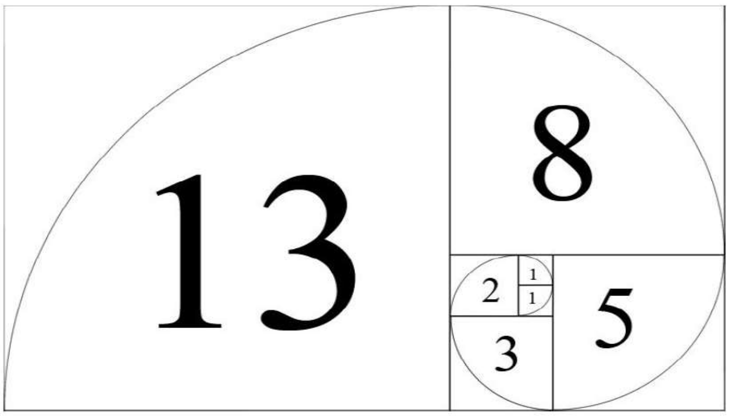
អ្នកសិក្សាត្រូវបង្ហាញនូវសុចរិតភាពនៃការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្លួនឱ្យបានខ្ជាប់ខ្ជួន ចាប់តាំងពីពេលចូលរៀនរហូតដល់ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គបណ្តុះបណ្តាល។ រាល់សំណេរការងារសិក្សាទាំងអស់ មិនត្រូវដកស្រង់គំនិត សរសេរ ឬចម្លងស្នាដៃផ្សេងៗរបស់អ្នកដទៃមកធ្វើជាគំនិត ជាស្នាដៃ ឬជាកម្មសិទ្ធិរបស់ខ្លួនដោយគ្មានការបញ្ជាក់ពីប្រភពច្បាស់លាស់នៃឯកសារយោង ឯកសារពិគ្រោះ ឬការអនុញ្ញាតពីម្ចាស់ប្រភព។

ក្នុងករណីរកឃើញមានការលួចចម្លងស្នាដៃអ្នកដទៃ អ្នកសិក្សានឹងត្រូវប្រឈមមុខចំពោះក្រុមប្រឹក្សាបច្ចេកទេស និងក្រុមប្រឹក្សាវិន័យរបស់មហាវិទ្យាល័យអប់រំ ឬសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដោយត្រូវទទួលពិន័យឱ្យរៀនត្រួតថ្នាក់ ឬអាចត្រូវបញ្ឈប់ពីកម្មវិធីដោយគ្មានសំណងប្រាក់សិក្សាដែលបានបង់រួចហើយ និងមិនមានការចេញលិខិតស្នាមបញ្ជាក់ការសិក្សាអ្វីដែរ។

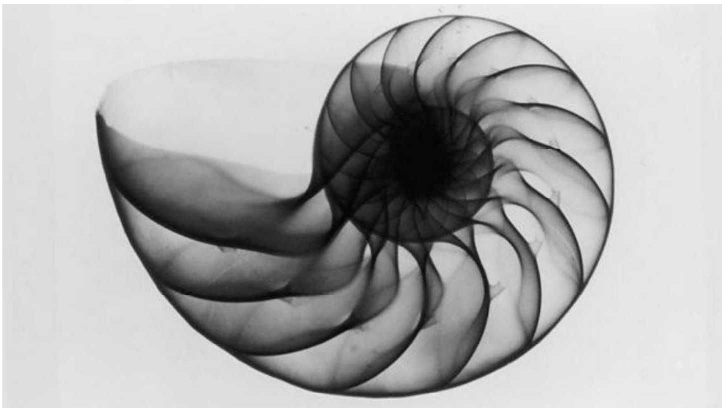
សម្គាល់៖ កម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលសូមរក្សាសិទ្ធិក្នុងការកែប្រែការអនុវត្តជាក់ស្តែងឱ្យឆ្លើយតបទៅនឹងវឌ្ឍនភាពការរៀននិងបង្រៀន សមត្ថភាពរៀននិងការអនុវត្តជាក់ស្តែង និង ស្ថានភាពរៀននិងបង្រៀនជាក់ស្តែង ដើម្បីសម្រេចបានលទ្ធផលសិក្សាល្អបំផុត និងសម្រេចស្តង់ដាសហគមន៍សាលារៀននៃគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ (GEIP) ។

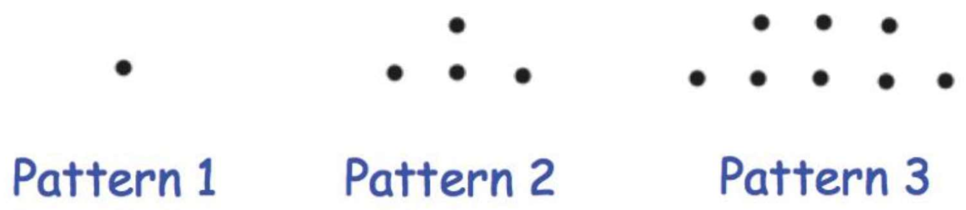
1. ស្វ៊ីតចំនួនពិត
2. ស្វ៊ីតនព្វន្ត
3. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ



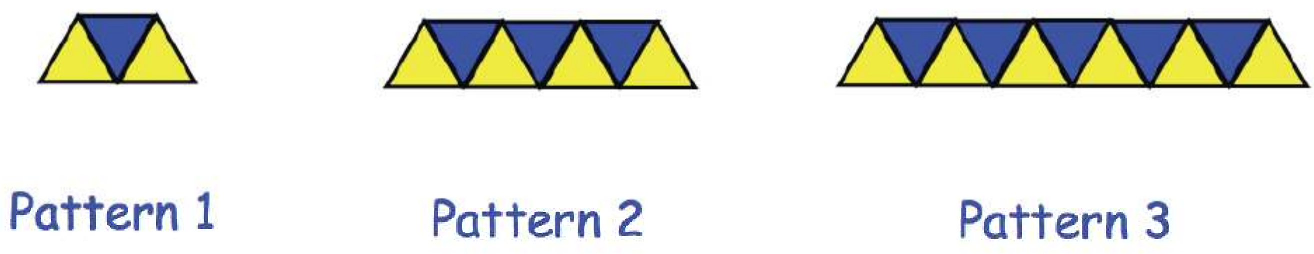


តើតួទី១០០ មានតម្លៃប៉ុន្មាន ?





តើរូបទី៦មានប៉ុន្មានចំនុច ?



តើរូបទី n មានត្រីកោណពណ៌លឿងប៉ុន្មាន ? ខៀវប៉ុន្មាន ?

ស្វីត

- និយមន័យ ៖ ស្វីតគឺជាការរៀបវត្ថុ ឬលេខមានលំដាប់លំដោយ ដោយផ្អែកទៅលើទម្រង់មួយចំនួន
- ឧទារណ៏ ៖ 1,3,5,7,9….
- ឧទារណ៏ ៖ 2,4,6,8,10….
- ឧទារណ៏ ៖ 1,4,9,16,25,…..
- ឧទារណ៏ ៖ 1,3,7,15,31,63….
- ឧទារណ៏ ៖ 1,2,4,…..

…….

ស្វីតត្រូវបានចែកជាពីរប្រភេទ គឺស្វីតរាប់អស់ និងស្វីតរាប់មិនអស់ (អនន្ត)

ឧទារណ៏ ៖ 1,3,5,7,9 ជាស្វីតរាប់អស់

ឧទារណ៏ ៖ 1,3,5,7,9…… ជាស្វីតអនន្ត

ស្វីត

- ឧទាហរណ៏ ៖ ចូរសរសេរតួនៃស្វីតខាងក្រោមឲ្យបាន៣តួបន្ថែមទៀត

(a) 2, 5, 8, 11, 14, ...

(b) 9, 18, 27, 36, 45, ...

(c) 13, 14, 15, 16, 17, ...

(d) 7, 15, 23, 31, 39, ...

- ឧទាហរណ៏ ៖ ចូរសរសេរតួនៃស្វីតខាងក្រោមឲ្យបាន៣តួបន្ថែមទៀត

(a) 100, 98, 96, 94, 92, ...

b) 20, 17, 14, 11, 8, ...

(c) 48, 43, 38, 33, 28, ...

ស្វ៊ីត

- គេអាចសរសេរស្វ៊ីតជាទម្រង់៣ផ្សេងគ្នា
  i. ទម្រង់រាយលេខជាបន្តបន្ទាប់
     ឧទាហរណ៍ ៖ 2,3,5,7,11,13,17,….
  ii. ទម្រង់រូបមន្តទូទៅ
     ឧទាហរណ៍ ៖ $U_n = 2n-1$, n={1,2,3,4…..}
  iii. ទម្រងង់ទំនាក់ទំនងកំណើន
     ឧទាហរណ៍ ៖ $U_0= U_1=1$, $U_{n+2}= U_{n+1}+U_n$, n={0,1,2,3…..}

ស្វ៊ីតចំនួនពិត

❖ **និយមន័យ** ស្វ៊ីតចំនួនពិត ជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំនៃចំនួនគត់ $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ គេប្រើអក្សរ $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ សម្រាប់តាងឱ្យតួនៃស្វ៊ីតដែល a_1 ជាតួទី1 a_2 ជាតួទី2 រហូតដល់ a_n ជាតួទី n ។

គេតាងស្វ៊ីតដោយនិមិត្តសញ្ញា (a_n) ដែល $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

ស្វីតចំនួនពិត

- **តួទី n នៃស្វីត**

ជាទូទៅដើម្បីសរសេររូបមន្តតួទី **n** នៃស្វីត គេត្រូវពិនិត្យមើលតួនីមួយៗ

នៃស្វីត រួចរកមើលលំនាំគំរូរបស់វា ។ តួនីមួយៗជាអនុគមន៍នៃចំនួនគត់។

- ឧទាហរណ៍ ៖ រករូបមន្តទូទៅនៃស្វីត
  a) 7,13,19,25,31...
  b) 2,7,12,17,22,27,...

ស្វីតចំនួនពិត

- ឧទាហរណ៍ ៖ រករូបមន្តទូទៅនៃស្វីត

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

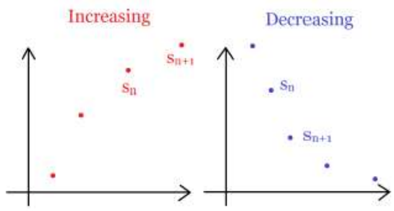
(b) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \ldots$

(c) $\frac{1}{10}, \frac{2}{11}, \frac{3}{12}, \frac{4}{13}, \frac{5}{14}, \ldots$

(d) $\frac{2}{8}, \frac{4}{9}, \frac{6}{10}, \frac{8}{11}, \frac{10}{12}, \ldots$

(e) $\frac{3}{5}, \frac{6}{6}, \frac{9}{7}, \frac{12}{8}, \frac{15}{9}, \ldots$

អថេរភាពនៃស៊ីត



ស៊ីតកើន

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតកើន លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}; a_{n+1} > a_n$ ។

ស៊ីតចុះ

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតចុះ លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}; a_{n+1} < a_n$ ។

ស៊ីតម៉ូណូតូន

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូន កាលណា (a_n) ជាស៊ីតកើន ឬ ជាស៊ីតចុះ

អថេរភាពនៃស៊ីត

ឧទាហរណ៍ ១. បង្ហាញថាស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 3n+1$ ជាស៊ីតកើន ។

២. បង្ហាញថាស៊ីត (a_n) ដែល $a_n = 12-2n$ ជាស៊ីតចុះ ។

ឧទាហរណ៍ តើស៊ីតខាងក្រោម ស៊ីតណាជាស៊ីតម៉ូណូតូន ?

ក. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

ខ. $a_n = \frac{2^n}{n}$

គ. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$

ស្វីតទាល់

❖ **ស្វីតទាល់លើ**

ស្វីត (a_n) ជាស្វីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយដែលចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \le M$ ។ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វីត ។

❖ **ស្វីតទាល់ក្រោម**

ស្វីត (a_n) ជាស្វីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត N មួយដែល ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \ge N$ ។

ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វីត ។

ស្វីតទាល់

❖ **ស្វីតទាល់**

ស្វីត (a_n) ជាស្វីតទាល់ លុះត្រាតែស្វីត (a_n) ជាស្វីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង ។

ស្វីតនៃចំនួនពិត

ឧទាហរណ៍ ក. រកគោលលើនៃស្វីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{2}{n}$ ។

ខ. រកគោលក្រោមនៃស្វីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = 2n+1$ ។

គ. រកគោលលើ និងគោលក្រោមនៃស្វីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$ ។

ស្វីតនៃចំនួនពិត

ឧទាហរណ៍៖ ចូររកគោលក្រោម និងគោលលើនៃស្វីត

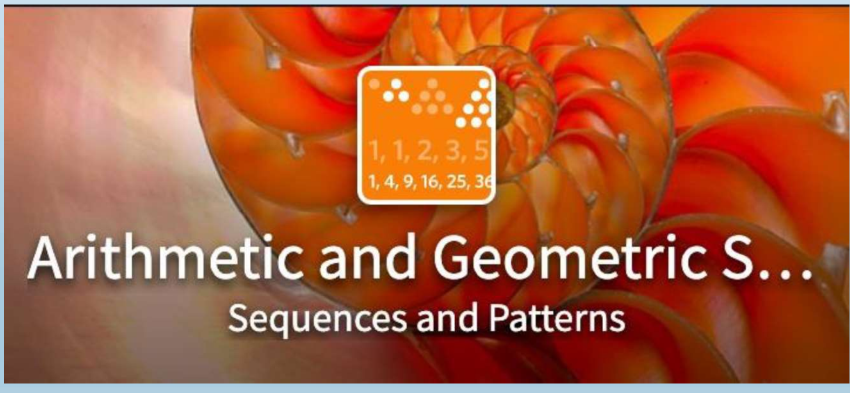
$$\mathbf{a_n = \frac{3n+1}{2n+1}}$$

Mirjam Nilsson

mirjam@contoso.com

www.contoso.com

មេរៀនទី១ ៖ ស៊ីត
ស៊ីតនព្វន្ត និងស៊ីតធរណីមាត្រ



២. ស៊ីតនព្វន្ត

➢ចូរពិនិត្យមើលស៊ីតខាងក្រោម

- 1,2,3,4,5,……
- 1,4,7,10,13,…..
- 10,6,2,-2,-6,……

យើងសង្កេតឃើញថា ស៊ីតនីមួយៗខាងលើមានទម្រង់កើន ឬថយថេរជាក់លាក់ជានិច្ច ។ ស៊ីតបែបនេះគេហៅថាជាស៊ីតនព្វន្ត ។

➢ចំនួនដែលកើន ឬថយនោះត្រូវបានហៅថា ផលសងរួម នៃស៊ីត ។

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

➢ **និយមន័យ ៖**

ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយ ហៅថាផលសងរួម ។

➢ បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន $U_n - U_{n-1} = d$, $(n \geq 2)$

➢ ចំនួន d ហៅថាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត កំណត់ដោយៈ

$$d = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$$

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

➢ រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាមនិយមន័យ យើងបាន $U_1 = U_1$

$$U_2 = U_1 + d$$
$$U_3 = U_2 + d = U_1 + 2d$$
$$U_4 = U_3 + d = U_1 + 3d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = U_1 + (n-1)d$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1)d$

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(a_n): 13, 17, 21, 25, ...$

ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

ដោយ $a_1 = 13$; $d = a_2 - a_1 = 17 - 13 = 4$

គេបាន $a_n = 13 + (n-1)(4) = 4n + 9$

ដូចនេះ $a_n = 4n + 9$ ។

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

ជាទូទៅ បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលសងរួម d ។

នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ៖

$U_n = U_1 + (n-1)d$ ឬ $U_n = U_p + (n-p)d$ ។

គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេដឹងថា

ក. $u_{35} = 9$, $u_{45} = 17$ ។ គណនា u_{40} ។

ខ. $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$ ។ គណនា u_0 ។

ក. គណនា u_{40}

ប្រើរូបមន្ត $U_n = U_p + (n-p)d$

ដែល $u_{35} = 9$, $u_{45} = 17$

យើងបាន $U_{45} = U_{35} + (45-35)d$

សមមូល $17 = 9 + 10d \Rightarrow d = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

ដោយ $U_{40} = U_{35} + 5d$

នោះ $U_{40} = 9 + 5\times\frac{4}{5} = 13$

ខ. គណនា u_0

ប្រើរូបមន្ត $U_n = U_p + (n-p)d$

ដែល $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$

យើងបាន $U_{13} = U_7 + (13-7)d$

សមមូល $\frac{13}{2} = \frac{7}{2} + 6d \Rightarrow d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ដោយ $U_0 = U_7 - (0-7)d$

នោះ $U_0 = \frac{7}{2} - 7\times\frac{1}{2} = 0$

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

➤ សំគាល់ ៖ **ផលបូកតួចុងស្មើនិងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង**

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

គេបាន $a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d$$

ដូចនេះ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_k + a_{n-k+1}$ ។

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដើម្បីពិនិត្យថា តើស្វ៊ីត(u_n) មួយជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ គេមាន៣វិធីសាស្រ្ត

<u>វិធីសាស្រ្តទី១</u>៖ រកតម្លៃ d $=u_n - u_{n-1}$

- បើ d ជាចំនួនថេរ នោះ (u_n)ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
- បើ d ជាចំនួនអាស្រ័យនឹង n នោះ (u_n)មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្តទេ

<u>វិធីសាស្រ្តទី២</u>៖ បើ $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$ (u_n)ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍ ៖ ចូរពិនិត្យមើលថាតើស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ?

a. $u_n = 2024n - 2023$
b. $u_n = -8n + 2024$
c. $u_n = n^2 + n + 1$
d. $u_n = (-1)^n + 3n$

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

➢ផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម d និងគេតាង

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1$

$2S_n = (u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+\ldots(u_n+u_1)$

$=(u_1+u_n)+(u_1+u_n)+\ldots\ (u_1+u_n) = n((u_1+u_n)$

គេបាន

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$$

ជំនួស $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបានរូបមន្តថ្មីមួយទៀត

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

២. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

ឧទាហរណ៍

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម៖

ក. $2+4+6+...+146$

ខ. $100+95+90+85+...-20$

គ. $-193-189-185-...-21-17$

ឃ. $5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+...-3$

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១. និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុខបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែល $q \neq 0$ ។ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។

3, 12, 48, 192, 768, 3072, ...

x 4 x 4 x 4 x 4 x 4

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32$$

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម q

តាមនិយមន័យ យើងបាន $u_1 = u_1$

$$u_2 = u_1 \times q$$
$$u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q^2$$
$$u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^3$$
$$----------$$
$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ កំណត់ដោយ៖

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ឬ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ។

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ ៖ គេឲ្យស្វ៊ីត(u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \ (n \geq 1) \end{cases}.$$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត (v_n) កំណត់ដោយ $v_n = u_n + 3$, $n \geq 1$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
ខ. រករូបមន្តទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ ៖ តើបណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និងរករេសុងវា

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$

b). $u_n = (-1)^n . 5^{3n+2}$

c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$

ឧទាហរណ៍ ៖ តើបណ្តាស្វ៊ីតខាងក្រោម ស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$

B. $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$

D. $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a \neq 0)$.

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ u_1 និង ផលធៀបរួម q ដែល $q \neq 1$។ កំណត់ដោយ $S_n = u_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

គណនាផលបូក n តួដំបូងS_nនៃធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖

1/ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

2/ $3, 9, 27, 81, \ldots$

3/ $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \ldots$

4/ $\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \ldots$

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍៖ គណនាតម្លៃផលបូក S =1+11+111+.....+11...1(n លេខ1)

$$S = \frac{1}{9}\left(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n\ so\ 9}\right) = \frac{1}{9}\left[10.\frac{1-10^n}{1-10} - n\right]$$

ឧទាហរណ៍៖ ដោយដឹងថា

$$S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \ldots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}.$$

គណនា $P = a + \frac{b}{4}.$

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ជាទូទៅ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែល $|q|<1$

កំណត់ដោយ $S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$ ។

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត $\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9},\dfrac{8}{27},\dfrac{16}{81},.....$

ចូរគណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គណនាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួខាងក្រោម ៖

ក/ $\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{25},\dfrac{1}{125},\dfrac{1}{625},....$

ខ/ $\dfrac{3}{10},\dfrac{9}{100},\dfrac{27}{1000},....$

គ/ $\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{49},\dfrac{8}{343},....$

ឃ/ $\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{18},\dfrac{1}{54},\dfrac{1}{162},....$

ង/ $\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{49},\dfrac{8}{343},....$

ច/ $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{4},....$


The End

គណិតវិភាគ (TUP-BA 2024)

ជំពូក២.

លីមីត និង លក្ខណៈ

Limits and Their Properties

ដោយ

ហាំ ភារីម
លី ថាត់សេម

Lecture No. 1

2.1 ការគណនាលីមីតដោយប្រើក្រាហ្វ និង តាមវិធីគិតលេខ

វត្ថុបំណងក្នុងផ្នែកនេះ

- ប៉ាន់ស្មានតម្លៃលីមីតដោយប្រើវិធីគិតលេខ ឬប្រើក្រាហ្វិក
- យល់បានវិធីផ្សេងទៀត ដែលលីមីតកំណត់តម្លៃមិនបាន
- សិក្សា និង ប្រើនិយមន័យទូទៅចំពោះលីមីត

3

សេចក្តីផ្តើមចំពោះលីមីត

គូសក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

- ប្រើកម្មវិធី Geogebra រួចពិនិត្យមើលក្រាហ្វ
- ចំពោះតម្លៃ $x = 1$ ចូរពិនិត្យ តើមានអ្វីកើតឡើង?

សេចក្តីផ្តើមចំពោះលីមីត

- តើមានយោបល់យ៉ាងណាចំពោះ លក្ខណៈនៃក្រាហ្វរបស់ f នៅក្បែរៗ $x = 1$?
- ប្រើតារាងតម្លៃពិនិត្យមើល x ខិតជិត 1 ពីខាងឆ្វេង និងពីខាងស្តាំ

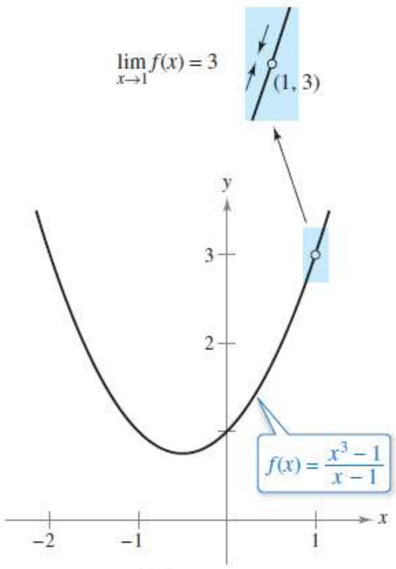
x approaches 1 from the left. → ← *x* approaches 1 from the right.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ approaches 3. → ← $f(x)$ approaches 3.

សេចក្តីផ្តើមចំពោះលីមីត

- ក្រាហ្វរបស់ f គឺជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានប្រហោងត្រង់ចំណុច (1, 3) បង្ហាញក្នុង Figure 1.5.
- ទោះបី x មិនអាចស្មើ 1 តែគេអាចបង្ខិតវាអោយកៀកនឹងតម្លៃ 1 តាមដែលអាចធ្វើទៅបានហើយគេសង្កេតឃើញថាតម្លៃ $f(x)$ ខិតទៅរក 3។
- ដោយប្រើការតាងលីមីត គេអាចសរសេរ៖



The limit of $f(x)$ as x approaches 1 is 3.

Figure 1.5

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

អាន៖ "the limit of $f(x)$ as x approaches 1 is 3."

សេចក្តីផ្តើមចំពោះលីមីត

- នៅក្នុងការពិភាក្សាខាងលើនេះ គេបាននិយមន័យមិនផ្លូវការណ៍មួយរបស់លីមីត។

- បើ $f(x)$ ខិតទៅកៀកនឹងតម្លៃទោលមួយ L កាលណា x ខិតទៅកៀកទាំងសងខាងនឹងតម្លៃ c នោះគេថា **លីមីតរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅកៀកនឹង c ស្មើ L** ។

- គេកំណត់សរសេរដូចខាងក្រោម៖

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Example 1 – *ប៉ាន់ស្មានតម្លៃលីមីតដោយប្រើតម្លៃលេខ*

- ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$ ត្រង់ចំណុចជាច្រើនក្បែរៗ $x = 0$ ហើយប្រើលទ្ធផលនេះ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃលីមីតរបស់វា?

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Example 1 – *Solution*

- ពិនិត្យតារាងតម្លៃរបស់ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច x ជាច្រើនក្បែរៗ 0

x approaches 0 from the left. → ← x approaches 0 from the right.

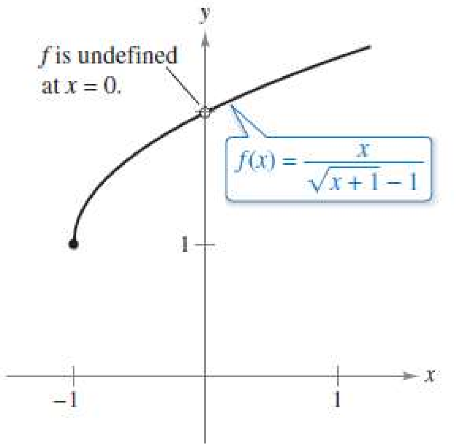
x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$f(x)$ approaches 2. → ← $f(x)$ approaches 2.

Example 1 – *Solution*

cont'd

- តាមរយៈលទ្ធផលនៅក្នុងតារាង គេសន្និដ្ឋានថា f មានលីមីតស្មើ ....? ពេល x ខិតទៅក្បែរៗ ....?
- សូមមើលរូបដើម្បីយល់ដឹងបន្ថែមទៅលើក្រាហ្វរបស់ f (see Figure 1.6.)



The limit of $f(x)$ as x approaches 0 is 2.

Figure 1.6

លីមីតដែលកំណត់មិនបាន

Limits That Fail to Exist

Example 2 – *ភាពខុសគ្នារវាងតម្លៃខាងឆ្វេង និង ខាងស្តាំ*

- ចូរបង្ហាញថា លីមីត $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ កំណត់មិនបាន។

Solution:

- ពិនិត្យក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍

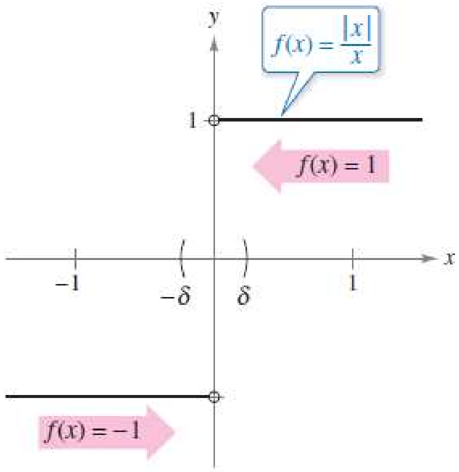
$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

- តាមរូប Figure 1.8 និងតាមនិយមន័យរបស់តម្លៃដាច់ខាតៈ

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$ Definition of absolute value

- គេបាន

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} f(x)$ does not exist.

Figure 1.8

Example 2 – *Solution*

cont'd

- ពេល x ខិតទៅកៀកៗនឹង 0 គេបានតម្លៃវិជ្ជមាន និងអវិជ្ជមានរបស់ x ធ្វើអោយ f(x) = 1 ឬ f(x) = −1

- ជាពិសេស បើ δ (*delta*) ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះចំពោះតម្លៃ x ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $0 < |x| < \delta$ គេអាចចាត់ថ្នាក់តម្លៃរបស់ $|x|/x$ ដូចខាងក្រោម៖

$(-\delta, 0)$ $\qquad$ $(0, \delta)$

Negative x-values yield $|x|/x = -1$.

Positive x-values yield $|x|/x = 1$.

Example 2 – *Solution*

cont'd

- ដោយ $|x|/x$ ខិតទៅរកចំនួនពីរផ្សេងគ្នា ពីខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ 0 ដូច្នេះ លីមីត $\lim_{x \to 0} (|x|/x)$ មិនអាចកំណត់បានទេ។

លីមីតកំណត់មិនបាន (Limits That Fail to Exist)

Common Types of Behavior Associated with Nonexistence of a Limit

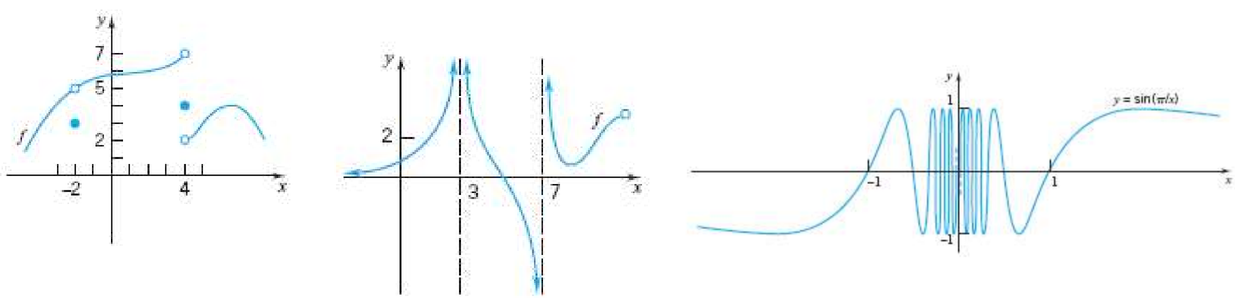
1. $f(x)$ approaches a different number from the right side of c than it approaches from the left side.
2. $f(x)$ increases or decreases without bound as x approaches c.
3. $f(x)$ oscillates between two fixed values as x approaches c.

សង្ខេប៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

(i) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L_1,\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L_2$ and $L_1 \neq L_2$ (The left-hand and right-hand limits of f at c each exist, but they are not equal.)

(ii) $f(x) \to \pm\infty$ as $x \to c^-$, or $f(x) \to \pm\infty$ as $x \to c^+$, or both (The function f is unbounded as x approaches c from the left, or from the right, or both.)

(iii) $f(x)$ "oscillates" as $x \to c^-$, c^+ or c



អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 1. For the function f indicated in figure 2.1.8

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = 5 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = ?$$

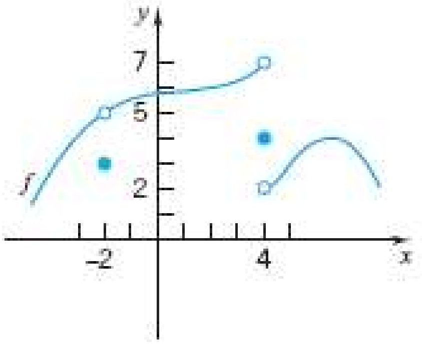


Figure 2.1.8

- Examining the graph of f near $x = 4$, we find tl

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = 7 \qquad \text{whereas} \qquad \lim_{x\to4^+} f(x) = 2$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{x\to4} f(x) \quad =?$$

អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 2. ពិនិត្យអនុគមន៍ក្នុងរូប Figure 2.1.10 ហើយកំណត់លក្ខណៈរបស់ $f(x)$ ចំពោះ x ខិតទៅជិត 3 និងខិតទៅជិត 7 ។

- As x approaches 3 from the left or from the right?

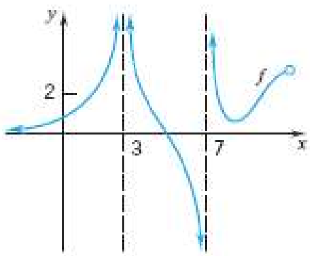


Figure 2.1.10

- As x approaches 7 from the left or from the right?

កំណត់សម្គាល់.

- To indicate that $f(x)$ becomes arbitrarily large, we can write $f(x)\to\infty$.
- To indicate that $f(x)$ becomes arbitrarily large negative, we can write $f(x)\to-\infty$.

អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 3. We set

$$f(x) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}$$

and examine the behavior of $f(x)$ (a) as x tends to 4 and then (b) as x tends to 2.

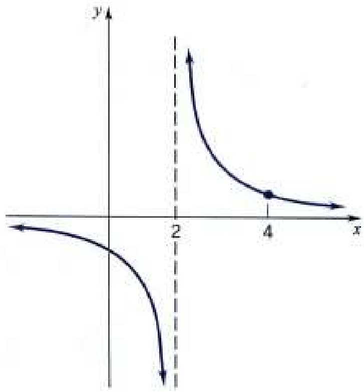
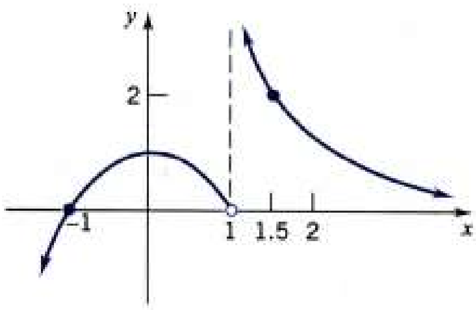


Figure 2.1.11

អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 4. Set

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \square\ 1 \\ 1/(x-1), & x \square\ 1. \end{cases}$$

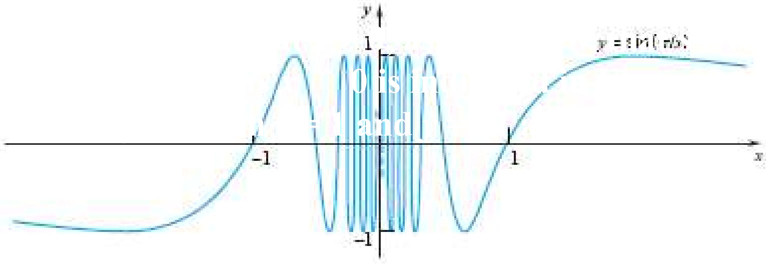


អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 5. Here we set

$$f(x) = \sin(\pi / x)$$

and show that the function can have no limit as $x \to 0$



អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

Practice 6. Let $f(x) = (\sin x)/x$. If we try to evaluate f at 0, we get the meaningless ratio 0/0; f is not defined at x = 0. However, f is defined for all $x \neq 0$, and so we can consider

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Table 2.1.1

(Left side)		(Right side)	
x (radians)	$\frac{\sin x}{x}$	x (radians)	$\frac{\sin x}{x}$
−1	0.84147	1	0.84147
−0.5	0.95885	0.5	0.95885
−0.1	0.99833	0.1	0.99833
−0.01	0.99998	0.01	0.99998
−0.001	0.99999	0.001	0.99999

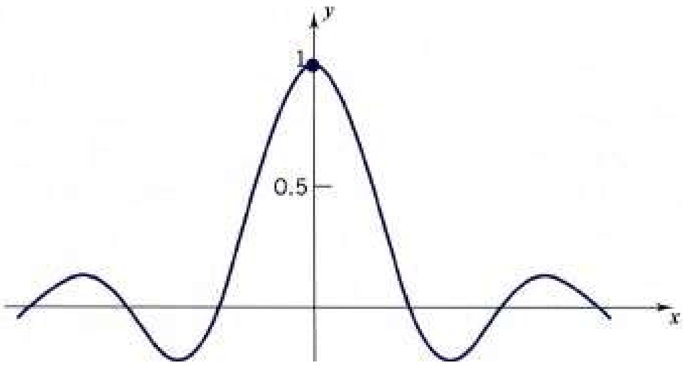
អនុវត្តន៍៖ លីមីតកំណត់មិនបាន

ដូច្នេះ តាមតារាងតម្លៃលេខ គេបាន

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



និយមន័យលីមីត

និយមន័យលីមីត

- និយមន័យមិនផ្លូវការណ៍៖ បើ $f(x)$ ខិតទៅកៀកៗនឹងចំនួនទោលមួយ L កាលណា x ខិតទៅកៀកៗទាំងសងខាងតម្លៃ c នោះគេថា លីមីតរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅរក c ស្មើ L ។ គេកំណត់សរសេរ៖

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

- និយមន័យនេះ មើលទៅហាក់ដូចជាច្បាស់លាស់! តែវាជានិយមន័យមិនផ្លូវការណ៍ទេ ព្រោះអត្ថន័យពិតប្រាកដ មិនទាន់ច្បាស់នៅឡើយទេចំពោះឃ្លាទាំងពីរខាងក្រោម៖

“$f(x)$ ខិតទៅកៀកៗនឹងចំនួនទោល L”

និង

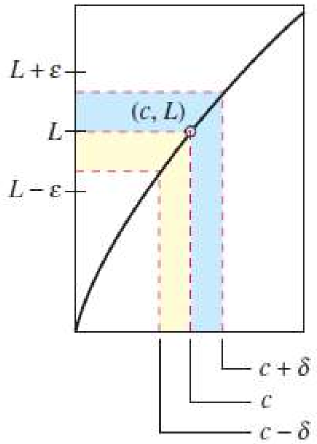
“x ខិតទៅរក c”

និយមន័យលីមីត

- មនុស្សដំបូង ដែលបានកំណត់អត្ថន័យតាមបែបគណិតវិទ្យា ចំពោះឃ្លាទាំងពីរខាងលើនេះ គឺលោក **Augustin-Louis Cauchy**។ និយមន័យលីមីតរបស់គាត់ប្រើគោលការណ៍ ε-δ គឺជានិយមន័យស្តង់ដាដែលប្រើដល់សព្វថ្ងៃនេះ។

- ក្នុងរូប Figure 1.12 តាង ε (*epsilon*) ជាចំនួនមួយវិជ្ជមាន (តូច)។

- ដូច្នេះ ឃ្លាថា “$f(x)$ ខិតទៅកៀកៗនឹង L” គឺមានន័យថា $f(x)$ ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ។



The ε-δ definition of the limit of $f(x)$ as x approaches c

Figure 1.12

និយមន័យលីមីត

- ដោយប្រើតម្លៃដាច់ខាត គេអាចសរសេរបាន

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

- ដូចគ្នាដែរ ឃ្លាថា "x ខិតជិត c" មានន័យថា មានចំនួនវិជ្ជមាន δ ដែល x ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $(c - \delta, c)$ ឬក្នុងចន្លោះ $(c, c + \delta)$.

- ដូច្នេះ គេអាចសរសេរបានជាវិសមភាព ខាងក្រោម៖

$$0 < |x - c| < \delta.$$

និយមន័យលីមីត

- ទី១ គេបាន៖

  $0 < |x - c|$ The distance between x and c is more than 0.

  បញ្ជាក់ថា $x \neq c$.

- ទី២ គេបាន៖

  $|x - c| < \delta$ x is within δ units of c.

  មានន័យថា x ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចម្ងាយ δ ពី c ។

និយមន័យលីមីត

Definition of Limit

Let f be a function defined on an open interval containing c (except possibly at c), and let L be a real number. The statement

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

means that for each $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that if

$$0 < |x - c| < \delta$$

then

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Example 3 – *Finding a δ for a given ε*

- Given the limit

$$\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$$

find δ such that $|(2x - 5) - 1| < 0.01$ whenever

$$0 < |x - 3| < \delta.$$

Solution:

- ស្គាល់ $\varepsilon = 0.01$
- រក δ ដោយបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃដាច់ខាត

$$|(2x - 5) - 1| \quad \text{and} \quad |x - 3|.$$

Example 3 – *Solution*

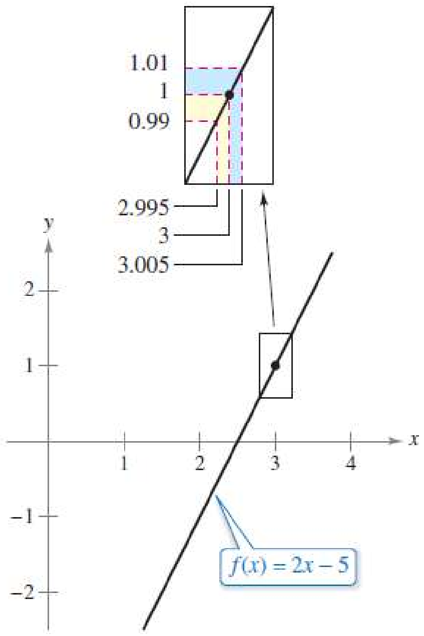
cont'd

Example 3 – *Solution*

cont'd

- ពិនិត្យរូប Figure 1.13, ចំពោះតម្លៃ x ស្ថិតក្នុងចន្លោះចម្ងាយ 0.005 ពីចំណុច 3 ($x \neq 3$) គេបានតម្លៃ $f(x)$ ស្ថិតក្នុងចន្លោះចម្ងាយ 0.01 ពីចំណុច 1 ។

Figure 1.13

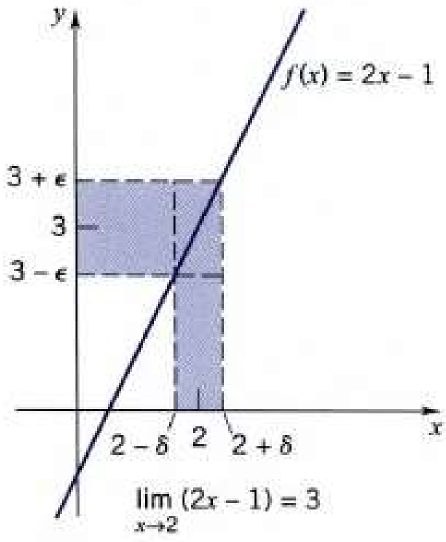


The limit of $f(x)$ as x approaches 3 is 1.

អនុវត្តន៍និយមន័យលីមីត

Practice 1. Show that

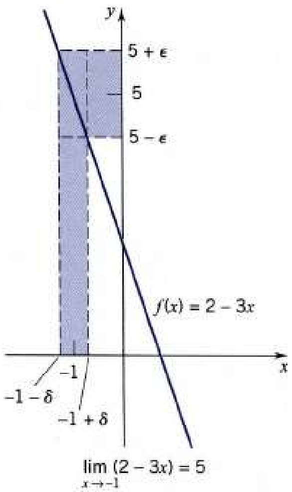
$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$



អនុវត្តន៍និយមន័យលីមីត

Practice 2. Show that

$$\lim_{x \to -1} (2 - 3x) = 5$$



2.2 គណនាលីមីតតាមវិភាគ

Evaluating Limits Analytically

ជំពូក២.

លីមីត និងភាពជាប់

Lecture 2

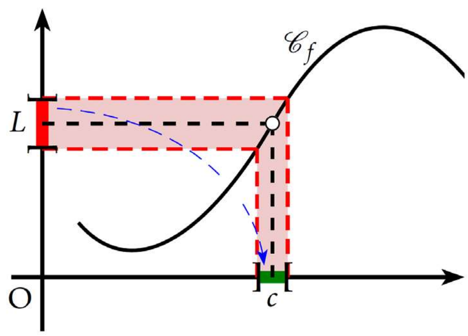
រំឭក

និយមន័យ: យក f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះបើក $I=(a,b)$ ផ្ទុកចំនួន c អាចលើកលែងត្រង់ c បាន) និងកំណត់ L ជាចំនួនពិតមួយ។ គេបានសំណើ៖

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

មានន័យថា

ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មានចំនួនពិត $\delta>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់
បើ $0<|x-c|<\delta$ នោះគេបាន $|f(x)-L|<\varepsilon$



ជារួម៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L ត្រង់ a បើគ្រប់ចន្លោះបើកផ្ទុក L ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗ c ។

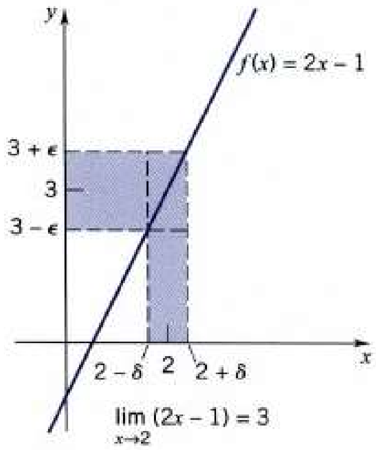
ឧទាហរណ៍

- គេអោយលីមីត $\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$
- ចូររក δ ដើម្បីអោយ $|(2x-5)-1|<0.01$ កាលណា $0<|x-3|<\delta$
- ស្គាល់ $\varepsilon=0.01$ ។ រក δ ដោយបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃដាច់ខាត

$$|(2x-5)-1| \text{ និង } |x-3|$$

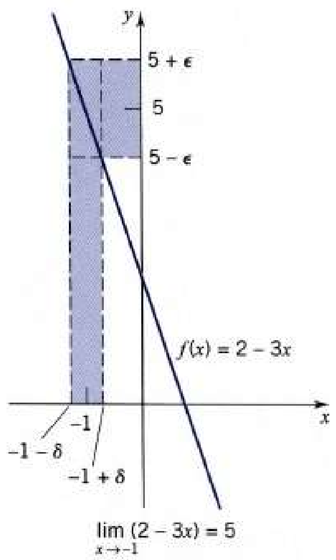
បង្ហាញថា

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$$



បង្ហាញថា

$$\lim_{x\to -1}(2-3x)=5$$

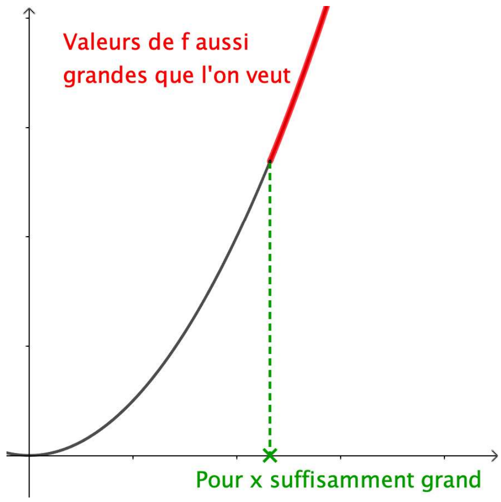


លីមីតនៅអនន្ត

1) លីមីតមិនកំណត់នៅ ∞

និយមន័យ គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ នៅ $+\infty$ បើ $f(x)$ ធំស្រេចចិត្ត កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

សម្គាល់ គេមាននិយមន័យដូចគ្នា ចំពោះលីមីតនៅ $-\infty$ ។



ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x) = x^2$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត $+\infty$ ។ ព្រោះ

$$f(100) = 100^2 = 10000$$
$$f(1000) = 1000^2 = 1\,000\,000$$

ដូច្នេះ

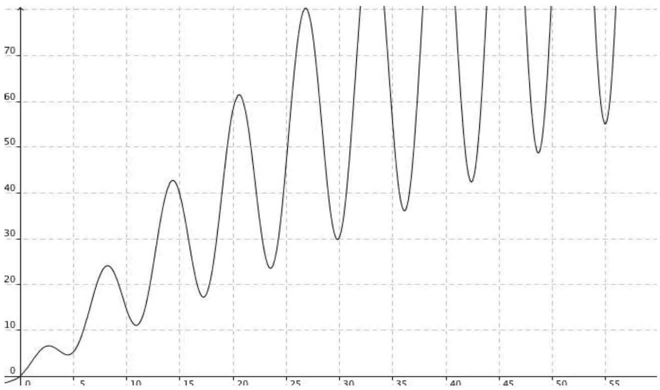
- តម្លៃអនុគមន៍កាន់តែធំទៅៗ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម
- បើគេកំណត់ចន្លោះទូទៅមួយ $]a\,;\,+\infty[$ នោះគ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

និយមន័យ:

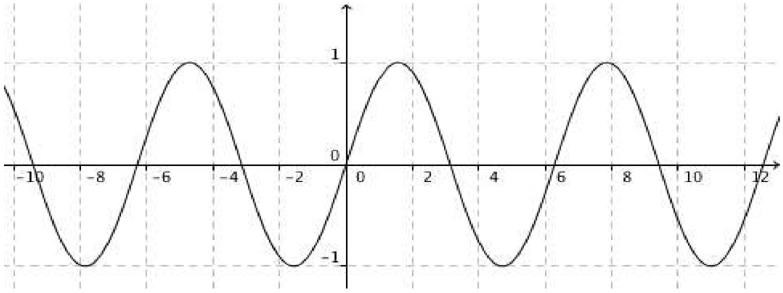
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ នៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះ $]a\,;\,+\infty[$ a ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $-\infty$ នៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះ $]-\infty\,;\,b[$ b ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

សម្គាល់

- អនុគមន៍ដែលខិតទៅរក $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត $+\infty$ មិនចាំបាច់ជាអនុគមន៍កើននោះទេ។ ជាឧទាហរណ៍៖



- មានអនុគមន៍ខ្លះ គ្មានលីមីតនៅអនន្តទេ។ ដូចជាអនុគមន៍ ស៊ីនុសសូអ៊ីតៈ



) **លីមីតកំណត់នៅ ∞**

និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត L នៅត្រង់ $+\infty$ បើ $f(x)$ ខិតទៅក្បែរៗ L កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម ។ គេតាង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ។

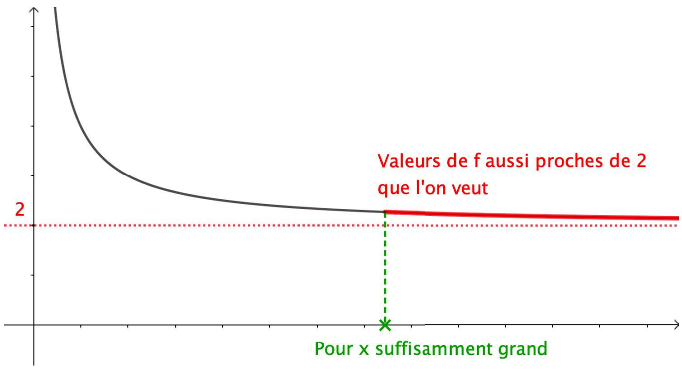
សម្គាល់ ដូចគ្នាចំពោះនិយមន័យនៅត្រង់ $-\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ មានលីមីតស្មើ កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty$ ។ ព្រោះ

- $f(100) = 2 + \frac{1}{100} = 2.01$
- $f(10000) = 2 + \frac{1}{10000} = 2.0001$

ដូច្នេះ

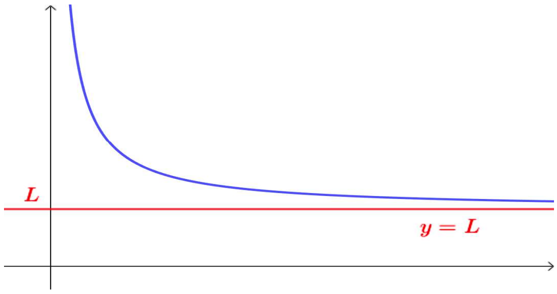
- តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្បែរ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។



- ក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍ ខិតទៅជិតបន្ទាត់ $y = 2$ តែមិនអាចប៉ះបានទេ។

- ប្រសិនបើគេកំណត់យកចន្លោះបើកមួយដែលផ្ទុកចំនួន នោះគ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាល x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

និយមន័យ បើ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ នោះគេហៅបន្ទាត់ $y = L$ ថា **អាស៊ីមតូតដេក**
ic) របស់អនុគមន៍ f នៅ $+\infty$។



និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត L នៅត្រង់ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះបើកដែលផ្ទុក L ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃទាំងអស់របស់ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាងដោយ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

សម្គាល់ ដូចគ្នាចំពោះនិយមន័យនៅត្រង់ $-\infty$ ។

3) លីមីតរបស់អនុគមន៍សំខាន់ៗ

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ n គូ)

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ n

សេស)

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

លីមីតអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនពិត c

1) និយមន័យ

និយមន័យ គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ ត្រង់ c បើ $f(x)$ ធំស្រេចចិត្ត កាលណា x ខិតទៅកៀរៗ c ។

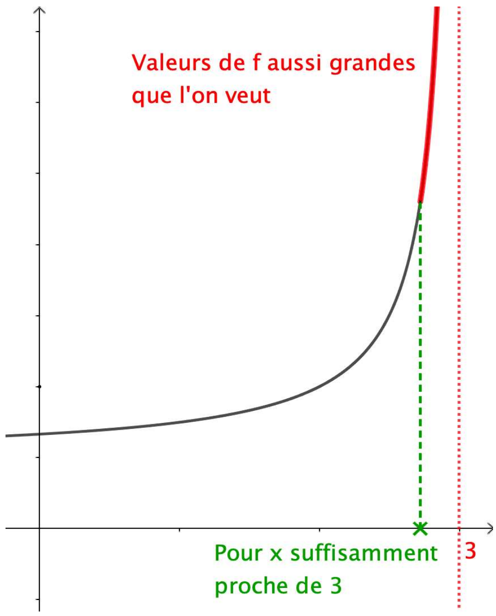
ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត 3 ។

ព្រោះ

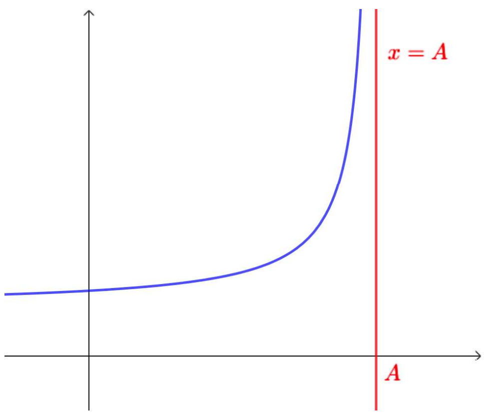
- $f(2.99) = \frac{1}{3-2.99} + 1 = 101$
- $f(2.9999) = \frac{1}{3-2.9999} + 1 = 10\,001$

ដូច្នេះ

- តម្លៃរបស់អនុគមន៍កាន់តែធំទៅៗ x កាន់តែខិតទៅជិតចំនួន 3
- ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ខិតទៅជិតបន្ទាត់ $x = 3$ តែមិនអាចប៉ះបានទេ
- បើគេកំណត់បានចន្លោះមួយ $]a\,;\,+\infty[$ នោះ គ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាលណា x កាន់តែខិតទៅជិត 3



និយមន័យ បើ $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = c$ ហៅថា **អាស៊ីមតូតឈរ** ចំពោះខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ f ។



និយមន័យ

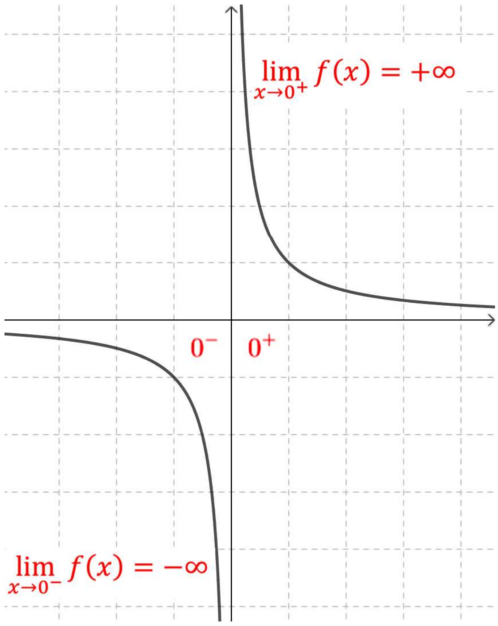
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ ត្រង់ចំណុច c បើគ្រប់ចន្លោះបើក $]a\,;\,+\infty[$ a ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗចំណុច c ។ គេតាងដោយ
$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $-\infty$ ត្រង់ចំណុច c បើគ្រប់ចន្លោះបើក $]-\infty\,;\,b[$ b ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗចំណុច c ។ គេតាងដោយ
$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

2) លីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំ

ឧទាហរណ៍ គេអោយអនុគមន៍ច្រាសកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

គេបាន f កំណត់បានលីមីតផ្សេងៗគ្នា ត្រង់ 0 តាមករណី ដែល $x > 0$ ឬ $x < 0$ ។



- បើ $x > 0$ កាលណា x ខិតទៅរក គេបាន $f(x)$ ខិតទៅរក $+\infty$ ។ គេតាង

  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

ក្នុងករណីនេះ គេហៅថា លីមីតខាងស្តាំ ឬ លីមីតស្តាំត្រង់

- បើ $x < 0$ កាលណា x ខិតទៅរក គេបាន $f(x)$ ខិតទៅរក $-\infty$ ។ គេតាង

  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

ក្នុងករណីនេះ គេហៅថា លីមីតខាងឆ្វេង ឬ លីមីតឆ្វេងត្រង់

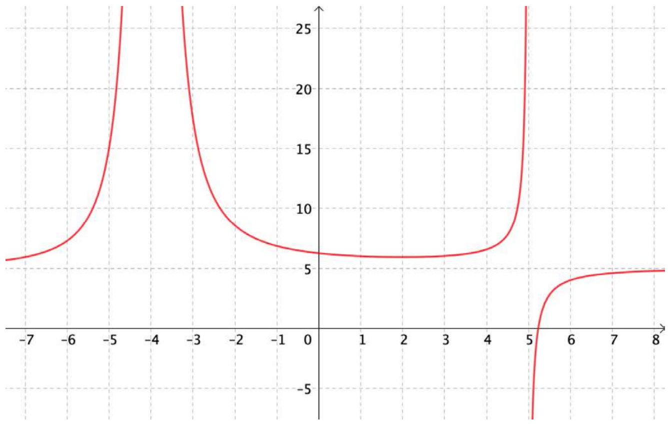
Practice 1: កំណត់លីមីតរបស់អនុគមន៍មួយ ដោយប្រើក្រាហ្វ៖

គេអោយក្រាហ្វតំណាងអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម៖

a) ដោយប្រើក្រាហ្វ ចូរកំណត់លីមីតត្រង់ $-\infty$, ត្រង់ $+\infty$ ត្រង់ -4 និងត្រង់ 5 ។

b) ចូរបំពេញតារាងអថេរភាពរបស់ f ។

x	$-\infty$ $\quad$ -4 $\quad$ 2 $\quad$ 5 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	

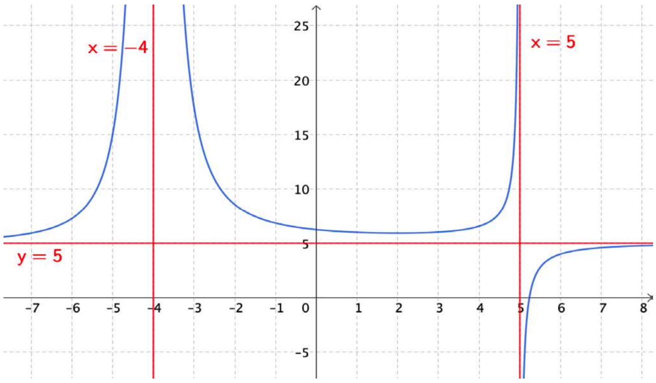


ចម្លើយ៖

a)

b)

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	5



ប្រមាណវិធីលើលីមីត

1) ប្រើលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីលើលីមីត

យកតម្លៃ α អាចតាងអោយ $+\infty$ $-\infty$ ឬចំនួនកុំផ្លិច។

<u>ផលបូក ផលដក</u>

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

គេមិនអាចទស្សន៍ទាយតម្លៃលីមីតបានទេ។

<u>ផលគុណ</u>

∞ តាងអោយ $+\infty$ ឬ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x) =$	$L\times L'$	∞	∞	

ក្នុងករណីនេះ គេអនុវត្តវិធានរបស់សញ្ញា ដើម្បីកំណត់បានថាតើផលគុណ ស្មើ $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។

ផលចែក ∞ តាងអោយ $+\infty$ ឬ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞		

ក្នុងករណីនេះ គេអនុវត្តវិធានរបស់សញ្ញា ដើម្បីកំណត់បានថាតើផលចែក ស្មើ $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។

Practice 2: គណនាលីមីតរបស់អនុគមន៍មួយ ដោយប្រើរូបមន្ត

ចូរកំណត់លីមីតខាងក្រោម

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3}$

ចម្លើយ៖ a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty$

គេបាន លីមីតផលគុណ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to3^-} 1-2x = 1-2\times3 = -5 \\ \lim\limits_{x\to3^-} x-3 = 0- \end{cases}$$

លីមីតមានទម្រង់ $\frac{5}{0}$ ត្រូវស្មើ ∞ ។

ដូច្នេះ តាមវិធានសញ្ញា គេបានលីមីតក្រោមទម្រង់ $\frac{-5}{0^-}$ ត្រូវស្មើ ∞ ។

ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3} = +\infty$

2) លីមីតក្រោមទម្រង់មិនកំណត់

គេមានរាងមិនកំណត់

$\infty - \infty$ $0\times\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Practice 3: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតផលគុណកត្តា (1)

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$

ចម្លើយ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1=?$

ដោយ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty.\end{cases}$

គេបានទម្រង់មិនកំណត់ $\infty-\infty$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ

$$-3x^3+2x^2-6x+1=x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ និង តាមលីមីតផលបូក

$$\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3$$

ដូច្នេះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty\end{cases}$

ដូច្នេះ លីមីតនៃផលគុណ

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$$

Practice 4: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតផលគុណកត្តា (2)

គណនា) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}$

ចម្លើយ

a) ពិនិត្យមើលភាគយក និងភាគបែងរបស់ប្រភាគ ។ គេបាន A មានទម្រង់មិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$

គេបានលីមីតផលបូក

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2}=6$$

ហើយ លីមីតផលចែក

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$

b) B មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ សម្រាប់ភាគយក និងភាគបែង

$$\frac{3x^2+2}{4x-1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

ដែល $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

គេបានលីមីតផលបូក

$$\lim_{x\to-\infty} 3+\frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$$

ហើយលីមីតផលចែក

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ដូច្នេះ លីមីតផលគុណ គឺ

$$\lim_{x\to-\infty} x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = -\infty$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty$

Practice 5: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតកន្សោមឆ្លាស់

គណនា) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$) $B=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

ចម្លើយៈ

a) គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$។ គេបាន A មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

ដោយគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ គេបាន

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}&=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- លីមីតផលបូក $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$
- លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$

) គេមាន $\begin{cases}\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}-2=\sqrt{5-1}-2=0\\\lim\limits_{x\to5}x-5=5-5=0\end{cases}$

ដូច្នេះ លីមីត B មានរាង $\frac{0}{0}$

ដោយគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ គេបាន

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}&=\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\\&=\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\\&=\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\end{aligned}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}+2=\sqrt{5-1}+2=4$ និង លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$ គេបានៈ

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{1}{4}$$

Practice 6: កំណត់រកអាស៊ីមតូត

យក f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ដោយ $f(x)=\frac{-2}{1-x}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ក្រាហ្វរបស់ f កំណត់បានអាស៊ីមតូត ដែលគេអាចប្រាប់ប្រភេទ និងសមីការរបស់វាបាន។

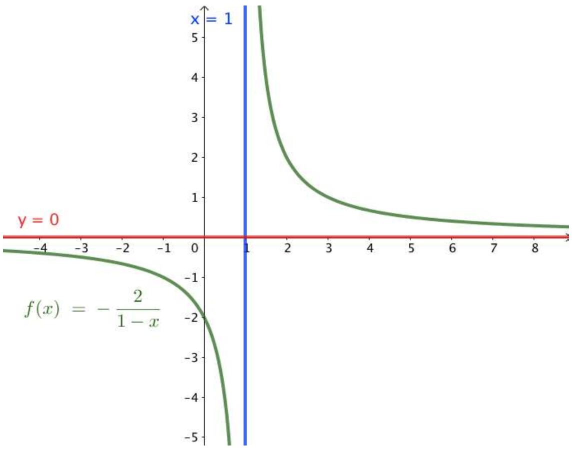
ចម្លើយ៖

- ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ នោះគេបានលីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-x}=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x}=0$។

គេបាន បន្ទាត់ $y=0$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរ របស់ក្រាហ្វអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ $-\infty$ ។

- ដោយ $\lim\limits_{x\to1^-} 1-x=0^+$ ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-2}{1-x}=-\infty$ ។ ម៉្យាងទៀត $\lim\limits_{x\to1^+} 1-x=0^-$ ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-2}{1-x}=+\infty$ ។

គេបាន បន្ទាត់ $x=1$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាហ្វអនុគមន៍ f។



លីមីតអនុគមន៍បណ្តាក់

Practice 7: កំណត់លីមីតរបស់អនុគមន៍បណ្តាក់

គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ ដោយ $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$ ។ ចូរគណនាលីមីតរបស់អនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ។

ចម្លើយ៖ គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}=2$

ដូច្នេះ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$

ព្រោះ បើ $x\to+\infty$ នោះគេបាន $X=2-\frac{1}{x}\to2$ ហើយ $\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$ ។

លីមីត និង វិធានប្រៀបធៀប

1) ទ្រឹស្តីបទប្រៀបធៀប

ទ្រឹស្តីបទ យក f និង g ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់លើចន្លោះបើក $I =]a\,;\,+\infty[$ ។

- បើគ្រប់ x ក្នុង I $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (Fig.1)
- បើគ្រប់ x ក្នុង I $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (Fig.2)

សម្គាល់ គេទទួលបានទ្រឹស្តីបទដូចគ្នា នៅត្រង់ $-\infty$ ។

Figure 1

គេអាចនិយាយបានថា អនុគមន៍ f រុញអនុគមន៍ g ទៅ $+\infty$ ចំពោះតម្លៃ x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

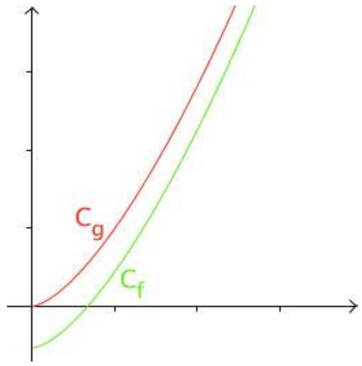
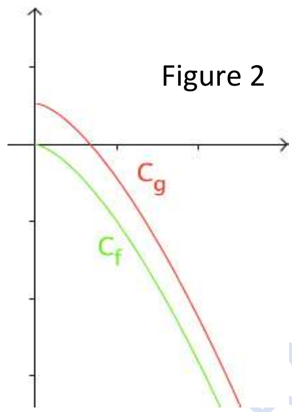


Figure 2



សម្រាយបញ្ជាក់ករណីរូបទី

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ដូច្នេះគ្រប់ចន្លោះបើក $]m\,;\,+\infty[$ m ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ សន្មតយក $f(x) > m$ ។
ឬម្យ៉ាងទៀត កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម គេមាន $f(x) \le g(x)$ ។
ដូច្នេះ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម គេបាន $g(x) > m$ ។ ដូច្នេះ

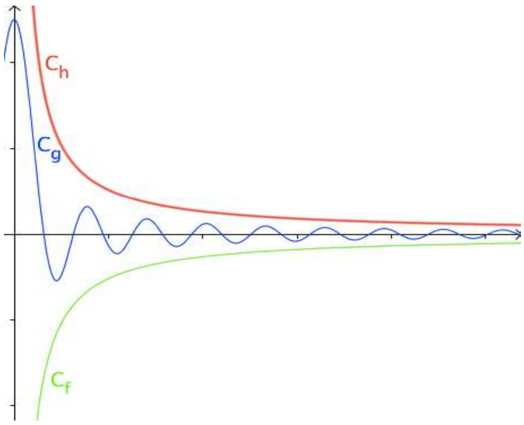
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2) ទ្រឹស្តីបទ

ទ្រឹស្តីបទ យក f g និង h ជាអនុគមន៍បីកំណត់លើចន្លោះបើក $I =]a\,;\,+\infty[$ ។ ដូច្នេះ

បើគ្រប់ x ក្នុង I $\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$ ។

សម្គាល់ គេទទួលបានទ្រឹស្តីបទដូចគ្នា នៅត្រង់ $-\infty$ ។



គេអាចនិយាយថា អនុគមន៍ f និង h គឺជាប៉ូលីស) កំពុងតែកៀបអនុគមន៍ g ចំពោះតម្លៃ x ធំល្មម ដើម្បីអោយវាមានលីមីតដូចគ្នា ។

Practice 8: ប្រើទ្រឹស្តីប្រៀបធៀប និងទ្រឹស្តីបទ sandwich

គណនា 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \sin x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

ចម្លើយ៖ 1)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ គ្មាន ដូច្នេះ លីមីតដែលត្រូវរក គឺកំណត់មិនបាន ។

ដកចេញទម្រង់កំណត់មិនបាន $-1 \le \sin x$ ។ ដូច្នេះ $x - 1 \le x + \sin x$ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទប្រៀបធៀប

$$\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$$

- ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ គ្មាន ដូច្នេះ លីមីតដែលត្រូវរក គឺកំណត់មិនបាន។

ដោយដកចេញ ទម្រង់កំណត់មិនបាន $-1 \le \cos(x) \le 1$ ។ ដូច្នេះ គេបាន

$$-x \le x\cos(x) \le x \qquad x > 0$$

ដូច្នេះ

$$-\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\frac{1}{x}=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$

តាមទ្រឹស្តីបទ គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}=0$

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1) លីមីតទាល់

លក្ខណៈ:

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \text{ និង } \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

អនុវត្តន៍ គណនាលីមីតអនុគមន៍មានតួអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គណនា

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x+e^{-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-\frac{1}{x}}$

ចម្លើយ៖ a)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x=-\infty$ នោះតាមលីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-3x}=0$

ព្រោះ កាលណា $x\to+\infty$ គេបាន $X=-3x\to-\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ នោះតាមលីមីតផលបូក គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}x+e^{-3x}=+\infty$

b) ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}=1$

ដូច្នេះ តាមលីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-\frac{1}{x}}=e^1=e$ ។

2) ប្រៀបធៀបអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង ស្វ័គុណ

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ (តចប់)

(System of linear equations, Lecture 3.)

កៅ មុយសាន
ហាំ ភារីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្ដុះបណ្ដាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

មាតិការសម្រាប់សប្ដាហ៍នេះ

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

វត្ថុបំណង

- ពិភាក្សាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ ដោយប្រើភាពសមមូលជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស។
- កំណត់រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសដោយប្រើម៉ាទ្រីសទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម។
- កំណត់លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស ដោយបង្កើតសំណុំនៃបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រទាក់ទងនឹងម៉ាទ្រីសនោះ ព្រមទាំងបញ្ជាក់បានភាពមិនប្រែប្រួលក្រោមប្រមាណវិធីជួរដេក។
- រកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសមួយ ដោយប្រើទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម។
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ ដោយប្រើម៉ាទ្រីសច្រាស។

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា និង លំហជួរដេក

និយមន័យ ១

(i) ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរពីរ មាន m សមីការ និងមាន n អថេរ ជា ប្រព័ន្ធសមមូលគ្នា លុះត្រាតែ មានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា។

(ii) ម៉ាទ្រីសបន្ថែម **D** សមមូលជួរដេក ទៅនឹងម៉ាទ្រីសបន្ថែម **C** លុះត្រាតែ ម៉ាទ្រីស **D** បានមកពីម៉ាទ្រីស **C** តាមរយៈការអនុវត្តប្រមាណវិធីជួរដេក (EROs) ប្រភេទទី (I), (II) និង (III) ទៅលើម៉ាទ្រីសនេះ។

គេបាន ប្រព័ន្ធទាំងពីរខាងក្រោមសមមូលគ្នា

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} x + 4y &= 14 \\ 5x - 2y &= 4 \end{cases}$$

ព្រោះប្រព័ន្ធទាំងពីរមានសំណុំចម្លើយតែមួយដូចគ្នា គឺ $\{(2,3)\}$ ។

Cont...

- ចំពោះម៉ាទ្រីសណាមួយ គេបានទាំងទម្រង់ REF និងទម្រង់ RREF របស់វា សុទ្ធតែជាម៉ាទ្រីសដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសនោះ។
- បើម៉ាទ្រីស **D** សមមូលជួរដេកទៅនឹង **C** នោះគេថា ម៉ាទ្រីស **C** ក៏សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស **D** វិញដែរ ព្រោះប្រមាណវិធី EROs ក៏មានចម្រាសមកវិញដែរ (សូមមើល តារាង 2.1)។

Table 2.1. EROs និង ចម្រាសរបស់វា

ប្រភេទ	ប្រមាណវិធី	ប្រមាណវិធីច្រាស
(I)	$R_i^{\text{New}} \longleftarrow cR_i^{\text{old}},\ c \neq 0$	$R_i^{\text{old}} \leftarrow \frac{1}{c} R_i^{\text{New}}$
(II)	$R_i \longleftrightarrow R_j,\quad i \neq j$	$R_j \longleftrightarrow R_i$
(III)	$R_i^{\text{New}} \longleftarrow R_i^{\text{old}} + cR_j^{\text{old}},\quad c \neq 0$	$R_i^{\text{old}} \longleftarrow R_i^{\text{new}} - cR_j^{\text{old}}$

Cont...

ទ្រឹស្តីបទ ២

គេអោយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ។ *បើ* $[\mathrm{C} \mid \mathrm{D}]$ *សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសបន្ថែម* $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$ *នោះគេថា ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ* $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ *សមមូលគ្នាទៅនឹងប្រព័ន្ធ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់.

- យក S_A ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ និង
- យក S_C ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$។

ដូច្នេះ ស្រាយថា បើ $[\mathbf{C} \mid \mathbf{D}]$ សមមូលជួរដេកទៅនឹង $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$ នោះគេបាន $S_A = S_C$? □

ពិនិត្យមើលសម្រាយចំពោះប្រមាណវិធីជួរដេកទី (III) ខាងក្រោម។

Cont...

- Type (III) Operation: ឧបមាថា ប្រព័ន្ធសមីការដើមមានទម្រង់៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

យើងប្រើប្រមាណវិធីជួរដេកទី៣៖ $R_j^{\text{new}} \leftarrow qR_i^{\text{old}} + R_j^{\text{old}}$ $(i \neq j)$។ គេបានសមីការទី j ថ្មី៖

$$(qa_{i1} + a_{j1})\, x_1 + (qa_{i2} + a_{j2})\, x_2 + \cdots + (qa_{in} + a_{jn})\, x_n = qb_i + b_j.$$

យក $S_A = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធដើម។ ដូច្នេះ $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ គឺជាចម្លើយរបស់សមីការទី i និងសមីការទី j នៅក្នុងប្រព័ន្ធដើម។ គេបាន

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i \quad \text{និង} \quad a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \cdots + a_{jn}s_n = b_j$$

ដូច្នេះ $(qa_{i1} + a_{j1})\, s_1 + (qa_{i2} + a_{j2})\, s_2 + \cdots + (qa_{in} + a_{jn})\, s_n = qb_i + b_j$
មានន័យថា៖ $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ជាចម្លើយមួយចំពោះសមីការទី j ថ្មី។

រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីស

- ពេលណាយើងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan ទៅលើប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ ពេលនោះគេទទួលបានម៉ាទ្រីសបន្ថែមតែមួយគត់។ ក្នុងន័យនេះ គេថា៖ **គ្រប់ម៉ាទ្រីសទាំងអស់សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសតែមួយគត់ក្នុងទម្រង់អេសឡុងជួរដេកបង្រួម (RREF)**។
- តាមន័យខាងលើ គេអាចមានម៉ាទ្រីសជាច្រើននៅក្នុងទម្រង់អេសឡុងជួរដេក ដែលវាសមមូលជួរដេកជាមួយគ្នា។ ដូច្នេះ វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan មានសារៈសំខាន់ជាងវិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss។

វត្ថុបំណង | ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា - រ៉ង់ - និងលំហជួរដេក | អនុវត្តន៍ RREF៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីស

- ពេលណាយើងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan ទៅលើប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ ពេលនោះគេទទួលបានម៉ាទ្រីសបន្ថែមតែមួយគត់។ ក្នុងន័យនេះ គេថា៖ **គ្រប់ម៉ាទ្រីសទាំងអស់សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសតែមួយគត់ក្នុងទម្រង់អេសឡុងជួរដេកបង្រួម (RREF)**។
- តាមន័យខាងលើ គេអាចមានម៉ាទ្រីសជាច្រើននៅក្នុងទម្រង់អេសឡុងជួរដេក ដែលវាសមមូលជួរដេកជាមួយគ្នា។ ដូច្នេះ វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan មានសារៈសំខាន់ជាងវិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss។

និយមន័យ ៣

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$។ គេបាន រ៉ង់របស់ $\mathbf{A}$ (តាងដោយ $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$) គឺជាចំនួនជួរដេកមិនសូន្យ (i.e., ជួរដេកដែលមានធាតុនាំមុខ) ស្ថិតក្នុងទម្រង់អេសឡុងជួរដេកបង្រួម (RREF) ដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$។

Cont...

ពិនិត្យម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&4\\3&2&5\\0&-1&1\end{bmatrix}\quad \text{និង}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&1&0&1&-9\\0&-2&12&-8&-6\\2&-3&22&-14&-17\end{bmatrix}$$

ទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួមរបស់ម៉ាទ្រីស **A** និង **B** កំណត់បានដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_3\quad \text{និង}\quad \begin{bmatrix}1&0&2&-1&-4\\0&1&-6&4&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=3$ ហើយ $\operatorname{rank}(\mathbf{B}=2$។

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន និង រ៉ង់

យើងអាចសិក្សាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនបាន ដោយប្រើរ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម។

ទ្រឹស្តីបទ ៤

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ មាន n អថេរ។ គេបាន

(1) *បើ $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=n$ នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយងាយ (trivial solution=ចម្លើយសូន្យ) តែមួយគត់។*

(2) *បើ $\operatorname{rank}(\mathbf{A})<n$ នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែននេះមានចម្លើយផ្សេងក្រៅពីចម្លើយងាយ (nontrivial)។ i.e., ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។*

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន និង រ៉ង់

យើងអាចសិក្សាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនបាន ដោយប្រើរ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម។

ទ្រឹស្តីបទ ៤

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *មាន* n *អថេរ។ គេបាន*

(1) *បើ* $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ *នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយងាយ (trivial solution= ចម្លើយសូន្យ) តែមួយគត់។*

(2) *បើ* $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n$ *នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែននេះមានចម្លើយផ្សេងក្រៅពីចម្លើយងាយ (nontrivial)។ i.e., ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។*

សម្រាយបញ្ជាក់.

ចំពោះម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{0}]$ គេបានចំនួនធាតុ pivots ស្មើនឹង $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$។

- យក $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n$ ។ គេបាន៖

- យក $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ ។ គេបាន៖

Cont..

Corollary ៥

យក $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *ជាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមួយ ដែលមាន* m *សមីការលីនេអ៊ែរ និង* n *អថេរ។ ដូច្នេះ បើ* $m < n$ *នោះគេថាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនគ្មានចម្លើយងាយទេ។*

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន៖

$$\begin{cases} -4c_1 + 2c_2 + 6c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ 2c_1 - 4c_3 = 0 \end{cases}$$

ចូរសន្និដ្ឋាន?

លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស

- ចូរចងចាំថា បើ **A** ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ នោះគេបាន ជួរដេករបស់ **A** គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមានកូអរដោនេចំនួន n ។ មានន័យថា ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ $\mathbb{R}^n$ ។

និយមន័យ ៦

យក **A** ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ ។ គេបាន សំណុំរងរបស់ $\mathbb{R}^n$ គឺជាសំណុំផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រដែលជាបន្សំលីនេអ៊ែររបស់ជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស **A** ។ គេហៅសំណុំរងនេះថា **លំហជួរដេក** របស់ម៉ាទ្រីស **A** ។

$$\text{col}(\mathbf{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_n r_n \right\}$$

ដែល $r_i, i = 1, \cdots, n$ ជាវ៉ិចទ័រជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស **A** ហើយ c_i ជាស្កាលែរ។

វត្ថុបំណង
ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា - រ៉ង់ - និងលំហជួរដេក
អនុវត្តន៍ RREF៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស

- ចូរចងចាំថា បើ **A** ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ នោះគេបាន ជួរដេករបស់ **A** គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមានកូអរដោនេចំនួន n ។ មានន័យថា ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ $\mathbb{R}^n$ ។

និយមន័យ ៦

យក **A** ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ ។ គេបាន សំណុំរងរបស់ $\mathbb{R}^n$ គឺជាសំណុំផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រដែលជាបន្សំលីនេអ៊ែររបស់ជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស **A** ។ គេហៅសំណុំរងនេះថា **លំហជួរដេក** របស់ម៉ាទ្រីស **A** ។

$$\text{col}(\mathbf{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_n r_n \right\}$$

ដែល $r_i, i = 1, \cdots, n$ ជាវ៉ិចទ័រជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស **A** ហើយ c_i ជាស្កាលែរ។

គេអោយម៉ាទ្រីស៖ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ ។ តើ $[5, 17, -20] \in \text{col}(\mathbf{A})$? ពិនិត្យ

$$[5, 17, -20] = c_1[3, 1, -2] + c_2[4, 0, 1] + c_3[-2, 4, -3]$$

រួចដោះស្រាយរក c_1, c_2 និង c_3? Ans. $c_1 = 5$, $c_2 = -1$ និង $c_3 = 3$

សមមូលជួរដេកកំណត់បានលំហជួរដេក

ទ្រឹស្តីបទ ៧

បើម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ សមមូលជួរដេកនឹងគ្នា នោះគេបាន លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ស្មើនឹងលំហជួរដេករបស់ $\mathbf{B}$ ។

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 & 33 & 19 \\ 3 & 6 & -4 & -25 & -11 \\ 1 & 2 & -2 & -11 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

គេបានទម្រង់ RREF របស់ $\mathbf{A}$ គឺ៖ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ដូច្នេះ លំហជួរដេករបស់ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ស្មើគ្នា។

ម៉ាទ្រីសច្រាស

គេតាង $\mathbf{A}^{-1}$ ហៅថា ច្រាស របស់ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ មានលំដាប់ $n \times n$។ គេបាន៖

- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{B}$ ជាចម្រាសរបស់ $\mathbf{A}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$។
- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីស singular លុះត្រាតែ វាគ្មានចម្រាស។ $\mathbf{A}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ វាមានចម្រាស។
- បើ $\mathbf{B}$ និង $\mathbf{C}$ ជាចម្រាសពីររបស់ម៉ាទ្រីសការ $\mathbf{A}$ នោះគេបាន $\mathbf{B} = \mathbf{C}$។
- បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ នោះគេបាន៖

$$\text{គ្រប់ } k \geq 2, \mathbf{A}^{-k} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$$

វិធីសាស្ត្ររកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសមួយ

យក **A** ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។

(1) **Step 1:** សរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ ។

(2) **Step 2:** បម្លែងម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ អោយចូលទម្រង់ RREF ។

(3) **Step 3:** បើ n ជួរឈរដំបូងរបស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ មិនអាចបម្លែងទៅជាម៉ាទ្រីស $\mathbf{I}_n$ បានទេ នោះគេថា ម៉ាទ្រីស **A** គ្មានចម្រាស់ (singular) ។

(4) **Step 4:** ផ្ទុយមកវិញ ម៉ាទ្រីស **A** មានចម្រាស (nonsingular)។ ដូច្នេះ ជួរឈរចំនួន n ចុងក្រោយរបស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែមក្នុងទម្រង់ RREF គឺជាម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}^{-1}$។ i.e., ម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ បង្រួមជួរដេកទៅរក $[\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}]$ ។

ចូររកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -4 & 12 & -9 \\ 2 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

Cont...

គេបានម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×6 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -9 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ហើយម៉ាទ្រីស RREF របស់វា គឺ៖

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

គេបាន ចម្រាស់របស់ **A** :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3$?

លក្ខណៈរបស់ម៉ាទ្រីសច្រាស

យក $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស លំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន៖

(i) $\mathbf{A}^{-1}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}^{k}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{k}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k} = \mathbf{A}^{-k}$, គ្រប់ចំនួនគត់ k

(iii) $\mathbf{AB}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(iv) $\mathbf{A}^{T}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$

(v) បើ s និង t ជាចំនួនគត់ គេបាន

$$\mathbf{A}^{s+t} = \left(\mathbf{A}^{s}\right)\left(\mathbf{A}^{t}\right)$$

$$\left(\mathbf{A}^{s}\right)^{t} = \mathbf{A}^{st} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{s}$$

ទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់២)

ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *មានចម្រាសលុះត្រាតែ* $\delta = ad - bc \neq 0$ ។ *គេបាន*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(សម្រាយ. ប្រើម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_2]$)

ទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទ ៩

1. *ម៉ាទ្រីសការេ* $\mathbf{A}$ *លំដាប់* $n \times n$ *ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ ។
2. *គេអោយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *ដែលម៉ាទ្រីសមេគុណ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីសការេ។ គេបាន៖*
   1. *បើ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីស nonsingular នោះប្រព័ន្ធនេះមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ៖*
   $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
   2. *បើ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីស singular នោះប្រព័ន្ធនេះ អាចគ្មានចម្លើយ ឬមានចម្លើយរាប់មិនអស់។*

គេអោយប្រព័ន្ធ 3×3៖

$$\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{មានន័យថា} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

Cont...

ដោយម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ គេបាន $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$។ ដូច្នេះ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ដេរីវេ
និង
ការអនុវត្តរបស់វា
(Part 1)

ដេរីវេត្រង់ចំនុចមួយ

ដេរីវេ $f'(x_0)$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅត្រង់ $x=x_0$ (បើមាន)កំណត់ដោយ

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ ។

បើគេតាង $x-x_0=h$ ឬ $x=x_0+h$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

ឧ. រកដេរីវេនៃអនុគ $y=f(x)=2x^3+x-1$ ត្រង់ចំនុ $x_0=0$

$$f(x)-f(x_0)=f(x)-f(0)=2x^3+x-1-(-1)=2x^3+x=x(2x^2+1)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x(2x^2+1)}{x}=2x^2+1$$

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}(2x^2+1)=1$$

ដេរីវេឆ្វេង និងស្តាំ

ដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនុច x_0 ខាងឆ្វេង

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

ដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនុច x_0 ខាងស្តាំ

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

f មានដេរីវេត្រង់ x_0 $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$

ដេរីវេឆ្វេង និងស្តាំ

ឧ.៖ សិក្សាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ត្រង់ $x_0=0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ឧ. ៖ រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x_0=1$

បើ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{បើ } x \neq 1 \\ a & \text{បើ } =1 \end{cases}$$

ដេរីវេឆ្វេង និងស្តាំ

ឧ. សិក្សាដេរីវេអនុគមន៍ត្រង់ចំនុច $x_0=1$

$$f(x)=\frac{x^2+|x+1|}{x}$$ បើ

ឧ. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍

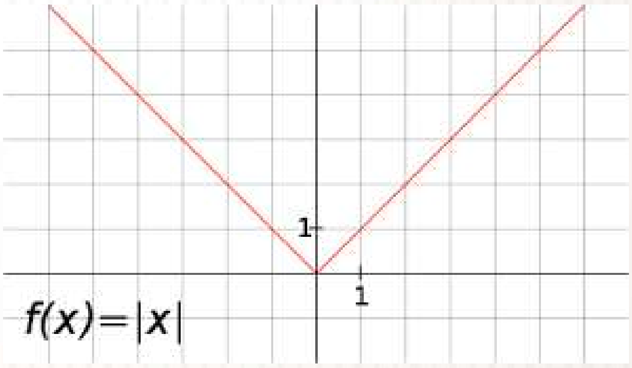
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & \text{បើ } x>1 \\ 2x+2 & \text{បើ } x\le 1 \end{cases}$$

ដេរីវេនិងភាពជាប់

បើ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះ f ជាប់ត្រង់ x_0 ប៉ុន្តែ ច្រាស់មក វិញមិនពិតជាទូទៅឡើយ ។

ឧ. អនុគមន៍ $f(x)=|x|$ ជាប់ត្រង់ $x_0=0$ តែមិនមានដេរីវេ

ត្រង់ $x_0=0$ ឡើយ ។



ដេរីវេនៅលើចន្លោះមួយ

- អនុគមន៍ y=f(x) មានដេរីវេនៅលើចន្លោះបើក (a,b) កាល បើវាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុចលើចន្លោះបើកនោះ
- អនុគមន៍ y=f(x) មានដេរីវេនៅលើចន្លោះបិទ [a,b] កាល បើវាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុចលើចន្លោះបើក (a,b) និង មានដេរីវេត្រង់ ចំនុច x=a និង x=b ។

<u>ចំណាំ</u>

នៅពេលគេនិយាយថាអនុគមន៍ y=f(x) មានដេរីវេ ប៉ុន្តែមិនបានបញ្ជាក់ច្បាស់ថា នៅលើចន្លោះណា នោះមានន័យថា វាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុចនៅក្នុងដែនកំណត់របស់វា

ដេរីវេនៃអនុគមន៍មួយចំនួន

$$(C)' = 0 \quad ; \quad (x)' = 1$$

$$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \Rightarrow (u^n)' = n.u^{n-1}.u' \quad , (n \in \mathbb{N} , n \geq 2)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , (x>0) \Rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad , (u>0)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow (\sin u)' = u'.\cos u$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \Rightarrow (\cos u)' = -u'.\sin u$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} .$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
2. $y = -x^3 + 3x + 1$
3. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^2 + 1$
4. $y = -2x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 + 1$
5. $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$
6. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$

គណនាលីមីតតាមដេរីវេ

ឧ. គណនាលីមីតដូចខាងក្រោម

1. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$
2. $B = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1}$
3. $C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+3x} - 1}{x}$
4. $D = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x + x^2}$

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} \qquad f(0) = 1$$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -\frac{1}{3}.$$

គណនាលីមីតតាមដេរីវេ

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{3x-2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3.\sqrt[3]{(2x-1)^2}}-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

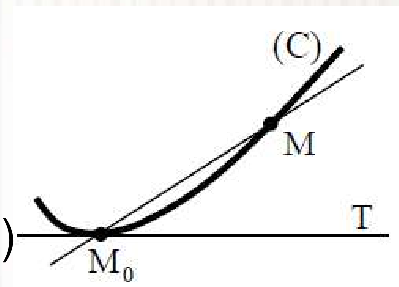
$$f(1)=0$$

$$B=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}.\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}.\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\frac{1}{2}.f'(1)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{9}$$

1. អត្ថន័យក្ន**អត្ថន័យនៃដេរីវេ**
2. ងធរណីមាត្រ

a. បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងក្នុងប្លង់

គេឲ្យខ្សែកោង (C) និងចំនុចនឹង M_0 នៅលើខ្សែកោង និង M ជាចំនុចមួយចល័តលើ (C) ពេលនោះ M_0M ជាខ្នាត់មួយនៃខ្សែកោង (C)



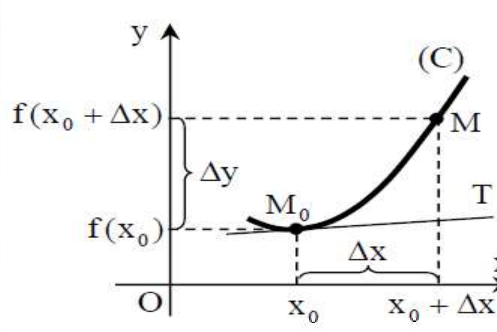
<u>និយមន័យ</u>

បើ M_0M មានទីតាំងលីមីត M_0T ពេលចំនុច M ផ្លាស់ទីលើ (C) ឆ្ពោះទៅរក M_0 នោះបន្ទាត់ M_0T ហៅថាជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ M_0 ។ ចំនុច M_0 ហៅថាចំនុចប៉ះ ។

អត្ថន័យនៃដេរីវេ

b. អត្ថន័យក្នុងធរណីមាត្រ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ y=f(x) ត្រង់ចំនុចx_0គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុច $M_0(x_0,f(x_0)$ និងសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺជាសមីការៈ



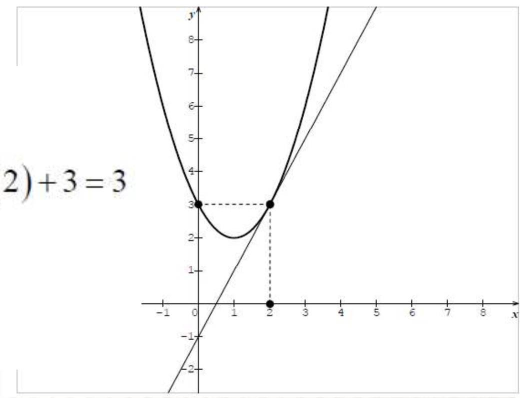
$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

ឬ

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

អត្ថន័យនៃដេរីវេ

ឧទាហរណ៍ រកសមីការបន្ទាត់(T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង$(c): y=x^2-2x+3$ ត្រង់ចំណុច $x_0=2$ ។



តាមរូបមន្ត $(T): y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

ឬ $(T): y-f(2)=f'(2)(x-2)$ ដោយ $f(2)=2^2-2(2)+3=3$

ហើយ $f'(x)=2x-2$ នោះ $f'(2)=2(2)-2=2$ ។

ដូចនេះ $(T): y-3=2(x-2)$ ឬ $(T): y=2x-1$ ។

អត្ថន័យនៃដេរីវេ

2. អត្ថន័យក្នុងរូបវិទ្យា

ក)ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t)=S'(t)=\frac{dS}{dt}$

ដែល $s(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

ខ)សម្ទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t)=\frac{dV}{dt}=V'(t)$ ដែល $V(t)$

ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

អត្ថន័យនៃដេរីវេ

ឧទាហរណ៍១

ចំណុច M មួយផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតចេញពីគល់អក្ស ។

ចំណុច M មានចម្ងាយចរ $S(t)=\frac{1}{2}t^2+4t\ \ (m)$

នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក ។ រកល្បឿនចំណុច M ចំពោះ $t=2s$

តាង $V(t)$ ជាល្បឿននៃចំណុច M នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក

គេបាន $V(t)=\frac{dS}{dt}=S'(t)=t+4$

ចំពោះ $t=2s$ នោះ $V(2)=6\ m/s$ ។

អត្ថន័យនៃដេរីវេ

ឧទាហរណ៍២

គេទំលាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះដែលខណៈ

ពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $S(t)=\frac{10}{3}t^2$

កំណត់ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t=6s$?

ដំណោះស្រាយ

តាង $V(t)$ ជាល្បឿននៃចំណុច M នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក

គេបាន $V(t)=\frac{dS}{dt}=S'(t)=\frac{20t}{3}$ នោះ $V(6)=40\ m/s$ ។

ដេរីវេ
និង
ការអនុវត្តរបស់វា
(Part 2)

ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

អនុគមន៍នៃអនុគមន៍

ប្រសិនបើគេមានអនុគមន៍ពីរ f(x) និង g(x) ពេលនោះ
អនុគមន៍ y=f[g(x)] ហៅថា អនុគមន៍នៃអនុគមន៍ ឬហៅថាជាអនុគមន៍បណ្តាក់ ។

ឧ. $y=\cos x^2$ ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍

បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$ នោះ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ ឬ

$\frac{d}{dx}f[u(x)]=f'(u)\times u'(x)$ ។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

២. Suppose we want to differentiate $y = \cos x^2$.

Let $u = x^2$ so that $y = \cos u$.

It follows immediately that

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \frac{dy}{du} = -\sin u$$

The chain rule says

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

and so

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\sin u \times 2x \\ &= -2x \sin x^2\end{aligned}$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

1. Find the derivative of each of the following:

a) $(3x-7)^{12}$ b) $\sin(5x+2)$ c) $\ln(2x-1)$ d) e^{2-3x}

e) $\sqrt{5x-3}$ f) $(6x+5)^{5/3}$ g) $\dfrac{1}{(3-x)^4}$ h) $\cos(1-4x)$

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍

ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់តាងដោយ y'' ឬ $f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ។

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេទីនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត។ គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី 1 ទី 2 ទី $3,\dots,$ ទី n គេតាងដោយ $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ ។

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេទី១ $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = f^{(1)}(x)$

ដេរីវេទី២ $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x)$

ដេរីវេទី៣ $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = f^{(3)}(x)$

ដេរីវេទី៤ $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x)$

....

ដេរីវេទី n $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ឧ. រកដេរីវេលំដាប់៤នៃអនុគមន៍ y=e^{3x} ត្រង់ x=2
ឧ. រកដេរីវេទី៥ នៃអនុគមន៍ y= sin(4x+1) ត្រង់ x=1

$$f'(x) = 3e^{3x}$$
$$f''(x) = f^{(2)}(x) = 9e^{3x}$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 27e^{3x}$$
$$f^{(4)}(x) = 81e^{3x}, \text{ and } f^{(4)}(2) = 81e^{6}.$$

$$f'(x) = 4\cos(4x+1)$$
$$f^{(2)}(x) = 4^2\cos(4x+1)$$
$$f^{(3)}(x) = 4^3\cos(4x+1)$$
$$f^{(4)}(x) = 4^4\cos(4x+1)$$
$$f^{(5)}(x) = 4^5\cos(4x+1),$$
$$\text{and } f^{(5)}(1) = 4^5\sin 5.$$

fppt.com

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

- រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍

ដើម្បីរកដេរីវេទី n (n∈IN) នៃអនុគមន៍ f គេត្រូវគណនាដេរីវេជាបន្តបន្ទាប់ រួចរកទម្រង់ទូទៅរបស់វាឲ្យឃើញ និងទាញសន្និដ្ឋានទម្រង់ទូទៅ តាមរយៈការស្រាយតាមកំនើនគណិតវិទ្យា

ឧ. រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍

a. y=sinx b. y=x^n

fppt.com


ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់
ករណីពិសេស រកដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃអនុគមន៍ផលគុណ គេប្រើរូបមន្ត ត្រីកោណ Pascal ចំពោះមេគុណ
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
២. រកដេរីវេទី៥នៃអនុគមន៍ y= x³cosx
fppt.com

ដេរីវេ ភាគ៣

ការអនុវត្តន៍នៃដេរីវេ លើការសិក្សាអនុគមន៍ និងរកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមា

សិក្សាសញ្ញាតាមក្បួនពស់

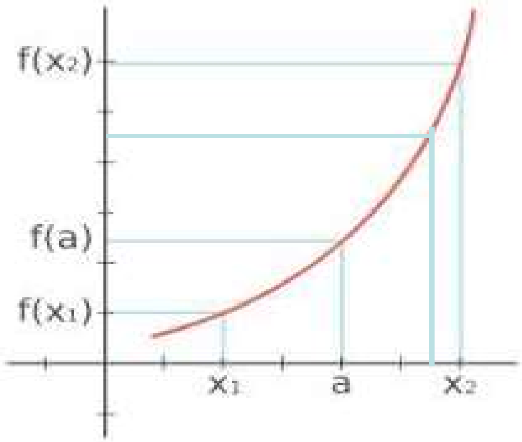
$$(x-a)^n(x-b)^m(x-c)^q.......>0$$

$$(a-x)^n(x-b)^m(c-x)^q.......<0$$

ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍កើន

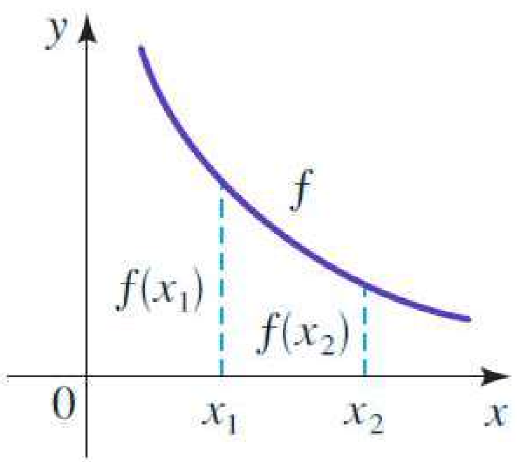
- លក្ខណៈអនុគមន៍កើន បើ $a,b\in I$ ដែល $a<b$ នាំឲ្យ $f(a)<f(b)$ ។
- f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$ ។



ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍ចុះ

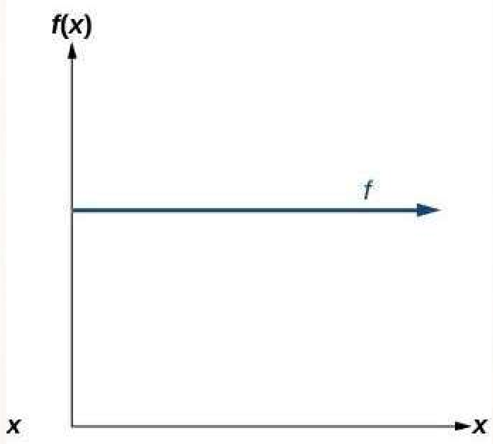
- លក្ខណៈអនុគមន៍ចុះ បើ $a,b\in I$ ដែល $a<b$ នាំឲ្យ $f(a)>f(b)$ ។
- f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$ ។



អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

អនុគមន៍ថេរ

- លក្ខណៈអនុគមន៍ថេរបើ $a,b \in I$ ដែល $a<b$ នាំឲ្យ $f(a)=f(b)$ ។
- f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)=0$ គ្រប់ $x \in I$ ។



អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

វិធីសាស្ត្រសិក្សាភាពកើន ចុះ នៃអនុគមន៍

- រកដែនកំណត់
- រកដេរីវេនៃអនុគមន៍រួចដោះស្រាយសមីការ $f'(x)=0$
- សង់តារាងអថេរភាពតាមឫសសមីការខាងលើ
- តាមរយៈតារាង គេសន្និដ្ឋានភាពកើន និងចុះនៃអនុគមន៍

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ឧ. សិក្សាភាពកើនឬចុះនៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម

a. $y=x^3-3x^2+2$ b. $y=-x^3+3x^2-3x+2$ c. $y=x^3+2x$

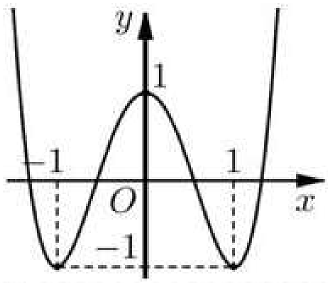
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\boxed{-\infty}$	$\nearrow$	$y(0)$	$\searrow$	$y(2)$	$\nearrow$	$\boxed{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(\boxed{x^3}-3x^2+2\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(\boxed{x^3}-3x^2+2\right)=-\infty$$

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ឧ. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$
មានក្រាហ្វដូចខាង ក្រោម ។ ចូរគណនា f(2)



$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$$

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ឧ. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ មានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម ៖

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$a-b+c-1$	↘	-24	↗	$+\infty$

គណនាកន្សោម $P=a+b+3c$

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

បរមាធៀប ៖

- ✧ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$
- ✧ $f(x_0)=M$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។
- ✧ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$
- ✧ $f(x_0)=m$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

ឧ. រកបរមានៃអនុគមន៍

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$+\infty$

$y''(-1) = -12 < 0$ $\quad$ $y''(3) = 12 > 0$

fppt.com

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

fppt.com

អាំងតេក្រាល

ហាំ ការឹម

RUPP
Department of Mathematics

មាតិការសម្រាប់សប្ដាហ៍នេះ

1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
2. វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

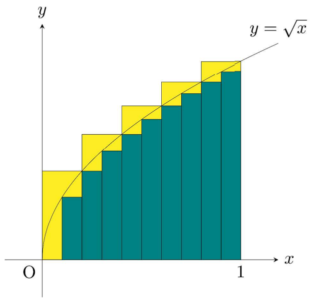
1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
2. វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល
3. Definite Integrals

ទិដ្ឋភាពទូទៅ

- សមិទ្ធិកម្មដ៏អស្ចារ្យរបស់ធរណីមាត្របែបក្លាស៊ីក គឺការកំណត់បានរូបមន្តសម្រាប់គណនា ក្រឡាផ្ទៃនិងមាឌ របស់ត្រីកោណ ស្វ៊ែរ និងកោន។
- ការគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់រូបធរណីមាត្រងាយៗ ដូចជា ចតុកោណកែង ពហុកោណ និងរង្វង់ ត្រូវបានពិពណ៌នានៅក្នុងឯកសារគណិតវិទ្យាដែលគេស្គាល់ថាមានចំណាស់ជាងគេ។ ចំណែកលោក Archimedes បានសិក្សាទៅលើសពីកម្រិតគណនាបឋមនេះទៅទៀត។ យោងលើតិចនិករបស់គាត់ យើងអាចគណនាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល និង វង់ (spirals) បាន។
- នៅដើមសតវត្សទី 18 គណិតវិទូជាច្រើនបានសិក្សាការគណនាក្រឡាផ្ទៃបែបនេះ តាមរបៀបសាមញ្ញជាងដោយប្រើលីមីត តែវិធីទាំងនេះនៅតែខ្វះភាពទូទៅ។
- របកគំហើញដ៏សំខាន់ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទក្រឡាផ្ទៃ ត្រូវបានធ្វើឡើងតែឯងដាច់ពីគ្នា ដោយលោក Newton និង Leibniz នៅពេលដែលពួកគេបានដឹងថាផ្ទៃដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង **អាចគណនាបានដោយរកចម្រាសរបស់ដេរីវេ។** របកគំហើញនេះ បានចាប់ផ្តើមអោយមានការសិក្សាមុខវិជ្ជាគណិតវិភាគ ដែលចេញផ្សាយដោយលោក Newton ក្នុងឆ្នាំ 1669 និងសិក្សាដាច់តែឯងដោយលោក Leibniz ប្រហែលឆ្នាំ 1678។

Cont...

- អាំងតេក្រាលកំណត់ គឺជាឧបករណ៍សំខាន់សម្រាប់មុខវិជ្ជាគណិតគណនា។ គេប្រើវាសម្រាប់កំណត់និងគណនាផ្ទៃក្រឡា និងមាឌរបស់រូបធរណីមាត្រផ្សេងៗ។ យើងក៏ប្រើវាដើម្បីគណនាបរិមាណខ្លះទៀត ដូចជា៖ ប្រវែងខ្សែកោង ប្រូបាប៊ីលីតេ មធ្យមភាគ ការប្រើប្រាស់ថាមពល ម៉ាស់របស់វត្ថុ និងកម្លាំងទប់ទល់នឹងទ្វារទំនប់ទឹក ជាដើម។



វត្ថុបំណងសម្រាប់ការបង្រៀននេះ

- រៀននិយមន័យរបស់ព្រីមីទីវ
- រៀននិយមន័យរបស់អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងវិធីសាស្រ្តគណនា

ព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយ

និយមន័យ ១

អនុគមន៍ F គឺជា **ព្រីមីទីវ** (primitive) ឬ **ចម្រាសដេរីវេ** (antiderivative) របស់ f កំណត់លើចន្លោះ I បើ

$$F'(x) = f(x)$$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅក្នុង I ។

- ដំណើរក្នុងការរកអនុគមន៍ $F(x)$ ចេញពីដេរីវេរបស់វា $f(x)$ ហៅថា **antidifferentiation** ។
- អក្សរធំ F តាងអោយព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ f, G តាងអោយព្រីមីទីវរបស់ g ។ល។
- បើ F ជាព្រីមីទីវរបស់ f លើចន្លោះ I នោះគេបាន ទម្រង់ព្រីមីទីវទូទៅបំផុតរបស់ f លើ I គឺ $F(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

អនុវត្តន៍.

ចូររកព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$

Cont...

លក្ខណៈនៃព្រីមីទីវ

- **លក្ខខណ្ឌអត្ថិភាពរបស់ព្រីមីទីវ៖** គ្រប់អនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ I មានព្រីមីទីវលើចន្លោះ I ។

អនុវត្តន៍. យក f, g, h និង u ជាអនុគមន៍កំណត់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x) = x^3 - 1; \quad g(x) = \frac{1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x}; \quad u(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

តើអនុគមន៍ណាមានព្រីមីទីវលើ $\mathbb{R}$?

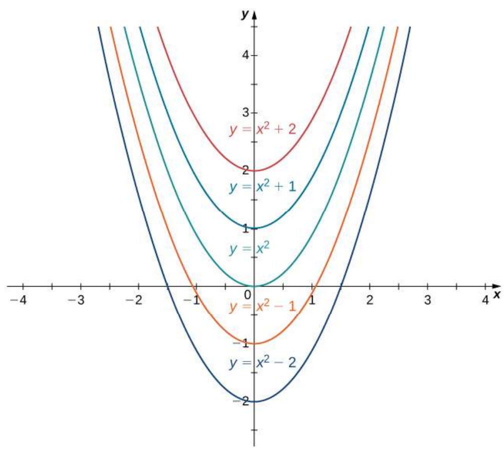
- **សំណុំព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយ៖** យក f ជាប់មានព្រីមីទីវ F កំណត់លើចន្លោះ I មួយ។ ដូច្នេះ គ្រប់ព្រីមីទីវរបស់ f កំណត់លើ I មានទម្រង់៖ $x \mapsto F(x) + C$ ដែល C ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។

អនុវត្តន៍. យក f និង F ជាអនុគមន៍កំណត់ពីរ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ :

$$f(x) = x^2 - x \quad \text{និង} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

បញ្ជាក់ថា F ជាព្រីមីទីវរបស់ f លើ $\mathbb{R}$ រួចរកព្រីមីទីវពីរផ្សេងទៀតរបស់ f គឺ៖ G និង H កំណត់លើ $\mathbb{R}$។

Cont...



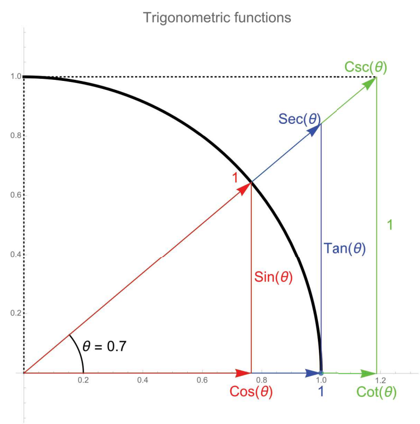
រូបមន្តព្រីមីទីវ

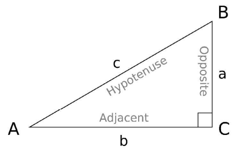
យក k ជាចំនួនថេរមិនសូន្យ

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវទូទៅ
1. x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C, n\neq -1$
2. $\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx+C$
3. $\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx+C$
4. $\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx+C$
5. $\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx+C$
6. $\sec kx\tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx+C$
7. $\csc kx\cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx+C$

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវទូទៅ
8. e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}+C$
9. $\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C, \quad x\neq 0$
10. $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\arcsin kx+C$
11. $\frac{1}{1+k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\arctan kx+C$
12. $\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec} kx+C, \quad kx>1$
13. a^{kx}	$\left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx}+C, a>0, a\neq 1$

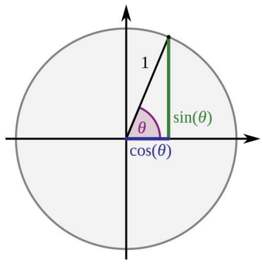
រំលឹកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ





រំលឹកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ

អនុគមន៍	ការពណ៌នា	ប្រើ radians	ប្រើ degrees
sine	$\frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\csc\theta}$	$\sin x = \cos\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\csc x}$
cosine	$\frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sec\theta}$	$\cos x = \sin\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\sec x}$
tangent	$\frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cot\theta}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \cot\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\cot x}$
cotangent	$\frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \tan\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
secant	$\frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\theta}$	$\sec x = \csc\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\cos x}$
cosecant	$\frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sin\theta}$	$\csc x = \sec\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\sin x}$



លំហាត់ផ្ទះបញ្ជាំង

ចូរឆ្លើយ ត្រូវ ឬ ខុស ចំពោះអំណះអំណាងខាងក្រោម៖

No.	អំណះអំណាង	ចម្លើយ
1.	ព្រីមីទីវមួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ របស់អនុគមន៍កំណត់ដោយ : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	
2.	ព្រីមីទីវមួយកំណត់លើ $]0; +\infty[$ របស់អនុគមន៍កំណត់ដោយ $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ដែលមានតម្លៃ $-\frac{1}{2}$ ត្រង់ 1 គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
3.	ព្រីមីទីវនៅលើចន្លោះ I របស់អនុគមន៍ $u'v + uv'$ គឺជាអនុគមន៍ $u \times v$	

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

និយមន័យ ២

បណ្តុំនៃព្រីមីទីវទាំងអស់របស់ f ហៅថា **អាំងតេក្រាលមិនកំណត់** របស់ f ធៀបនឹងអថេរ x ។ គេតាងវាដោយ

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- $\int$: ហៅសញ្ញាអាំងតេក្រាល
- $f(x)$: តួអាំងតេក្រាល
- $\mathrm{d}x$: ឌីផេរ៉ង់ស្យែលរបស់អថេរ x
- x : អថេររបស់អាំងតេក្រាល
- C : ចំនួនថេររបស់អាំងតេក្រាល

បើព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយលើចន្លោះ I កំណត់បាន នោះគេថា អនុគមន៍នេះមានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ I នោះ។

អនុវត្តន៍.

ពិនិត្យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \ln|x| + e^{2x} + C$$

Example

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = \cos x$។ តើគេអាចរកអនុគមន៍ $F(x)$ បានទេ ដែល $F'(x) = f(x)$?

- បើគេយក $F(x) = \sin x + C$ នោះ វាពិត ព្រោះ
$$f(x) = F'(x) = (\sin x + C)'$$
- យក $\cos x = F'(x)$ ជំនួសត្រង់ $f(x)$ គេបាន
$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \int F'(x) \, \mathrm{d}x$$
- គេទទួលបាន ព្រីមីទីវ $F(x)$ និងចំនួនថេរអាំងតេក្រាល C ៖
$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = F(x) + C = \sin x + C$$

វិធានអាំងតេក្រាល

១. **វិធានចំនួនថេរ.** បើ $k \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\int k \, \mathrm{d}x = kx + C$$
២. **វិធានផលបូក-ផលដក.** យក F និង G ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង g រៀងគ្នា។
$$\int f(x) \pm g(x) \, \mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C$$
៣. **វិធានផលគុណនឹងស្កាលែរ.** យក F ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង កំណត់ $k \in \mathbb{R}$:
$$\int kf(x) \, \mathrm{d}x = kF(x) + C$$
៤. **វិធានស្វ័យគុណ.** ចំពោះចំនួនពិត n ដែល $n \neq 1$ គេបាន
$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

រូបមន្តអាំងតេក្រាល

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
1	$x + C$
$x^n, n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\csc^2 x$	$-\cot x + C$

រូបមន្តអាំងតេក្រាល

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$
e^x	$e^x + C$
$b^x,\ b > 0$	$\dfrac{b^x}{\ln b} + C$
$\dfrac{1}{x \ln b}$	$\log_b x + C$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនាអាំងតេក្រាល $\int 2x^3 + 3x^2 - x \, dx$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int 2x^3 + 3x^2 - x \, dx &= 2\int x^3 \, dx + 3\int \frac{1}{x^2} \, dx - \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) - \ln x + C \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{3}{x} - \ln x + C\end{aligned}$$

Cont....

(ii) គណនា $\int 6x^4 - 9x^2 - \sqrt{x} \, dx$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int 6x^4 - 9x^2 - \sqrt{x} \, dx &= \int 6x^4 \, dx - \int 9x^2 \, dx - \int x^{1/2} \, dx \\ &= 6\int x^4 \, dx - 9\int x^2 \, dx - \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{6}{5}x^5 - \frac{9}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + C\end{aligned}$$

Cont....

(iii) គណនា $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3+2}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x &= \int 5x^{4/3}+2x^{-5/3}\,\mathrm{d}x\\ &= 5\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{-5/3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Cont...

(iv) គណនា $\displaystyle\int 3\csc x\cot x - 7\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int 3\csc x\cot x - 7\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= 3\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x - 7\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -3\csc x - 7\tan x + C\end{aligned}$$

Cont...

(v) គណនា $\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= 3\int \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta\,\mathrm{d}\theta - 4\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 3\int \sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta - 4\int\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 3\sec\theta - 4\sin\theta + C\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

A. ពីលំហាត់ 1-6 ចូររកព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍

(1) $f(x) = 1 - 3x^2 - 6x$
(2) $f(x) = x - x^{\frac{2}{3}}$
(3) $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{5}}$
(4) $f(x) = \cos x - x$
(5) $f(x) = x^5 - 7x^2 + 2$
(6) $f(x) = e^{-2x} + e^x$

B. ពីលំហាត់ 7-12 ចូរគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

(7) $\int 2 + \sqrt{5}\,\mathrm{d}x$
(8) $\int 2(x-3)^3\,\mathrm{d}x$
(9) $\int x^2 x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$
(10) $\int x + \frac{1}{x^4\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
(11) $\int \cos x + 2\sin x\,\mathrm{d}x$
(12) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

C. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$

D. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ របស់អនុគមន៍ $f(x) = 2e^{2x} + x - 2$ ដែល $F(0) = 5$។

វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល

1. វិធីសាស្ត្រជំនួស - chain rule

- ចំពោះអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល f និង g គេបាន

$$\int f\big[g(x)\big]\, g'(x)\, \mathrm{d}x = F\big[g(x)\big] + C$$

ដែល F ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង C ជាចំនួនថេរ ។

- ឬ តាង $u = g(x)$ គេបាន $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ ។ គេបាន

$$\int f\big[g(x)\big]\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(u)\, \mathrm{d}u = F(u) + C$$

អនុវត្តន៍. (i) គណនា

$$\int 36x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = 6x^3 + 5$ នោះ $\mathrm{d}u = 18x^2$

(ii) គណនា

$$\int \frac{2t^3+1}{t^4+2t^7}\,\mathrm{d}x$$

តាង $g(t) = t^4 + 2t$ នោះ $g'(t) = 4t^3 + 2$

Cont...

(iii) គណនា

$$\int x^5\left(x^2-1\right)^{12} 2\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = x^2 - 1$ នោះ $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ ហើយ $x^2 = u + 1$

(iv) គណនា

$$\int \sin 2x\sqrt{2-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = 2 - \cos 2x$ នោះ $\mathrm{d}u = 2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(v) គណនា

$$\int (\tan 2x + \cot 2x)^2\,\mathrm{d}x$$

លំហាត់

1. $\int 7x\left(2x^2+1\right)^6\,dx$
2. $\int y\csc 3y^2\cot 3y^2\,dy$
3. $\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}$
4. $\int \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\sin 3x}}dx$
5. $\int \dfrac{2r}{(1-r)^7}dr$
6. $\int \dfrac{x\left(3x^2+1\right)\,dx}{(3x^4+2x^2+1)^4}$

2. វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

- ចំពោះអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយប្រើដេរីវេផលគុណ គេបាន៖
$$\frac{d}{dx}f(x)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
អនុវត្តអាំងតេក្រាលលើសមីការខាងលើ គេបាន
$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$
ដូច្នេះ
$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx.$$
- តាង $u=f(x)$ និង $v=g(x)$ នោះ $\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x$ និង $\mathrm{d}v=g'(x)\,\mathrm{d}x$
$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនា $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

តាង $u = \ln x$ នោះ $\mathrm{d}u = 1/x \, \mathrm{d}x$ ហើយយក $\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x$ នោះ $v = x^2/2$

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

Cont...

(ii) គណនា $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

តាង $u = x^2$ និង $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$ នោះ $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$ ហើយ $v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Tabular Method

- អាំងតេក្រាលរបស់អនុគមន៍ខ្លះ ត្រូវការវិធីសាស្ត្រដោយផ្នែកច្រើនដង ទើបអាចទទួលបានចម្លើយ។
- គេអាចប្រើតារាង ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកខាងលើ ។

sign	D	I
$+$	u	$\mathrm{d}v$
$-$	u'	$\int \mathrm{d}v = v$
$+$	u''	$\int v$
$-$	u'''	$\int(\int v)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pm$	0	$\int(\cdots(\int v)\cdots)$

ដូច្នេះ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - u'\int v\,\mathrm{d}x + u''\int\left(\int v\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x - \cdots$$

- គេប្រើតារាងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក នៅពេលណាមានតួអាំងតេក្រាលជាផលគុណរវាងអនុគមន៍ពហុធា និងអនុគមន៍ដែលអាចធ្វើអាំងតេក្រាលបាន ម្តងហើយម្តងទៀត ដូចជា e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ ។ល។

អនុវត្តន៍.

ក្នុងអនុវត្តន៍ (ii) ខាងលើ គេបានតារាង

u	$\mathrm{d}v$
x^2	$\sin x$
$-2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

ដូច្នេះ

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

សម្គាល់.

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការតាង u និង $\mathrm{d}v$ គេជ្រើសយកអនុគមន៍ទី១ ស្មើ u អាស្រ័យតាមលំដាប់លំដោយក្នុងទម្រង់ ‘ILATE” ដែល៖

- I = Inverse trigonometric function
- L = Logarithmic function
- A = Algebraic function (ពហុធា ...)
- T = Trigonometric function
- E = Exponential function

លំហាត់.

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

១. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

២. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

៣. $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

៤. $\displaystyle\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

៥. $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

៦. $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

៧. $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

៨. $\displaystyle\int xe^{x}\,\mathrm{d}x$

៩. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

3. វិធីសាស្ត្រប្រភាគដោយផ្នែក (partial fractions)

- អនុគមន៍សនិទាន គឺជាសមាមាត្រនៃពហុធាពីរ ក្រោមទម្រង់ $p(x)/q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ គឺជាពហុធាអថេរ x ហើយ $q(x)\neq 0$ ។
- បើ ដឺក្រេ $p(x) >$ ដឺក្រេ $q(x)$ នោះគេចែក $p(x)$ នឹង $q(x)$ គេបាន

$$p(x)/q(x) = t(x) + h(x)/q(x)$$

ដែល $t(x)$ ជាពហុធាអថេរ x មានដឺក្រេតូចជាងដឺក្រេ $q(x)$ ។ ប្រភាគសនិទាន $h(x)/q(x)$ អាចសរសេរបានជាផលបូកនៃប្រភាគដោយផ្នែក តាមប្រភេទដូចខាងក្រោម៖

(i) $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}, a \neq b$

(ii) $\dfrac{mx+n}{(x-a)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2}$

(iii) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

(iv) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)^2(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \dfrac{C}{(x-b)}$

(v) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)\left(x^2+bx+c\right)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+c}{x^2+bx+c}$

ចំណាំ.

កត្តាក្នុង ភាគបែង	កន្សោមក្នុងបំណែក ប្រភាគដោយផ្នែក
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^k$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, k = 1, 2, \ldots$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^k$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}, k = 1, 2, \ldots$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

ដោយ $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ គេបានប្រភាគដោយផ្នែក៖

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

ចូររកតម្លៃ A និង B?

Cont...

(ii) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2\,(x^2+3)}\,dx$$

គេបានប្រភាគដោយផ្នែក៖

$$\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2\,(x^2+3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

ចូររកតម្លៃ A, B, C និង D?

Cont...

(iii) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx$$

គេបាន

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2}$$

ហើយ

$$\frac{18}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

លំហាត់

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

1. $\int \frac{4}{x^2 + 5x - 14} \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{8 - 3t}{10t^2 + 13t - 3} \mathrm{d}t$
3. $\int \frac{2 + w^4}{w^3 + 9w} \mathrm{d}w$
4. $\int \frac{3z^2 + 1}{(z+1)(z-5)^2} \mathrm{d}z$
5. $\int \frac{8}{3x^3 + 7x^2 + 4x} \mathrm{d}x$
6. $\int \frac{4x - 11}{x^3 - 9x^2} \mathrm{d}x$
7. $\int \frac{z^2 + 2z + 3}{(z-6)(z^2+4)} \mathrm{d}z$
8. $\int \frac{8 + t + 6t^2 - 12t^3}{(3t^2+4)(t^2+7)} \mathrm{d}t$
9. $\int \frac{6x^2 - 3x}{(x-2)(x+4)} \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{w^2+7w}{(w+2)(w-1)(w-4)} \mathrm{d}w$

4. Integrals Involving Roots

- ពេលណាតួអាំងតេក្រាលមានជាប់ឬស $\sqrt[n]{g(x)}$ នោះ គេតាង

$$u = \sqrt[n]{g(x)} \quad \Rightarrow \quad u^n = g(x)$$

ដើម្បីសម្រួលអាំងតេក្រាលចូលក្នុងទម្រង់ងាយ ដែលអាចគណនាបាន។

អនុវត្តន៍. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}} dx$$

តាង $u = \sqrt{x+10} \quad \Rightarrow \quad x = u^2 - 10$ និង $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ ។ ដូច្នេះ

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^2 - 10 - 3u}(2u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{4u}{u^2 - 3u - 10}\,\mathrm{d}u$$

គេមានប្រភាគដោយផ្នែក

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

អាំងតេក្រាល

ហាំ ការឹម

RUPP
Department of Mathematics

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
2. វិធីសាស្រ្តអាំងតេក្រាល

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

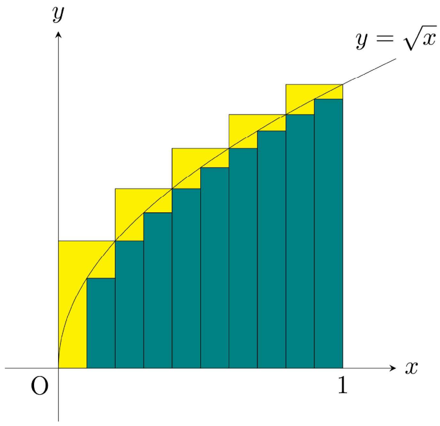
1. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
   - ព្រីមីទីវ (antiderivative)
   - អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
2. វិធីសាស្រ្តអាំងតេក្រាល
3. Definite Integrals

ទិដ្ឋភាពទូទៅ

- សមិទ្ធិកម្មដ៏អស្ចារ្យរបស់ធរណីមាត្របែបក្លាស៊ីក គឺការកំណត់បានរូបមន្តសម្រាប់គណនា ក្រឡាផ្ទៃនិងមាឌ របស់ត្រីកោណ ស្វ៊ែរ និងកោន។
- ការគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់រូបធរណីមាត្រងាយៗ ដូចជា ចតុកោណកែង ពហុកោណ និងរង្វង់ ត្រូវបានពិពណ៌នានៅក្នុងឯកសារគណិតវិទ្យាដែលគេស្គាល់ថាមានចំណាស់ជាងគេ។ ចំណែកលោក Archimedes បានសិក្សាទៅលើសពីកម្រិតគណនាបឋមនេះទៅទៀត។ យោងលើតិចទិករបស់គាត់ យើងអាចគណនាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល និងវង់ (spirals) បាន។
- នៅដើមសតវត្សទី 18 គណិតវិទូជាច្រើនបានសិក្សាការគណនាក្រឡាផ្ទៃបែបនេះ តាមរបៀបសាមញ្ញជាងដោយប្រើលីមីត តែវិធីទាំងនេះនៅតែខ្វះភាពទូទៅ។
- របកគំហើញដ៏សំខាន់ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទក្រឡាផ្ទៃ ត្រូវបានធ្វើឡើងតែឯងដាច់ពីគ្នា ដោយលោក Newton និង Leibniz នៅពេលដែលពួកគេបានដឹងថាផ្ទៃដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង អាចគណនាបានដោយរកចម្រាសរបស់ដេរីវេ។ របកគំហើញនេះ បានចាប់ផ្តើមអោយមានការសិក្សាមុខវិជ្ជាគណិតវិភាគ ដែលចេញផ្សាយដោយលោក Newton ក្នុងឆ្នាំ 1669 និងសិក្សាដាច់តែឯងដោយលោក Leibniz ប្រហែលឆ្នាំ 1678។

Cont...

- អាំងតេក្រាលកំណត់ គឺជាឧបករណ៍សំខាន់សម្រាប់មុខវិជ្ជាគណិតគណនា។ គេប្រើវាសម្រាប់កំណត់និងគណនាផ្ទៃក្រឡា និងមាឌរបស់រូបធរណីមាត្រផ្សេងៗ។ យើងក៏ប្រើវាដើម្បីគណនាបរិមាណខ្លះទៀត ដូចជា៖ ប្រវែងខ្សែកោង ប្រូបាប៊ីលីតេ មធ្យមភាគ ការប្រើប្រាស់ថាមពល ម៉ាស់របស់វត្ថុ និងកម្លាំងទប់ទល់នឹងទ្វារទំនប់ទឹក ជាដើម។



វត្ថុបំណងសម្រាប់ការបង្រៀននេះ

- រៀននិយមន័យរបស់ព្រីមីទីវ
- រៀននិយមន័យរបស់អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងវិធីសាស្ត្រគណនា

ព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយ

និយមន័យ ១

អនុគមន៍ F គឺជា **ព្រីមីទីវ** (primitive) ឬ **ចម្រាសដេរីវេ** (antiderivative) របស់ f កំណត់លើចន្លោះ I បើ

$$F'(x) = f(x)$$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅក្នុង I ។

- ដំណើរក្នុងការរកអនុគមន៍ $F(x)$ ចេញពីដេរីវេរបស់វា $f(x)$ ហៅថា **antidifferentiation** ។
- អក្សរធំ F តាងអោយព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ f, G តាងអោយព្រីមីទីវរបស់ g ។ល។
- បើ F ជាព្រីមីទីវរបស់ f លើចន្លោះ I នោះគេបាន ទម្រង់ព្រីមីទីវទូទៅបំផុតរបស់ f លើ I គឺ $F(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

អនុវត្តន៍.

ចូររកព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$

ទិដ្ឋភាពទូទៅ វត្ថុបំណង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល Definite Integrals

Cont...

HK Chapter 3

លក្ខណៈនៃព្រីមីទីវ

- **លក្ខខណ្ឌអត្ថិភាពរបស់ព្រីមីទីវ៖** គ្រប់អនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ I មានព្រីមីទីវលើចន្លោះ I ។

អនុវត្តន៍. យក f, g, h និង u ជាអនុគមន៍កំណត់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x) = x^3 - 1; \quad g(x) = \frac{1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x}; \quad u(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

តើអនុគមន៍ណាមានព្រីមីទីវលើ $\mathbb{R}$?

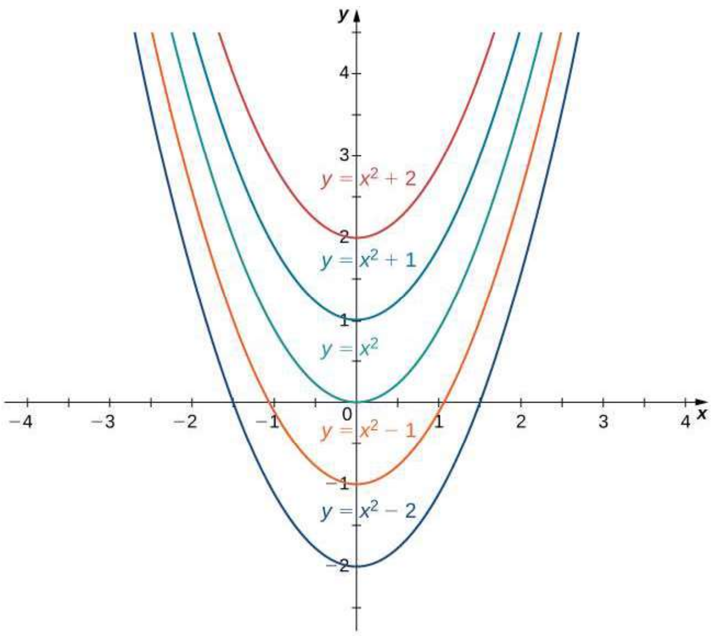
- **សំណុំព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយ៖** យក f ជាប់មានព្រីមីទីវ F កំណត់លើចន្លោះ I មួយ។ ដូច្នេះ គ្រប់ព្រីមីទីវរបស់ f កំណត់លើ I មានទម្រង់៖ $x \mapsto F(x) + C$ ដែល C ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។

អនុវត្តន៍. យក f និង F ជាអនុគមន៍កំណត់ពីរ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ :

$$f(x) = x^2 - x \quad \text{និង} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

បញ្ជាក់ថា F ជាព្រីមីទីវរបស់ f លើ $\mathbb{R}$ រួចរកព្រីមីទីវពីរផ្សេងទៀតរបស់ f គឺ៖ G និង H កំណត់លើ $\mathbb{R}$។

Cont...



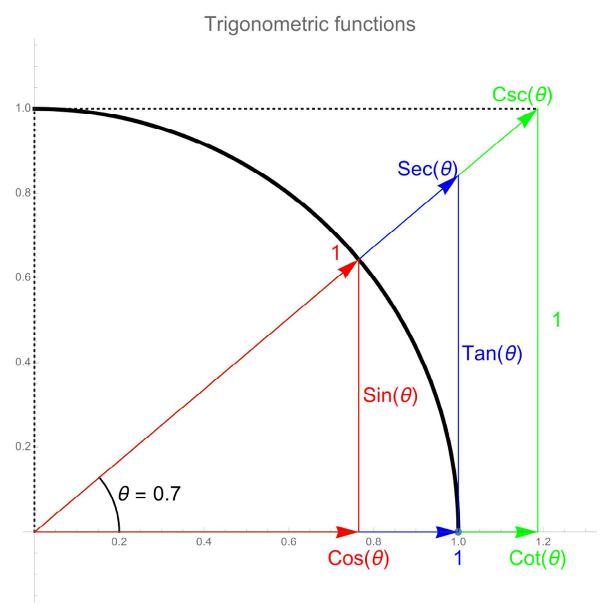
រូបមន្តព្រីមីទីវ

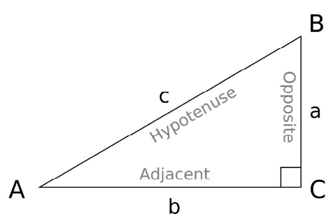
យក k ជាចំនួនថេរមិនសូន្យ

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវទូទៅ
1. x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C, n\neq -1$
2. $\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx+C$
3. $\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx+C$
4. $\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx+C$
5. $\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx+C$
6. $\sec kx\tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx+C$
7. $\csc kx\cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx+C$

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវទូទៅ
8. e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}+C$
9. $\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C, \quad x\neq 0$
10. $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\arcsin kx+C$
11. $\frac{1}{1+k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\arctan kx+C$
12. $\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec} kx+C, \quad kx>1$
13. a^{kx}	$\left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx}+C, a>0, a\neq 1$

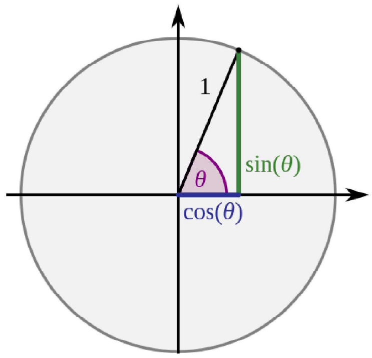
រំលឹកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ





រំលឹកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ

អនុគមន៍	ការពណ៌នា	ប្រើ radians	ប្រើ degrees
sine	$\frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\csc\theta}$	$\sin x = \cos\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\csc x}$
cosine	$\frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sec\theta}$	$\cos x = \sin\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\sec x}$
tangent	$\frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cot\theta}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \cot\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\cot x}$
cotangent	$\frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \tan\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
secant	$\frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\theta}$	$\sec x = \csc\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\cos x}$
cosecant	$\frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sin\theta}$	$\csc x = \sec\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\sin x}$



ទិដ្ឋភាពទូទៅ | វត្ថុបំណង | អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ | វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល | Definite Integrals

លំហាត់ផ្ទះបញ្ចាំង

ចូរឆ្លើយ ត្រូវ ឬ ខុស ចំពោះអំណះអំណាងខាងក្រោម៖

No.	អំណះអំណាង	ចម្លើយ
1.	ព្រីមីទីវមួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ របស់អនុគមន៍កំណត់ដោយ : $f(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 1$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ : $F(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - \pi$	
2.	ព្រីមីទីវមួយកំណត់លើ $]0; +\infty[$ របស់អនុគមន៍កំណត់ដោយ $p(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \frac{1}{\mathrm{x}^2} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}$ ដែលមានតម្លៃ $-\frac{1}{2}$ ត្រង់ 1 គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $P(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}} - 2\sqrt{\mathrm{x}} + 1$	
3.	ព្រីមីទីវនៅលើចន្លោះ I របស់អនុគមន៍ $u'v + uv'$ គឺជាអនុគមន៍ $u \times v$	

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

និយមន័យ ២

បណ្តុំនៃព្រីមីទីវទាំងអស់របស់ f ហៅថា **អាំងតេក្រាលមិនកំណត់** របស់ f ធៀបនឹងអថេរ x ។ គេតាងវាដោយ

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- $\int$: ហៅសញ្ញាអាំងតេក្រាល
- $f(x)$: តួអាំងតេក្រាល
- $\mathrm{d}x$: ឌីផេរ៉ង់ស្យែលរបស់អថេរ x
- x: អថេររបស់អាំងតេក្រាល
- C: ចំនួនថេររបស់អាំងតេក្រាល

បើព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍មួយលើចន្លោះ I កំណត់បាន នោះគេថា អនុគមន៍នេះមានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ I នោះ។

អនុវត្តន៍.

ពិនិត្យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \ln|x| + e^{2x} + C$$

Example

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = \cos x$។ តើគេអាចរកអនុគមន៍ $F(x)$ បានទេ ដែល $F'(x) = f(x)$?

- បើគេយក $F(x) = \sin x + C$ នោះ វាពិត ព្រោះ
$$f(x) = F'(x) = (\sin x + C)'$$
- យក $\cos x = F'(x)$ ជំនួសត្រង់ $f(x)$ គេបាន
$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \int F'(x) \, \mathrm{d}x$$
- គេទទួលបាន ព្រីមីទីវ $F(x)$ និងចំនួនថេរអាំងតេក្រាល C ៖
$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = F(x) + C = \sin x + C$$

វិធានអាំងតេក្រាល

1. **វិធានចំនួនថេរ.** បើ $k \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\int k \, \mathrm{d}x = kx + C$$
2. **វិធានផលបូក-ផលដក.** យក F និង G ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង g រៀងគ្នា។
$$\int f(x) \pm g(x) \, \mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C$$
3. **វិធានផលគុណនឹងស្កាលែរ.** យក F ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង កំណត់ $k \in \mathbb{R}$:
$$\int kf(x) \, \mathrm{d}x = kF(x) + C$$
4. **វិធានស្វ័យគុណ.** ចំពោះចំនួនពិត n ដែល $n \neq 1$ គេបាន
$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

រូបមន្តអាំងតេក្រាល

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$
1	$x + C$
$x^n, n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\csc^2 x$	$-\cot x + C$

ទិដ្ឋភាពទូទៅ វត្ថុបំណង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល Definite Integrals

រូបមន្តអាំងតេក្រាល

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$\csc x \cot x$	$-\csc x + C$
e^x	$e^x + C$
$b^x,\ b > 0$	$\dfrac{b^x}{\ln b} + C$
$\dfrac{1}{x \ln b}$	$\log_b x + C$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនាអាំងតេក្រាល $\int 2x^3 + 3x^2 - x \, \mathrm{d}x$

គេបាន

$$
\begin{aligned}
\int 2x^3 + 3x^2 - x \, \mathrm{d}x &= 2\int x^3 \, \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) - \ln x + C \\
&= \frac{x^4}{2} - \frac{3}{x} - \ln x + C
\end{aligned}
$$

ទិដ្ឋភាពទូទៅ វត្តបំណង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល Definite Integrals

Cont....

(ii) គណនា $\int 6x^4 - 9x^2 - \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

គេបាន

$$
\begin{aligned}
\int 6x^4 - 9x^2 - \sqrt{x} \, \mathrm{d}x &= \int 6x^4 \, dx - \int 9x^2 \, dx - \int x^{1/2} \, \mathrm{d}x \\
&= 6\int x^4 \, dx - 9\int x^2 \, dx - \int x^{1/2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{6}{5}x^5 - \frac{9}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + C
\end{aligned}
$$

HK Chapter 3

Cont....

(iii) គណនា $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3+2}{x^{5/3}}\,\mathrm{d}x &= \int 5x^{4/3}+2x^{-5/3}\,\mathrm{d}x\\ &= 5\int x^{4/3}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{-5/3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Cont...

(iv) គណនា $\displaystyle\int 3\csc x\cot x - 7\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int 3\csc x\cot x - 7\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= 3\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x - 7\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -3\csc x - 7\tan x + C\end{aligned}$$

Cont...

(v) គណនា $\displaystyle\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta$

គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta &= 3\int \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta\, \mathrm{d}\theta - 4\int \cos\theta\, \mathrm{d}\theta\\ &= 3\int \sec\theta\tan\theta\, \mathrm{d}\theta - 4\int \cos\theta\, \mathrm{d}\theta\\ &= 3\sec\theta - 4\sin\theta + C\end{aligned}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

A. ពីលំហាត់ 1-6 ចូររកព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍

(1) $f(x) = 1 - 3x^2 - 6x$

(2) $f(x) = x - x^{\frac{2}{3}}$

(3) $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{5}}$

(4) $f(x) = \cos x - x$

(5) $f(x) = x^5 - 7x^2 + 2$

(6) $f(x) = e^{-2x} + e^x$

B. ពីលំហាត់ 7-12 ចូរគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

(7) $\int 2 + \sqrt{5}\, \mathrm{d}x$

(8) $\int 2(x-3)^3\, \mathrm{d}x$

(9) $\int x^2 x^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x$

(10) $\int x + \frac{1}{x^4\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$

(11) $\int \cos x + 2\sin x\, \mathrm{d}x$

(12) $\int 2\sin x\cos x\, \mathrm{d}x$

C. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 3$

D. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ របស់អនុគមន៍ $f(x) = 2e^{2x} + x - 2$ ដែល $F(0) = 5$។

វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល

1. វិធីសាស្ត្រជំនួស - chain rule

- ចំពោះអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល f និង g គេបាន

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F[g(x)] + C$$

ដែល F ជាព្រីមីទីវរបស់ f និង C ជាចំនួនថេរ ។

- ឬ តាង $u = g(x)$ គេបាន $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ ។ គេបាន

$$\int f[g(x)]\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$$

អនុវត្តន៍. (i) គណនា

$$\int 36x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = 6x^3 + 5$ នោះ $\mathrm{d}u = 18x^2$

(ii) គណនា

$$\int \frac{2t^3+1}{t^4+2t^7}\,\mathrm{d}x$$

តាង $g(t) = t^4 + 2t$ នោះ $g'(t) = 4t^3 + 2$

Cont...

(iii) គណនា

$$\int x^5\left(x^2-1\right)^{12} 2\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = x^2 - 1$ នោះ $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ ហើយ $x^2 = u + 1$

(iv) គណនា

$$\int \sin 2x\sqrt{2-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$$

តាង $u = 2 - \cos 2x$ នោះ $\mathrm{d}u = 2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(v) គណនា

$$\int (\tan 2x + \cot 2x)^2\,\mathrm{d}x$$

លំហាត់

1. $\displaystyle\int 7x\left(2x^2+1\right)^6\,dx$
2. $\displaystyle\int y\csc 3y^2\cot 3y^2\,dy$
3. $\displaystyle\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}$
4. $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\sin 3x}}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{2r}{(1-r)^7}\,dr$
6. $\displaystyle\int \frac{x\left(3x^2+1\right)\,dx}{\left(3x^4+2x^2+1\right)^4}$

2. វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

- ចំពោះអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយប្រើដេរីវេផលគុណ គេបាន៖
$$\frac{d}{dx}f(x)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
អនុវត្តអាំងតេក្រាលលើសមីការខាងលើ គេបាន
$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$
ដូច្នេះ
$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx.$$
- តាង $u=f(x)$ និង $v=g(x)$ នោះ $\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x$ និង $\mathrm{d}v=g'(x)\,\mathrm{d}x$
$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនា $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

តាង $u = \ln x$ នោះ $\mathrm{d}u = 1/x \, \mathrm{d}x$ ហើយយក $\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x$ នោះ $v = x^2/2$

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, \mathrm{d}x &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

Cont...

(ii) គណនា $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

តាង $u = x^2$ និង $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$ នោះ $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$ ហើយ $v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Tabular Method

- អាំងតេក្រាលរបស់អនុគមន៍ខ្លះ ត្រូវការវិធីសាស្ត្រដោយផ្នែកច្រើនដង ទើបអាចទទួលបានចម្លើយ។
- គេអាចប្រើតារាង ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកខាងលើ ។

sign	D	I
$+$	u	$\mathrm{d}v$
$-$	u'	$\int \mathrm{d}v = v$
$+$	u''	$\int v$
$-$	u'''	$\int (\int v)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ទិដ្ឋភាពទូទៅ វត្ថុបំណង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ វិធីសាស្ត្រអាំងតេក្រាល Definite Integrals

ដូច្នេះ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - u'\int v\,\mathrm{d}x + u''\int\left(\int v\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x - \cdots$$

- គេប្រើតារាងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក នៅពេលណាមានតួអាំងតេក្រាលជាផលគុណរវាងអនុគមន៍ពហុធា និងអនុគមន៍ដែលអាចធ្វើអាំងតេក្រាលបានម្តងហើយម្តងទៀត ដូចជា e^{x}, $\sin(x)$, $\cos(x)$ ។ល។

អនុវត្តន៍.

ក្នុងអនុវត្តន៍ (ii) ខាងលើ គេបានតារាង

u	dv
x^2	$\sin x$
$-2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

ដូច្នេះ

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

សម្គាល់.

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការតាង u និង dv គេជ្រើសយកអនុគមន៍ទី១ ស្មើ u អាស្រ័យតាមលំដាប់លំដោយក្នុងទម្រង់ "ILATE" ដែល៖

- I = Inverse trigonometric function
- L = Logarithmic function
- A = Algebraic function (ពហុធា ...)
- T = Trigonometric function
- E = Exponential function

លំហាត់.

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

1. $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
3. $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$
4. $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$
6. $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$
7. $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$
8. $\int xe^{x}\,\mathrm{d}x$
9. $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

3. វិធីសាស្ត្រប្រភាគដោយផ្នែក (partial fractions)

- អនុគមន៍សនិទាន គឺជាសមាមាត្រនៃពហុធាពីរ ក្រោមទម្រង់ $p(x)/q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ គឺជាពហុធាអថេរ x ហើយ $q(x)\neq 0$ ។
- បើ ដឺក្រេ $p(x) >$ ដឺក្រេ $q(x)$ នោះគេចែក $p(x)$ នឹង $q(x)$ គេបាន

$$p(x)/q(x) = t(x) + h(x)/q(x)$$

ដែល $t(x)$ ជាពហុធាអថេរ x មានដឺក្រេតូចជាងដឺក្រេ $q(x)$ ។ ប្រភាគសនិទាន $h(x)/q(x)$ អាចសរសេរបានជាផលបូកនៃប្រភាគដោយផ្នែក តាមប្រភេទដូចខាងក្រោម៖

(i) $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}, a \neq b$

(ii) $\dfrac{mx+n}{(x-a)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2}$

(iii) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

(iv) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)^2(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \dfrac{C}{(x-b)}$

(v) $\dfrac{mx^2+nx+o}{(x-a)\left(x^2+bx+c\right)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+c}{x^2+bx+c}$

ចំណាំ.

កត្តាក្នុងភាគបែង	កន្សោមក្នុងបំណែកប្រភាគដោយផ្នែក
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^k$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}, k = 1, 2, \ldots$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^k$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}, k = 1, 2, ..$

អនុវត្តន៍.

(i) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

ដោយ $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ គេបានប្រភាគដោយផ្នែក៖

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

ចូររកតម្លៃ A និង B?

Cont...

(ii) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2\,(x^2+3)}\,dx$$

គេបានប្រភាគដោយផ្នែក៖

$$\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2\,(x^2+3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

ចូររកតម្លៃ A, B, C និង D?

Cont...

(iii) គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx$$

គេបាន

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2}$$

ហើយ

$$\frac{18}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

លំហាត់

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

1. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + 5x - 14} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{8 - 3t}{10t^2 + 13t - 3} \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int \frac{2 + w^4}{w^3 + 9w} \mathrm{d}w$
4. $\displaystyle\int \frac{3z^2 + 1}{(z+1)(z-5)^2} \mathrm{d}z$
5. $\displaystyle\int \frac{8}{3x^3 + 7x^2 + 4x} \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{4x - 11}{x^3 - 9x^2} \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{z^2 + 2z + 3}{(z-6)(z^2+4)} \mathrm{d}z$
8. $\displaystyle\int \frac{8 + t + 6t^2 - 12t^3}{(3t^2+4)(t^2+7)} \mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 3x}{(x-2)(x+4)} \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{w^2+7w}{(w+2)(w-1)(w-4)} \mathrm{d}w$

4. Integrals Involving Roots

- ពេលណាតួអាំងតេក្រាលមានជាប់ឫស $\sqrt[n]{g(x)}$ នោះ គេតាង

$$u = \sqrt[n]{g(x)} \quad \Rightarrow \quad u^n = g(x)$$

ដើម្បីសម្រួលអាំងតេក្រាលចូលក្នុងទម្រង់ងាយ ដែលអាចគណនាបាន។

អនុវត្តន៍. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}} dx$$

តាង $u = \sqrt{x+10} \quad \Rightarrow \quad x = u^2 - 10$ និង $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ ។ ដូច្នេះ

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^2 - 10 - 3u}(2u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{4u}{u^2 - 3u - 10}\,\mathrm{d}u$$

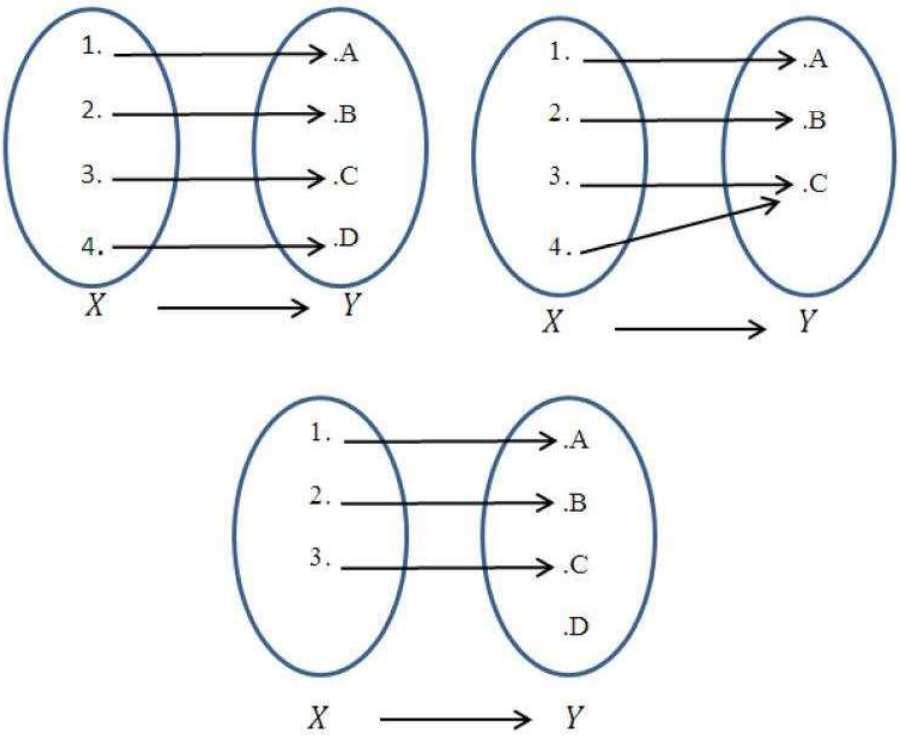
គេមានប្រភាគដោយផ្នែក

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

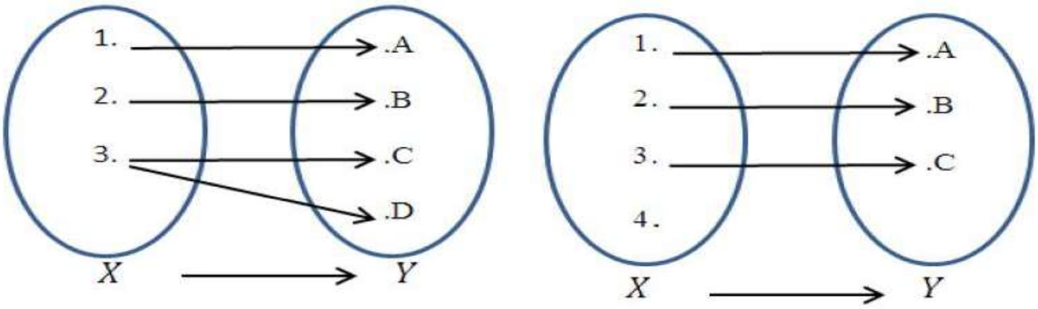
អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូនិងឡូការីត
Exponential and Logarithmic Functions

- អនុគមន៍ច្រាស
- អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូ
- អនុគមន៍ឡូការីត
- លក្ខណៈនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូនិងឡូការីត
- សមីការនិងវិសមីការនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូនិងឡូការីត

អនុគមន៍

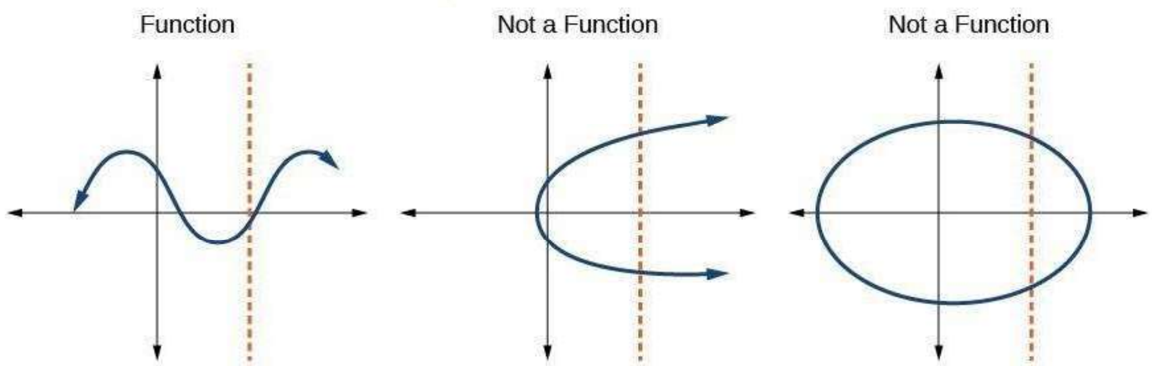


អនុគមន៍ ?

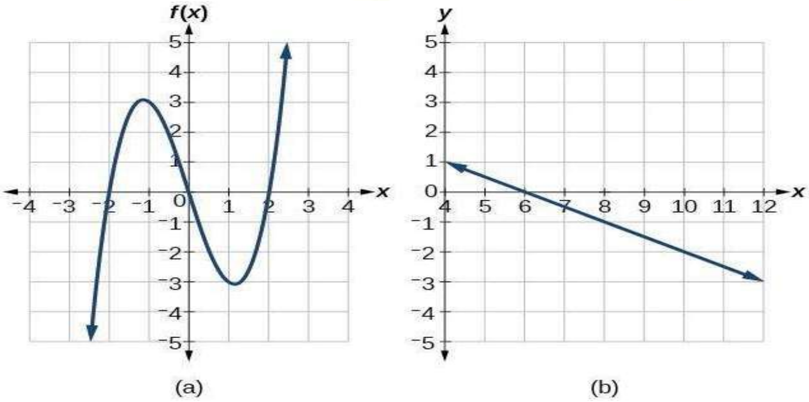


អនុគមន៍

- Vertical line test

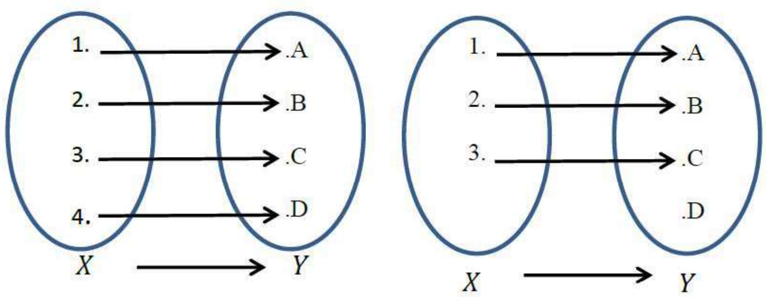


អនុគមន៍

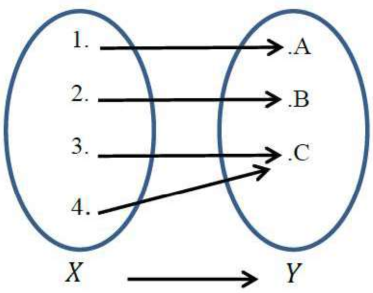


អនុគមន៍ប្រកាន់

គេមាន $f:X\to Y$ ។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី X ទៅ Y ទាល់តែ $\forall x,y\in X$ បើ $f(x)=f(y)$ នោះ $x=y$ ឬ បើ $x\neq y$ នោះ $f(x)\neq f(y)$ ។



ប្រកាន់



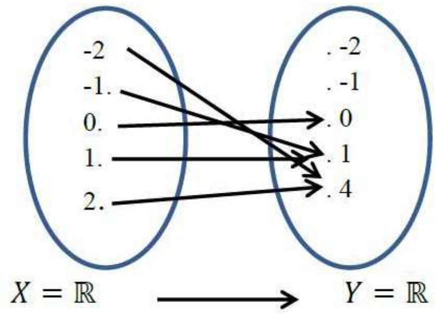
មិនប្រកាន់

អនុគមន៍ប្រកាន់

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី $\mathbb{R}+$ ទៅ $\mathbb{R}+$ ។

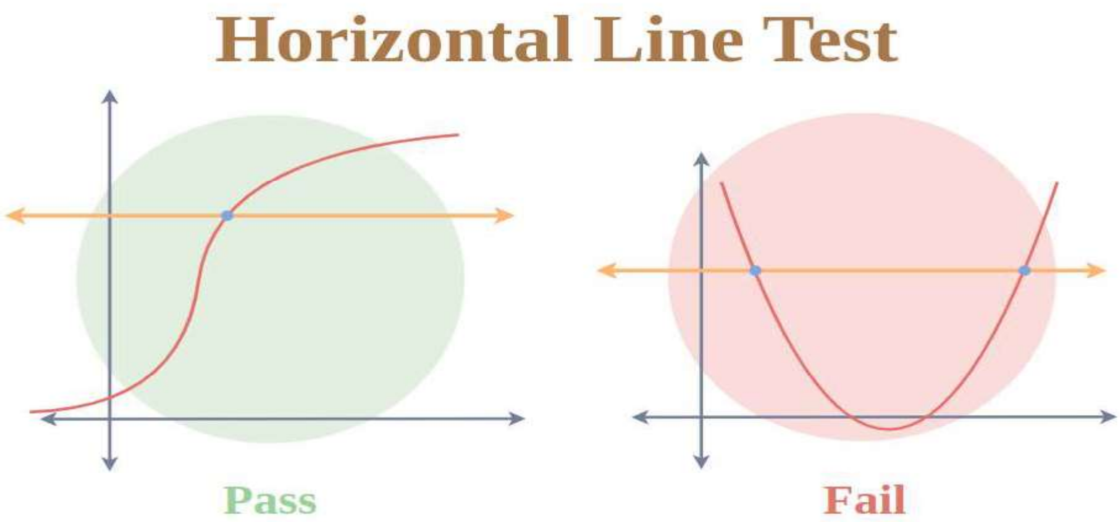
$f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍មិនប្រកាន់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ព្រោះ $-2 \neq 2$, តែ $f(-2) = f(2) = 4, \ldots$ ។



អនុគមន៍ប្រកាន់

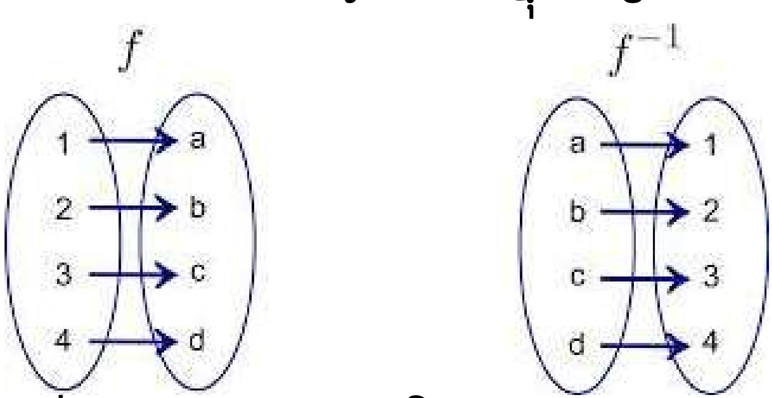
- Horizontal line test

អនុគមន៍ប្រកាន់



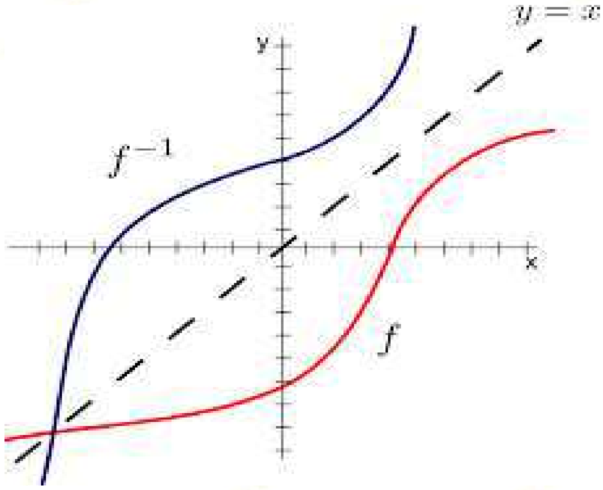
អនុគមន៍ច្រាស់

- បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រកាន់ ដែលមានគូលំដាប់ក្នុងទម្រង់ (x,y) នោះវាមានអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)$ ជា អនុគមន៍ប្រកាន់ ដែលមានគូលំដាប់ក្នុងទម្រង់ (y,x) ។



- ដែនកំណត់ក្លាយជារូបភាព និងរូបភាពក្លាយជាដែនកំណត់ រវាងអនុគមន៍ពីរដែលច្រាសគ្នា

ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ច្រាស់



ការកំណត់អនុគមន៍ច្រាស់

- ដើម្បីរកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍f(x)មួយគេត្រូវ
  1. ជំនួស f(x) ដោយ y
  2. ប្តូរ x ទៅជា y និង y ទៅជា x
  3. ដោះស្រាយសមីការ រក y ជាអនុគមន៍នៃ x
  4. ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$

ចំណាំ៖ ដែនកំណត់និងរូបភាពនៃ f និង f^{-1}

$f(f^{-1})(x)= f^{-1}(f(x))=x$

ការកំណត់អនុគមន៍ច្រាស់

- ឧទាហរណ៍៖ រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍

$$y=\sqrt{x-1}$$

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូ

រដ្ឋមួយមានប្រជាជន 1 លាននាក់។ មួយទសវត្សក្រោយមកប្រជាជនបានកើន 30% ។ គំនិតខាងលើនេះ អាចឲ្យគេប៉ាន់ស្មានចំនួនប្រជាជននៃរដ្ឋនេះនៅទសវត្សរ៍ខាងមុខ តាមទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតធរណីមាត្រ៖

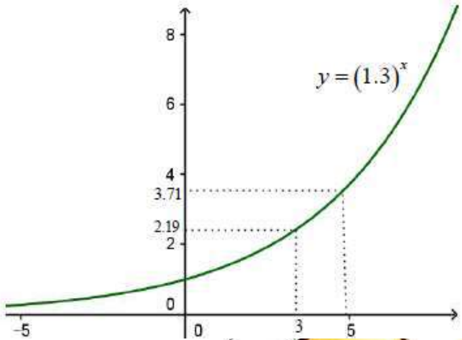
ដើមទសវត្សទី1: $a_1=1$ ផលធៀបរួម $r=30\%=0.30$

បើ a_2 ជាចំនួនប្រជាជននៅដើមទសវត្សក្រោយទី 2

$$a_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)=1(1+0.3)=1.3$$

បើ a_3 ជាចំនួនប្រជាជននៅដើមទសវត្សក្រោយទី 3

$$a_3=a_2+a_2r=a_2(1+r)=1.3(1+0.3)=(1.3)^2$$



យើងទាញបាន $a_x=(1.3)^x$ ជាចំនួនប្រជាជនប្រែប្រួលទៅតាមអថេរ x

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូ

និយមន័យ : អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=a^x$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនពិត វិជ្ជមាន ខុសពី 1 ។

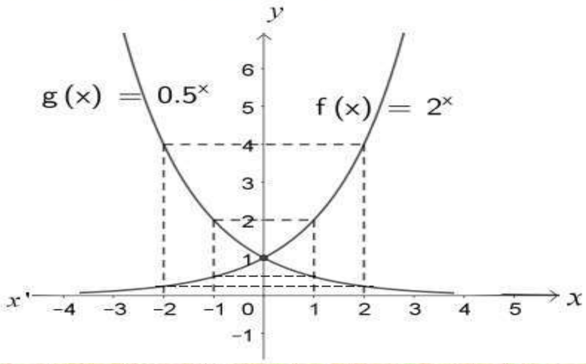
ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

❖ **ក្រាបខាយ**

ឧទាហរណ៍៖ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=2^x$ និង $g(x)=(0.5)^x$ ។

<u>តារាងតម្លៃលេខ</u>

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	0.25	4
-1	0.5	2
0	1	1
1	2	0.5
2	4	0.25



សមីការអិចស្ប៉ូ

❖ **រូបមន្តសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

➢ បើ $a>0\,,\,a\neq 1$ នោះ $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

➢ បើ $[f(x)]^{u(x)}=[f(x)]^{v(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ [f(x)-1][u(x)-v(x)]=0\end{cases}$

ឧ.ដោះស្រាយសមីការ

a. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$

b. $\left(x^2-3x+3\right)^{3x^2-2x+7}=\left(x^2-3x+3\right)^{2x^2+5x-5}$

វិសមីការអិចស្ប៉ូ

ក)បើ $a>1$ នោះ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

ខ)បើ $0<a<1$ នោះ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

គ)ជាទូទៅ ៖

$$[A(x)]^{f(x)} > [A(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < A(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូ

- ឧទាហរណ៍ ៖

a.. ដោះស្រាយវិសមីការ $5^{2x^2+3x+4} > 5^{3x^2-x+7}$

b. i ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x+7} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+8x+3}$

c.. ដោះស្រាយវិសមីការ $(2x-1)^{2x^2+x+1} > (2x-1)^{x^2+2x+3}$

អនុគមន៍ឡូការីត

យើងដឹងថាអនុគមន៍ $f:\Re \to \Re^{*}+$ កំណត់ដោយ

$$x \to y = f(x) = a^{x} \ (a>0, a\neq 1)$$

ហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

តម្លៃមួយនៃ x វាផ្តល់តម្លៃត្រូវគ្នា $y=a^{x}$ តែមួយគត់និងច្រាស មកវិញ ។ ហេតុនេះអនុគមន៍ $y=a^{x}$ មានអនុគមន៍ច្រាសមួយ ដែលកំណត់ដោយ $f^{-1}:\Re^{*}_{+} \to \Re$

$$y \to x = f^{-1}(y) = \log_{a} y$$

គេបាន $y=a^{x} \ (a>0, a\neq 1) \Leftrightarrow x=\log_{a} y=\log_{a} a^{x} \ \ (y>0)$ ។

អនុគមន៍ឡូការីត

ដែនកំណត់និងក្រាហ្វ

❖ អនុគមន៍ $y=\log_{a} x \ (a>0, a\neq 1)$

អាចកំណត់បានគ្រប់ $x>0$ ។

ដូចនេះដែនកំណត់របស់អនុគមន៍គឺ $D=\Re^{*}_{+}$ ។

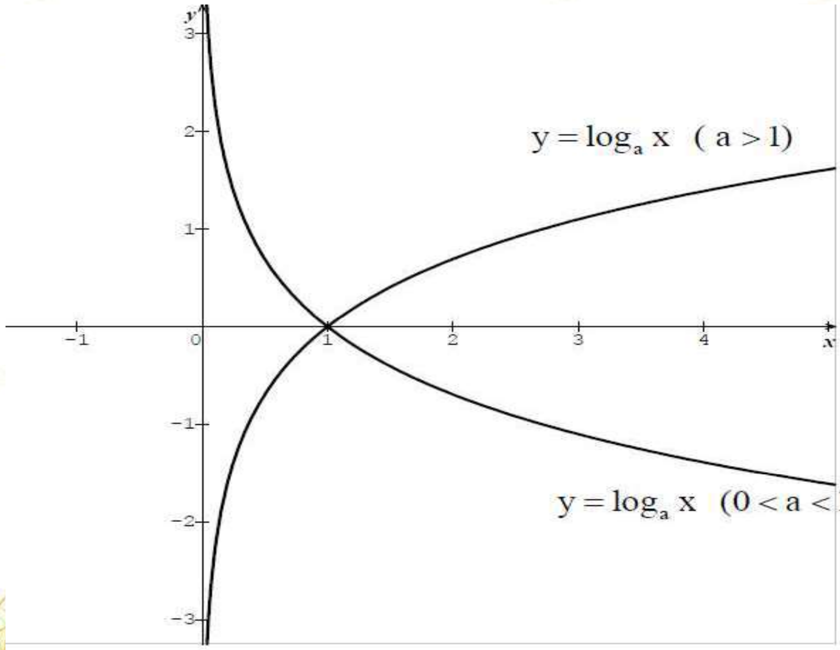
❖ បើ $a>1$ នោះ $y=\log_{a} x$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $D=\Re^{*}_{+}$

ហើយបើ $x_1, x_2 \in D$ នោះ $x_1<x_2 \Rightarrow \log_{a} x_1 < \log_{a} x_2$ ។

❖ បើ $0<a<1$ នោះ $y=\log_{a} x$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $D=\Re^{*}_{+}$

ហើយបើ $x_1, x_2 \in D$ នោះ $x_1<x_2 \Rightarrow \log_{a} x_1 > \log_{a} x_2$ ។

អនុគមន៍ឡោការីត



រូបមន្តអនុគមន៍ឡោការីត

☞ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y និង a ដែល $a \neq 0$ គេបាន៖

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^{\alpha} = \alpha$
4. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a x^n = n \log_a x$
7. $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$
8. $(a)^{\log_a x} = x$
9. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad , (a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0)$
10. $\log_{a^{\alpha}} x^{\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha} \log_a x$

អនុគមន៍ឡូការីត

- ១. គេឲ្យ $\log_2 3 = a$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\log_9 2$ ជាអនុគមន៍នៃ a
- ២. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម

$$P=\frac{1}{\log_2 2021!}+\frac{1}{\log_3 2021!}+\dots+\frac{1}{\log_{2021} 2021!}$$

សមីការនិងវិសមីការអនុគមន៍ឡូការីត

- សមីការអិចស្ប៉ូដែលមានទម្រង់
  $a^x = b$, $(a>0, a\neq 1)$ មានឫសតែមួយគត់បើ $b>0$

$$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b \ \ (a>0,\ a\neq 1, b>0)$$

ក្នុងករណី $b\leq 0$ សមីការខាងលើគ្មានឫសឡើយ ។

$a>1$ នោះ $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

$0<a<1$ នោះ $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$