មុខវិជ្ជា៖
ពីជគណិតលីនេអ៊ែ

កញ្ចប់សមត្ថភាពទី ១
ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ

ការពណ៌នាអំពីមុខវិជ្ជា

មុខវិជ្ជាពិជគណិតលីនេអ៊ែរបានរំលេចឡើងប្រធានបទផ្សេងៗ ដែលមានប្រយោជន៍សម្រាប់ឯកទេស ផ្សេងទៀត។ ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ គឺជាមុខវិជ្ជាមួយក្នុងគណិតវិទ្យាដែលសិក្សាពីប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ និងលក្ខណៈរបស់ម៉ាទ្រីស។ គោលគំនិតនៃពិជគណិតលីនេអ៊ែរ ពិតជាមានប្រយោជន៍ខ្លាំង នៅក្នុងរូបវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម វិទ្យាសាស្ត្រធម្មជាតិ និងវិស្វកម្ម។ ដោយសារតែមានការអនុវត្តដ៏ទូលំទូលាយ បានធ្វើអោយពិជគណិតលីនេអ៊ែរ ក្លាយជាមុខវិជ្ជាមួយក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាសំខាន់ៗផ្សេងទៀតដែលត្រូវបានយកទៅសិក្សាយ៉ាងទូលំទូលាយនៅក្នុងកម្រិតមហាវិទ្យាល័យ និងកាន់តែខ្លាំងឡើងនៅកម្រិតវិទ្យាល័យ។

ប្រធានបទសំខាន់ៗដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងមុខវិជ្ជានេះរួមមាន៖ វ៉ិចទ័រនិងម៉ាទ្រីស ប្រព័ន្ធសមីការ លីនេអ៊ែរ ដេទែរមីណង់និងតម្លៃផ្ទាល់របស់ម៉ាទ្រីស និង លំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់។

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក៖

ក្រោយពីបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះដោយជោគជ័យអ្នកសិក្សានឹង៖

- **ចំណេះដឹង**: ចុងបញ្ចប់នៃមុខវិជ្ជានេះនិស្សិតអាចទទួលបានចំណេះដឹងមួយចំនួនដូចខាងក្រោម

CLO1. បង្ហាញការយល់ដឹងពីមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃពិជគណិតលីនេអ៊ែរទាក់ទងនឹងវ៉ិចទ័រ ម៉ាទ្រីស ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ និងលំហវ៉ិចទ័រ។

CLO2. កំណត់បានប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស វិធានលើការគណនាដេទែរមីណង់ សញ្ញាណអត្ថិភាពនៃចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ និងសញ្ញាណនៃបម្លែងលីនេអ៊ែរ

CLO3. ពន្យល់បាននូវគោលការណ៍គ្រឹះអំពីលក្ខណៈរបស់ម៉ាទ្រីស ដេទែរមីណង់ លំហវ៉ិចទ័រ។

- **ជំនាញ**: ចុងបញ្ចប់នៃមុខវិជ្ជានេះនិស្សិតអាចប្រើប្រាស់ជំនាញមួយចំនួនដូចខាងក្រោម

CLO4. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមានច្រើនអថេរដោយជ្រើសរើសវិធីសាស្ត្រណាមួយបានច្បាស់លាស់។

CLO5. ប្រើលក្ខណៈដេទែរមីណង់ និងទម្រង់អង្កត់ទ្រូងកម្មរបស់ម៉ាទ្រីសការេ ដើម្បីគណនារកម៉ាទ្រីសស្វ័យគុណធំៗ បានងាយស្រួល។

CLO6. កំណត់រករូបភាពរបស់បម្លែងលីនេអ៊ែរបានត្រឹមត្រូវតាមវិធានផលគុណម៉ាទ្រីស។

CLO7. អនុវត្តទ្រឹស្តីពិជគណិតលីនេអ៊ែរសំខាន់ៗទៅលើមុខវិជ្ជាផ្សេងទៀត។

- **អាកប្បកិរិយា**: ចុងបញ្ចប់នៃមុខវិជ្ជានេះនិស្សិតអាចអភិវឌ្ឍអាកប្បកិរិយាមួយចំនួនដូចខាងក្រោម

CLO8. ប្រកាន់ភ្ជាប់ការប្រើប្រាស់មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃពិជគណិតលីនេអ៊ែរជាប្រចាំ ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាក្នុងសង្គម ឆ្លើយតបទៅនឹងបំណិនសិក្សាក្នុងសតវត្សទី២១។

CLO9. មានទំនួលខុសត្រូវជាប្រចាំ ក្នុងការធ្វើការងារដោយឯករាជ្យ និងពិភាក្សាជាក្រុមដោយយកលំនាំនៃការសិក្សាពេញមួយជីវិត។

វាយតម្លៃសិក្សា

ដើម្បីបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌបញ្ចប់ការសិក្សាមុខវិជ្ជានេះ អ្នកសិក្សាត្រូវ

១. វត្តមានចូលសិក្សា ១0%

២. ការចូលរួមសកម្មភាពសិក្សា ២0%

៣. ការវាយតម្លៃកំឡុងពេលសិក្សា ៣0%

៤. ការប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជាសិក្សា ៤0%

អារម្ភកថា

វិស័យអប់រំ ត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាចាត់ទុកថាជាវិស័យអាទិភាព និងត្រូវបានធ្វើកំណែទម្រង់ជាប្រចាំ ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការសិក្សានៅគ្រប់កម្រិត។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាបាននិងកំពុងពិនិត្យឡើងវិញកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន និងជំរុញកំណែទម្រង់សាលារៀននៅគ្រប់កម្រិត ដើម្បីធានាថាសាលារៀនមានដំណើរការប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាពសម្រាប់ការសិក្សារៀនសូត្ររបស់សិស្ស និងផ្តល់ដល់សិស្សនូវវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទាចរិយាសម្បទា កាយសម្បទា ឆ្លើយតបបានទៅតាមតម្រូវការទីផ្សារការងារ និងចូលរួមចំណែកពេញលេញក្នុងការអភិវឌ្ឍសហគមន៍ និងប្រទេសជាតិ ឈានឆ្ពោះទៅសម្រេចបានចក្ខុវិស័យកម្ពុជាឆ្នាំ២០៣០ និងឆ្នាំ២០៥០ ។

ជាផ្នែកមួយនៃកំណែទម្រង់ការបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀន ឆ្ពោះទៅលើកកម្ពស់គុណវុឌ្ឍិគ្រូបង្រៀន តាមរយៈគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ក្រសួងបានរៀបចំ "ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សាសម្រាប់ការបណ្តុះបណ្តាលបរិញ្ញាបត្រអប់រំ វិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀន ឯកទេសទាំង ៦ (អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ, គណិតវិទ្យា, គីមីវិទ្យា, ជីវវិទ្យា, រូបវិទ្យា, ប្រវត្តិវិទ្យា) ដើម្បីប្រើប្រាស់ក្នុងកម្មវិធីក្រឹតការគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅតាមសាលារៀនចំណេះទូទៅ។ ក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះជាឯកសាររស់ ដែលនឹងអាចមានការកែសម្រួលទៅតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង ជាពិសេសនៅដំណាក់កាលអន្តរកាលនៃការអនុវត្តយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន។

ក្រសួងមានជំនឿយ៉ាងមុតមាំ លើប្រសិទ្ធភាពនៃការអនុវត្តក្របខណ្ឌកម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលនេះ ដែលនឹងនាំគ្រូបង្រៀន និងគណៈគ្រប់គ្រងសាលារៀននៅគ្រប់ភូមិសិក្សា សម្រេចបានគោលដៅអប់រំ ដែលនឹងចូលរួមចំណែកក្នុងការសម្រេចបានចក្ខុវិស័យរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជា។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងសូមកោតសរសើរដ៏ស្មោះចំពោះ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យនាយកគម្រោង និងក្រុមការងារគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ ជាពិសេសក្រុមការងារនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញដែលបានខិតខំផលិតឯកសារក្របខណ្ឌកម្មវិធីសិក្សានេះឡើង សម្រាប់ប្រើប្រាស់ក្នុងការបណ្តុះបណ្តាលក្នុងគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ។

ថ្ងៃច័ន្ទ ១៣រោច ខែទុតិយាសាឍ ឆ្នាំថោះ បញ្ចស័ក ព.ស ២៥៦៧
រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១៤ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០២៣
រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ហង់ជួន ណារ៉ុន

គណៈកម្មការ

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន** រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ណាត ប៊ុនរឿន** រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
៣. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **ជេត ជាលី** សាកលវិទ្យាធិការសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត **ឈុន ហុក** សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក **ប៉ាល់ ដែល** សាកលវិទ្យាធិការរង សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត **សំអោ អឌ្គារតន៍** អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
៧. លោក **ព្រីង មរកត** ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រង

១ .លោកបណ្ឌិត **សុខ សុត្រ** ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក **មាក ការមេរ៉ាន** ព្រឹទ្ធបុរសមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៣. លោកបណ្ឌិត **ជ័យ ចាន់រឿន** ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យវិទ្យាសាស្ត្រនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៤. លោកបណ្ឌិត **ម៉ម សុជាតិ** ព្រឹទ្ធបុរសរងមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៥. លោក **សុត វិសាល** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់សិក្សាអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៦. លោកបណ្ឌិត **ឃុន គឹមលាង** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៧. លោកស្រីបណ្ឌិត **ស៊ូ កល្យាណ** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៨. លោក **ហង់ ស៊ីម** សាស្ត្រាចារ្យដេប៉ាតឺម៉ង់រូបវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
៩. លោក **ដួង ប៉េងអាន** អ្នកសម្របសម្រួលកម្មវិធីមធ្យមសិក្សា មហាវិទ្យាល័យអប់រំ
១០. កញ្ញា **ហុង ខ្សៅហៀក** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
១១. លោក **សើ ពន្លក** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

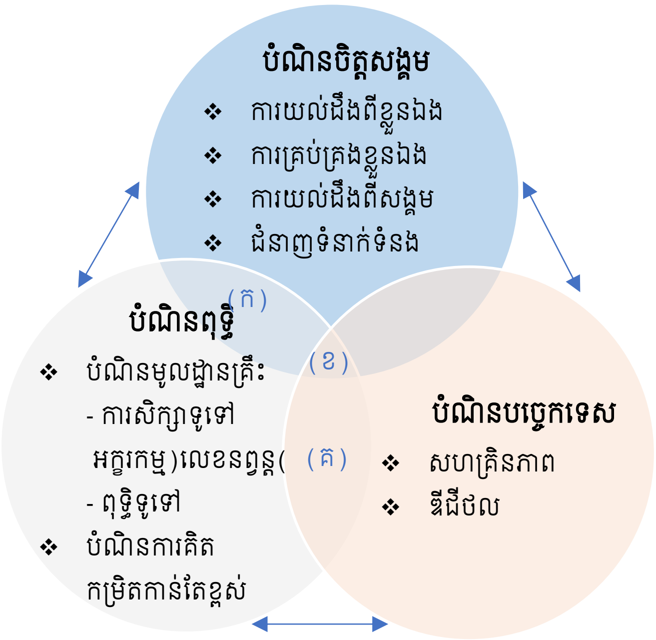
១. លោកបណ្ឌិត **សំអោ អឌ្គារតន៍** អគ្គនាយករង អគ្គនាយកដ្ឋានគោលនយោបាយ និងផែនការ
២. លោក **ព្រីង មរកត** ប្រធាននាយកដ្ឋានមធ្យមសិក្សា
៣. លោក **ម៉ៅ ប៉េងឡុង** ប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៤. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សិត សេង** នាយកវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ
៥. លោកបណ្ឌិត **ឈុក ច័ន្ទនាយ៉ា** អនុប្រធាននាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រឹត្យការ
៦. លោក **កែវ សារ៉ាត់** ទីប្រឹក្សាបច្ចេកទេសគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ

៤. ការីកុំព្យូទ័រ

១. លោក **ម៉ៅ ម៉ារ៉ាឌី** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
២. លោក **ឌន សំណាង** បុគ្គលិកមហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុក

ការសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនេះគឺផ្តោតលើប្រតិបត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាដែលអនុវត្តផ្ទាល់នៅសាលារៀន។ ទាំងអ្នកសិក្សា និងសិស្ស (ដែលអ្នកសិក្សានឹងធ្វើការជាមួយផ្ទាល់) ចាំបាច់មាន (១) បំណិនចិត្តសង្គម (២) បំណិនពុទ្ធិ និង (៣) បំណិនបច្ចេកទេស ជាមូលដ្ឋាន (ដូចក្នុងរូបទី១)។ កញ្ចប់សមត្ថភាពទាំងបីខាងដើមនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សា អភិវឌ្ឍបំណិនចិត្តសង្គម បំណិនពុទ្ធិ និងពង្រឹងសមត្ថភាពផ្នែក (ក)ការសម្រេចចិត្ត ទំនាក់-ទំនង សេចក្តីអំណត់ ទឹកចិត្តអាណិតអាសូរ និងការគ្រប់គ្រងខ្លួនឯង ថែមទាំងអាចអនុវត្តការបង្រៀនមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យាប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងនវានុវត្តន៍ដោយប្រើប្រាស់ឧត្តមានុវត្តន៍ផ្សេងៗ (ខ) ការដោះស្រាយបញ្ហា និង ការរៀបចំនិងការចាត់ចែង (គ) បច្ចេកទេសកម្រិតមធ្យម និងកម្រិតខ្ពស់។



រូបភាពទី១
ប្រភព៖ WDR2018 (p.103)

ដោយឡែក សម្រាប់អ្នកសិក្សាកម្មវិធីនេះផ្ទាល់ នឹងទទួលបាន៖

(១) ចំណេះដឹងឯកទេសគណិតវិទ្យាកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ

- មុខវិជ្ជា ពីជគណិតលីនេអ៊ែ
- ចិត្តសង្គម ភាពជាអ្នកដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រង
- សន្លឹកកិច្ចការស្វ័យសិក្សានៅមធ្យមសិក្សា
- ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេសរូបវិទ្យា

(២) ចំណេះដឹងវិធីគរុកោលស្យ សាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំរូបវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សា

- វិធីសាស្ត្របង្រៀន
- វិធីសាស្ត្រវាយតម្លៃ
- ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ

- ❖ ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ
- ❖ បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ

(៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង

- ❖ អនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន
- ❖ ការអនុវត្តកម្មវិធីស្វ័យសិក្សារូបវិទ្យា ពីទីថ្នាក់៧-ទី១២
- ❖ របាយការណ៍នៃការអនុវត្តស្តង់ដា នៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន

លទ្ធផលសិក្សារំពឹងទុកសម្រាប់បរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

វិជ្ជាសម្បទា

PLO1- ពន្យល់អំពីទ្រឹស្តី និងគោលការណ៍នៃការអប់រំក្នុងបរិបទសកលលោក និងបរិបទប្រទេសដើម្បីឆ្លុះបញ្ចាំងទៅនឹងការអនុវត្តជាក់ស្តែងនៃការបង្រៀន។

PLO2- បកស្រាយអំពីដំណើរការអនុវត្តកិច្ចការសម្រាប់ការបង្ខិតលើការរៀបចំកម្មវិធីសិក្សា និងការបង្រៀនរូបវិទ្យាប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។

បំណិនសម្បទា

PLO3- អនុវត្តបំណិនចិត្តសង្គម និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថលសម្រាប់បង្កើនការប្រាស្រ័យទាក់ទងគ្នាក្នុងការងារ និងជីវភាពប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ និងដោះស្រាយបញ្ហាប្រកបដោយភាពច្នៃប្រឌិត និងការទទួលខុសត្រូវ។

PLO4- បង្កើតគន្លឹះ និងទម្រង់សម្រាប់ដឹកនាំ និងគ្រប់គ្រងការបង្រៀនដោយផ្តោតលើផលសម្រេចនៃការសិក្សារបស់សិស្សឆ្ពោះទៅរកស្តង់ដាសាលារៀនមានប្រសិទ្ធភាព និងនិរន្តភាពសាលារៀនតាមរយៈការសិក្សា ការអនុវត្តជាក់ស្តែង និងការស្រាវជ្រាវ។

PLO5- អនុវត្តការងារអភិវឌ្ឍកម្មវិធីសិក្សា ការរៀននិងការបង្រៀនរូបវិទ្យា និងការសិក្សាបែបគម្រោងភ្ជាប់នឹងបំណិនរកចំណូលសម្រាប់សាលារៀនប្រកបដោយក្រមសីលធម៌វិជ្ជាជីវៈ។

ចរិយាសម្បទា

PLO6- អភិវឌ្ឍឥរិយាបថវិជ្ជមាន និងវប្បធម៌រៀនពេញមួយជីវិតសម្រាប់បំពេញការងារ និងទាក់ទងជាមួយអ្នកដទៃប្រកបដោយគុណតម្លៃ មនុស្សធម៌ សាមគ្គីភាព និងការចែករំលែកគ្នា។

PLO7- បង្កើតបង្ហាញ/ការដឹកនាំបណ្តាញសម្រាប់កសាងភ្នាក់ងារពង្រីកឧត្តមានុវត្តន៍សម្រាប់ការរៀន និងការបង្រៀន។

សម្គាល់៖ Program Learning Outcome (PLO) លទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំ

គញ្ចប់សមត្ថភាព និង រចនាសម្ព័ន្ធកម្មវិធីសិក្សា

កម្មវិធីបរិញ្ញាបត្រអប់រំវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀននេះ តម្រូវឱ្យអ្នកសិក្សាសិក្សាចំនួន ៦៣ ក្រេឌីតដែលមានរយៈពេលចន្លោះពី ១២ ទៅ ១៨ខែ។ ការសិក្សានិងធ្វើឡើងតាមរយៈការរៀនពីចម្ងាយ (ភាគច្រើនចន្លោះពី ៦០%

ទៅ ៧០%) និងសិក្សាផ្ទាល់នៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញនិង សាលាហាត់ការ (ភាគតិចចន្លោះពី ៤០% ទៅ ៣០%)។ ការសិក្សាផ្តោតលើបណ្តុំមុខវិជ្ជា (១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៣៦ ក្រេឌីត) (២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (១២ (+៣) ក្រេឌីត) (៣) ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង(១២ ក្រេឌីត)។ បន្ថែមពីលើនេះទៀតអ្នកសិក្សាត្រូវអនុវត្តខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានសិក្សាក្នុងកម្មវិធីនៅសាលាសាមីផ្ទាល់តែម្តងដោយមានការណែនាំពីគ្រូបង្វឹក ប្រឹក្សាគរុកោសល្យ គ្រូបង្រៀននៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងមន្ត្រីអប់រំមកពីនាយកដ្ឋានជំនាញផ្សេងៗរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលមានបទពិសោធន៍អនុវត្តជាក់ស្តែងកន្លងមក ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	ចំនួនក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	៣៦
២)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	១២ (+៣)
៣)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សាគរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	១២
សរុប	៦០ (+៣)

សម្គាល់៖ *សម្រាប់កញ្ចប់សមត្ថភាពចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងការអប់រំមធ្យមសិក្សាបានបន្ថែមមុខវិជ្ជាបំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំចំនួន ៣ក្រេឌីត*

លក្ខណៈទូទៅនៃមុខវិជ្ជាសិក្សា

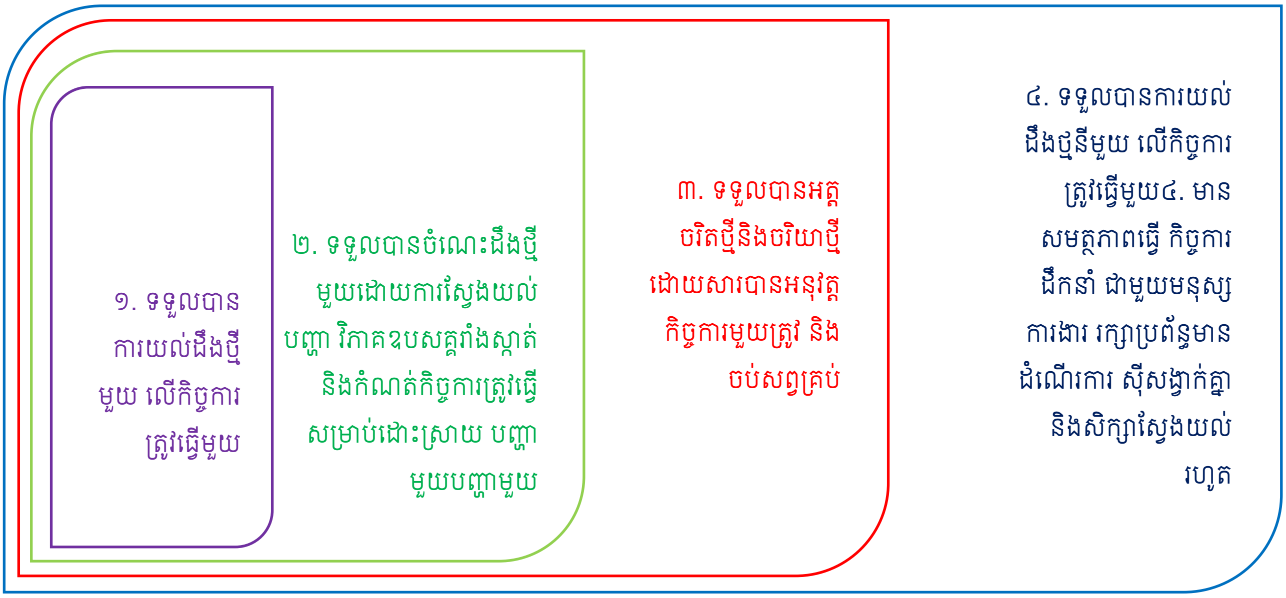
មុខវិជ្ជាសិក្សាសម្រាប់កម្រិតបរិញ្ញាបត្រអប់រំនេះនឹងជួយឱ្យអ្នកសិក្សាបំពេញកញ្ចប់សមត្ថភាពដូចខាងក្រោម ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងលទ្ធផលសិក្សាកម្មវិធីអប់រំហើយឱ្យអ្នកសិក្សាមានសមត្ថភាពសម្រាប់បំពេញការងារប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈ។

បណ្តុំមុខវិជ្ជា	មុខវិជ្ជាសិក្សា	ក្រេឌីត
១)ចំណេះដឹងឯកទេសកម្រិតបរិញ្ញាបត្រ (៦០%)	មុខវិជ្ជាឯកទេស១	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស២	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៣	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៤	៣
	មុខវិជ្ជាឯកទេស៥	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត១ (ចងចាំ)	៣
	ការអនុវត្តសន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត២ (យល់ដឹង)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៣ (ហ្វឹកហាត់)	៣
	សន្លឹកកិច្ចការឯកទេសសម្រាប់សិស្សស្វ័យសិក្សាកម្រិត៤ (វាយតម្លៃ)	៣
	ការសរសេរ និងការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស	៩
(៣)ចំណេះដឹងគរុកោសល្យ វិធីសាស្ត្របង្រៀន និង ការអប់រំមធ្យមសិក្សា (២០%)	វិធីសាស្ត្របង្រៀន បត់បែនតាមសមត្ថភាពសិស្ស និងទស្សនទានអប់រំថ្មីៗ	៣
	ប្រឹក្សា និងហ្វឹកហ្វឺនគរុសល្យលើយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះវង្វាយតម្លៃអប់រំ	៣
	មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ	៣

	បំណិនឌីជីថលសម្រាប់ការអប់រំ*	៣
៤)ហ្វឹកហាត់កម្មសិក្សា គរុកោសល្យ និងការអនុវត្តជាក់ស្តែង (២០%)	ការអនុវត្ត ស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី១)	៣
	ការអនុវត្ត ស្តង់ដានៃយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន (ស្តង់ដាទី២)	៦
	របាយការណ៍និងការការពារស្តីពីការអនុវត្តស្តង់ដាយុទ្ធសាស្ត្រសហគមន៍សាលារៀន	៣
សរុប		៦៣

លំហូរបង្រៀន និងរៀន

លំហូរបង្រៀននិងរៀន ១មេរៀន ឬកិច្ចការមួយ រួមជាមួយបំណិនមួយ និងចរិយាមួយ



ការវាយតម្លៃលើការសិក្សា

ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាគឺផ្តោតលើលទ្ធផលសិក្សាជាគោល។ ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមានបីដំណាក់កាលធំៗ គឺ ការវាយតម្លៃលើការសរសេរ (២) ការវាយតម្លៃលើការសិក្សាមុខវិជ្ជា (១) ឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស និង ការវាយតម្លៃសរុបដោយពិនិត្យលើការបំពេញគ្រប់លក្ខខណ្ឌ (៣) សម្រាប់បញ្ចប់ការសិក្សា។

៦.៤.១ គោលការណ៍វាយតម្លៃ

គោលការណ៍រួមសម្រាប់ការវាយតម្លៃលើការសិក្សារបស់អ្នកសិក្សាមានដូចតទៅ៖

១) អ្នកសិក្សាតម្រូវឱ្យមានវត្តមានក្នុងការសិក្សាតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ មិនតិចជាង៧០%។ ក្នុងករណីអ្នកសិក្សាមានវត្តមានតិចជាង៧០% នឹងមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតឱ្យប្រឡងបញ្ចប់មុខវិជ្ជានោះទេ

២) ក្នុងករណីដែលអ្នកសិក្សាធ្លាក់មុខវិជ្ជាណាមួយក្នុងឆមាស នឹងមិនអនុញ្ញាតឱ្យបន្តការសិក្សាទៅឆ្នាំបន្ទាប់ និងប្រឡងបញ្ចប់ឡើយ

៣) អ្នកសិក្សាទាំងអស់ត្រូវធ្វើកិច្ចការស្រាវជ្រាវសំខាន់ៗតាមមុខវិជ្ជានីមួយៗ និងប្រគល់ជូនគ្រូឧទ្ទេសតាមមុខវិជ្ជាដែលបានកំណត់

៤) អ្នកសិក្សាត្រូវប្រឡងបញ្ចប់ការសិក្សាដែលធ្វើឡើងបន្ទាប់ពីចប់ឆមាសនីមួយៗ តាមការកំណត់ក្នុងកម្មវិធីសិក្សា

៥) អ្នកសិក្សាត្រូវចងក្រងឯកសារវឌ្ឍនភាពនៃកិច្ចការស្នូលរួមមានការហាត់ការ និងកម្មសិក្សាដែលផ្ដោតលើ (ក) សកម្មភាពប្រតិបត្តិ (ខ) លទ្ធផលដែលសម្រេចបាន និង (គ) ការឆ្លុះបញ្ចាំង និងមេរៀនបទពិសោធន៍ និង

៦) អ្នកសិក្សាត្រូវតែជាប់មធ្យមភាគនៃការសិក្សាមុខវិជ្ជានិងការធ្វើកម្មសិក្សា ដើម្បីទទួលការអនុញ្ញាតឱ្យការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។

ការផ្ដល់ពិន្ទុ និងប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់

អ្នកសិក្សាអាចទទួលពិន្ទុចាប់ពី 00 ដល់ 100 ទៅតាមការវាយតម្លៃផ្អែកលើលក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដែលបានកំណត់ក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជា ការបំពេញកម្មសិក្សា និងការសរសេរនិងការការពារឯកសារជំនួយស្មារតីមុខវិជ្ជាឯកទេស។ ពិន្ទុដែលជាប់ត្រូវចាប់ផ្ដើមពីមធ្យមភាគពិន្ទុ 50% ឬពិន្ទុនិទ្ទេស 2.00 ឡើងទៅ។

ពិន្ទុគឺកំណត់ពី 00.00 ដល់ 100 (មធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប ឬ Grade Point Average–GPA)។ រូបមន្តគណនារកមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) គឺមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនិទ្ទេសសរុប (GPA) ស្មើផលបូកសរុបរវាងផលគុណនៃពិន្ទុនិទ្ទេស (Grade Point–P) និងតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកនៃមុខវិជ្ជានីមួយៗ (Attempted Credit Value–C) ចែកនឹងផលបូកសរុបនៃតម្លៃក្រេឌីតដែលត្រូវយកគ្រប់មុខវិជ្ជា។

ប្រព័ន្ធចំណាត់ថ្នាក់កម្មវិធី គឺផ្អែកទៅលើតម្លៃនៃពិន្ទុអតិបរមា 100% និង 50% នៃពិន្ទុអប្បបរមា។ ប្រព័ន្ធដាក់ពិន្ទុនេះ ត្រូវបានបកប្រែទៅជា «ពិន្ទុជានិទ្ទេស» និង «ពិន្ទុជាតម្លៃលេខ» ដូចដែលពិពណ៌នាខាងក្រោម៖

ពិន្ទុជាភាគរយ%	និទ្ទេស	ពិន្ទុនិទ្ទេស	មូលវិចារណ៍
85%-100%	A	4.00	ល្អប្រសើរ
80%-84%	B+	3.50	ល្អណាស់
70%-79%	B	3.00	ល្អ
65%-69%	C+	2.50	ល្អបង្គួរ
50%-64%	C	2.00	មធ្យម
<49%	F	1.50	ធ្លាក់

៦.៥ គោលការណ៍ប្រតិបត្តិ

ដើម្បីធានានូវការផ្តល់សេវាអប់រំប្រកបដោយគុណភាព និងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ មហាវិទ្យាល័យអប់រំនៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញអនុវត្តតាមគោលការណ៍ បទបញ្ញត្តិ និងបទដ្ឋានគតិយុត្តិរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ព្រមទាំងគោលការណ៍ច្បាប់នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ជាមួយគ្នានេះដែរ អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវគោរពតាមបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ និងឈរលើស្មារតីស្មោះត្រង់ ទទួលខុសត្រូវខ្ពស់ និងភាពម្ចាស់ការ និងគោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា។ សម្រាប់គោលការណ៍សុចរិតភាពនៃការសិក្សា អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានវាយតម្លៃលើចំណុចសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

៦ ១.៥.ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយា

ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានប្រមូលផ្តុំលើការគោរពវិន័យចាត់តាំង ការមករៀនទៀងទាត់ ការយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការសិក្សា ការខិតខំស្រាវជ្រាវ ការអនុវត្តភារកិច្ច និងស្មារតីសាមគ្គីភាពនៅក្នុងថ្នាក់ ក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងក្រៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា។ ការវាយតម្លៃលើវិន័យ សីលធម៌ ឥរិយាបថ និងអាកប្បកិរិយារបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ ត្រូវបានធ្វើឡើងតាមរយៈយោបល់ឯកភាពពីមតិភាគច្រើនដាច់ខាតរបស់ក្រុមប្រឹក្សាវិន័យ ដោយផ្អែកលើលក្ខណសម្បត្តិជាក់ស្តែងរបស់អ្នកសិក្សាម្នាក់ៗ និងបទបញ្ជាផ្ទៃក្នុងរបស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ។

៦ ២.៥.ការក្លែងបន្លំឯកសារ

អ្នកសិក្សាដែលក្លែងបន្លំឯកសារ នឹងត្រូវលុបឈ្មោះចេញពីបញ្ជីនិស្សិតដោយស្វ័យប្រវត្តិ ព្រមទាំងទទួលទោសតាមច្បាប់ជាធរមាន។ អ្នកសិក្សាត្រូវចាំថា ការលួចចម្លងស្នាដៃ ការលួចកម្មសិទ្ធិបញ្ញា និងគំនិតរបស់អ្នកដទៃគឺជាបទល្មើសសិក្សាធ្ងន់ធ្ងរដែលអាចឈានដល់ការបញ្ឈប់បុគ្គលដែលប្រព្រឹត្តបទល្មើសពីកម្មវិធី។ ត្រូវសម្រេចឱ្យធ្លាក់ជាស្ថាពរ បើអ្នកសិក្សារូបណាចម្លងដោយផ្ទាល់ពីអ្នកសិក្សាដទៃទៀត ឬប្រភពផ្សេងៗ ឬការប្រើសម្ភារៈ ឬឯកសារផ្សេងទៀត ដែលមិនត្រូវបានអនុញ្ញាតក្នុងការប្រឡង។

៦.៥.៣ ឯកសារជំនួយស្មារតី/របាយការណ៍/កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

អ្នកសិក្សាត្រូវបង្ហាញនូវសុចរិតភាពនៃការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្លួនឱ្យបានខ្ជាប់ខ្ជួន ចាប់តាំងពីពេលចូលរៀនរហូតដល់ចុងបញ្ចប់នៃវគ្គបណ្តុះបណ្តាល។ រាល់សំណេរការងារសិក្សាទាំងអស់ មិនត្រូវដកស្រង់គំនិត សរសេរ ឬចម្លងស្នាដៃផ្សេងៗរបស់អ្នកដទៃមកធ្វើជាគំនិត ជាស្នាដៃ ឬជាកម្មសិទ្ធិរបស់ខ្លួនដោយគ្មានការបញ្ជាក់ពីប្រភពច្បាស់លាស់នៃឯកសារយោង ឯកសារពិគ្រោះ ឬការអនុញ្ញាតពីម្ចាស់ប្រភព។

ក្នុងករណីរកឃើញមានការលួចចម្លងស្នាដៃអ្នកដទៃ អ្នកសិក្សានឹងត្រូវប្រឈមមុខចំពោះក្រុមប្រឹក្សាបច្ចេកទេស និងក្រុមប្រឹក្សាវិន័យរបស់មហាវិទ្យាល័យអប់រំ ឬសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដោយត្រូវទទួលពិន័យឱ្យរៀនត្រួតថ្នាក់ ឬអាចត្រូវបញ្ឈប់ពីកម្មវិធីដោយគ្មានសំណងប្រាក់សិក្សាដែលបានបង់រួចហើយ និងមិនមានការចេញលិខិតស្នាមបញ្ជាក់ការសិក្សាអ្វីដែរ។

សម្គាល់៖ កម្មវិធីបណ្តុះបណ្តាលសូមរក្សាសិទ្ធិក្នុងការកែប្រែការអនុវត្តជាក់ស្តែងឱ្យឆ្លើយតបទៅនឹងវឌ្ឍនភាពការរៀននិងបង្រៀន សមត្ថភាពរៀននិងការអនុវត្តជាក់ស្តែង និង ស្ថានភាពរៀននិងបង្រៀនជាក់ស្តែង ដើម្បីសម្រេចបានលទ្ធផលសិក្សាល្អបំផុត និងសម្រេចស្តង់ដាសហគមន៍សាលារៀននៃគម្រោងកែលម្អការអប់រំចំណេះទូទៅ (GEIP) ។

វ៉ិចទ័រ និង ម៉ាទ្រីស

(Vectors and Matrices)

ហាំ ភារីម
កៅ មុយសាន

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

Outline

1. គោលគំនិត

Outline

1. គោលគំនិត
2. ប្រមាណវិធីគ្រឹះលើវ៉ិចទ័រ

Outline

1. គោលគំនិត
2. ប្រមាណវិធីគ្រឹះលើវ៉ិចទ័រ
3. ផលគុណស្កាលែរ (DOT PRODUCT)

Outline

គោលគំនិត

១. ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ មានអនុវត្តជាក់ស្តែងជាច្រើននៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ និង វិស្វកម្ម ហើយវាក៏អាចត្រូវបាន ប្រើសម្រាប់ហ្វឹកហាត់សម្រាយបញ្ជាក់ ចំណោទគណិតវិទ្យាផ្សេងៗ។

២. ការសិក្សារបស់យើងអំពីពិជគណិតលីនេអ៊ែរ ចាប់ផ្តើមដោយវ៉ិចទ័រ និង ម៉ាទ្រីស ដែលជាគោលគំនិតពីរសំខាន់បំផុតបំផុតក្នុងគណិតវិទ្យា។

៣. អ្នកប្រហែលជាធ្លាប់ស្គាល់ហើយ ការប្រើប្រាស់វ៉ិចទ័រដើម្បីពិពណ៌នាអំពី ទីតាំង ចលនា និងកម្លាំង។ ហើយ យើងនឹងឃើញនៅពេលក្រោយ ម៉ាទ្រីស គឺជាគន្លឹះសម្រាប់តាងឱ្យចលនាដែលមានលក្ខណៈ “លីនេអ៊ែរ” នៅក្នុង ធម្មជាតិ។

និយមន័យ

តាង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំចំនួនពិត។ ក្នុងការអនុវត្ត សន្មតយក $n = 2$ ឬ $n = 3$។

Definition

វ៉ិចទ័រនៃចំនួនពិតមានលំដាប់ n (real n-vector) គឺជាលំដាប់នៃចំនួនពិតចំនួន n (ជួនកាល ហៅថា លំដាប់ n-ធាតុនៃចំនួនពិត)។ សំណុំនៃគ្រប់ n-vectors តាងដោយ $\mathbb{R}^n$ ។

For example,

- $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំនៃ 2-vectors[១] នៃចំនួនពិត។ ដូចជា $[2, -4]$ និង $[-6 \cdot 2, 3 \cdot 14]$ ។
- $\mathbb{R}^3$ ជាសំណុំនៃ 3-vectors[២] នៃចំនួនពិត។ ដូចជា $[2, -3, 0]$ និង $[-\sqrt{2}, 42.7, \pi]$។

[១](ordered 2-tuples = ordered pairs)
[២](ordered 3 -tuples = ordered triples)

Note

- វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដែលមានគ្រប់ n ធាតុស្មើសូន្យ ហៅថា វ៉ិចទ័រសូន្យ (zero n-vector)។
- ពីរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ជាវ៉ិចទ័រស្មើគ្នា លុះត្រាតែ គ្រប់ធាតុដែលត្រូវគ្នា (ហៅថា coordinates) នៅក្នុង n-tuples ស្មើគ្នា។ That is,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

លុះត្រាតែ

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

- ចំនួនទោល (single number) ដូចជា -10 ឬ 2.6 ជាទូទៅគេហៅថា ស្កាលែរ (scalar) ដើម្បីបែងចែកឱ្យដាច់ពីវ៉ិចទ័រ។

ការតាងវ៉ិចទ័រ

- វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាទូទៅតាងឱ្យចលនាពីចំណុចមួយទៅចំណុចមួយទៀត នៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេ។ ឧ. ចាប់ពីចំណុចផ្តើម $(3,2)$ ដល់ចំណុចចុង $(1,5)$ មានការថយចុះ ចំនួន 2 ឯកតាតាមអ័ក្ស x និងកើនឡើងចំនួន 3 ឯកតាតាម អ័ក្ស y។ វ៉ិចទ័រដែលតាងឱ្យការផ្លាស់ប្តូរនេះ គឺ $[-2,3]$ (រូបភាព 1.1) ។

ការតាងវ៉ិចទ័រ

- វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាទូទៅតាងឱ្យចលនាពីចំណុចមួយទៅចំណុចមួយទៀត នៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេ។ ឧ. ចាប់ពីចំណុចផ្តើម $(3,2)$ ដល់ចំណុចចុង $(1,5)$ មានការថយចុះ ចំនួន 2 ឯកតាតាមអ័ក្ស x និងកើនឡើងចំនួន 3 ឯកតាតាម អ័ក្ស y។ វ៉ិចទ័រដែលតាងឱ្យការផ្លាស់ប្តូរនេះ គឺ $[-2,3]$ (រូបភាព 1.1) ។
- វ៉ិចទ័រមួយអាចកំណត់ទីតាំងនៅត្រង់ចំណុចផ្តើមណាមួយដែលអ្នកចង់បាន។ ឧ. $[-2,3]$ ក៏អាចតាងឱ្យចលនាពីចំណុចដំបូង $(9,-6)$ ទៅចំណុចចុង $(7,-3)$ បានដែរ។

ការតាងវ៉ិចទ័រ

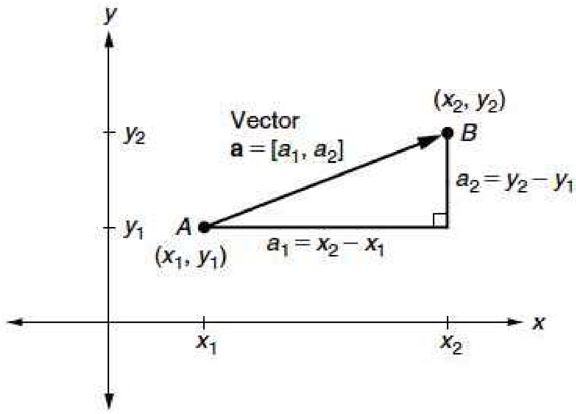
- វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាទូទៅតាងឱ្យចលនាពីចំណុចមួយទៅចំណុចមួយទៀតនៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេ។ ឧ. ចាប់ពីចំណុចផ្តើម $(3, 2)$ ដល់ចំណុចចុង $(1, 5)$ មានការថយចុះ ចំនួន 2 ឯកតាតាមអ័ក្ស x និងកើនឡើងចំនួន 3 ឯកតាតាមអ័ក្ស y។ វ៉ិចទ័រដែលតាងឱ្យការផ្លាស់ប្តូរនេះ គឺ $[-2, 3]$ (រូបភាព 1.1) ។
- វ៉ិចទ័រមួយអាចកំណត់ទីតាំងនៅត្រង់ចំណុចផ្តើមណាមួយដែលអ្នកចង់បាន។ ឧ. $[-2, 3]$ ក៏អាចតាងឱ្យចលនាពីចំណុចដំបូង $(9, -6)$ ទៅចំណុចចុង $(7, -3)$ បានដែរ។
- វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^3$ មានការបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រស្រដៀងគ្នាដែរ គឺវ៉ិចទ័រមាន 3 កូអរដោនេ ប្រើដើម្បីតាងឱ្យចលនារវាងចំនុចនានាក្នុងលំហវិមាត្របី។ ឧ. $[2, -2, 6]$ អាចតាងឱ្យចលនាពីចំណុចផ្តើម $(2, 3, -1)$ ទៅចំណុចចុង $(4, 1, 5)$ (រូបភាព 1.2)។

ប្រវែងវ៉ិចទ័រ

Definition

ប្រវែង (ឬហៅថា ណម-norm ឬ រង្វាស់-magnitude) របស់វ៉ិចទ័រមួយ $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ក្នុង $\mathbb{R}^n$ កំណត់ដោយ

$$\|\mathrm{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$



និយមន័យ

Definition

គ្រប់វ៉ិចទ័រមានប្រវែងស្មើ 1 ហៅថា វ៉ិចទ័រឯកតា (unit vector)។

Definition

យក $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ជាវ៉ិចទ័រមួយក្នុង $\mathbb{R}^n$ និងកំណត់យក c ជាស្កាលែរមួយ (real number)។ គេបាន $c\mathbf{x}$ គឺជា ផលគុណនឹងស្កាលែរ (scalar multiple) របស់ $\mathbf{x}$ និង c ដែលជាវ៉ិចទ័រ$[cx_1, cx_2, \ldots, cx_n]$។

Note. Let $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, and let c be any real number (scalar). Then $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$. That is, the length of $c\mathbf{x}$ is the absolute value of c times the length of $\mathbf{x}$.

cont...

Definition

យកពីរវ៉ិចទ័រ$\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ កំណត់ក្នុង $\mathbb{R}^n$។

1. $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ មានទិសដៅដូចគ្នា លុះត្រាតែ មានចំនួនពិតវិជ្ជមានមួយ c ដែល $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$។
2. $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា លុះត្រាតែ មានចំនួនពិតអវិជ្ជមានមួយ c ដែល$\mathbf{y} = c\mathbf{x}$។
3. វ៉ិចទ័រមិនសូន្យពីរស្របគ្នា ប្រសិនបើវាស្ថិតក្នុងទិសតែមួយ ឬក្នុងទិសដៅផ្ទុយគ្នា។

Note. If $\mathbf{x}$ is a nonzero vector in $\mathbb{R}^n$, then

$$\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}$$

Addition and Subtraction with Vectors

Definition

គេឱ្យ $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ និង $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ ដូច្នេះ $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ជាផលបូកនៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ គឺជាវ៉ិចទ័រ

$$[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n] \text{ ក្នុង } \mathbb{R}^n ។$$

For example, if $\mathbf{x} = [2, -3, 5]$ and $\mathbf{y} = [-6, 4, -2]$, then

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [2 - 6, -3 + 4, 5 - 2] = [-4, 1, 3]$$

Let $-\mathbf{y}$ denote the scalar multiple $-1\mathbf{y}$. We can now define subtraction of vectors in a natural way: if $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are both vectors in $\mathbb{R}^n$, let $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ be the vector $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

Fundamental Properties of Addition and Scalar Multiplication

គេឱ្យ $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ និង $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$ ជាវ៉ិចទ័រមួយនៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ ហើយយក c និង d ជាចំនួនពិតមួយ (scalars)។ យក $\mathbf{0}$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ គេបាន

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (Commutative Law of Addition)

(2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (Associative Law of Addition)

(3) $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (Existence of Identity Element for Addition)

(4) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Existence of Inverse Elements for Addition)

continued...

(5) $c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ (Distributive Laws of Scalar Multiplication over Addition)

(6) $(c+d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$

(7) $(cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$ (Associativity of Scalar Multiplication)

(8) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (Identity Property for Scalar Multiplication)

Note. Let $\mathbf{x}$ be a vector in $\mathbb{R}^n$, and let c be a scalar. If $c\mathbf{x} = \mathbf{0}$, then either $c = 0$ or $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

បន្សំលីនេអ៊ែររបស់វ៉ិចទ័រ (Linear Combinations of Vectors)

Definition

យក $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ កំណត់ វ៉ិចទ័រ $\mathbf{v}$ គឺជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ លុះត្រាតែ មានស្កាលែរ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ដែលគេបាន

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

Thus, a linear combination of vectors is a sum of scalar multiples of those vectors. For example, the vector $[-2, 8, 5, 0]$ is a linear combination of $[3, 1, -2, 2]$, $[1, 0, 3, -1]$, and $[4, -2, 1, 0]$ because

$$2[3, 1, -2, 2] + 4[1, 0, 3, -1] - 3[4, -2, 1, 0] = [-2, 8, 5, 0]$$

continued...

Note that any vector in $\mathbb{R}^3$ can be expressed in a unique way as a linear combination of $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, and $\mathbf{k}$. For example,

$$\begin{aligned}[3,-2,5] &= 3[1,0,0]-2[0,1,0]+5[0,0,1]\\ &= 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}\end{aligned}$$

In general, $[a,b,c]=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. Also, every vector in $\mathbb{R}^n$ can be expressed as a linear combination of the standard unit vectors

$$\mathbf{e}_1=[1,0,0,\ldots,0], \mathbf{e}_2=[0,1,0,\ldots,0], \ldots, \mathbf{e}_n=[0,0,\ldots,0,1]$$

(why?)

ផលគុណស្កាលែរ

Definition

គេឱ្យ $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ និង $\mathbf{y}=[y_1,y_2,\ldots,y_n]$ ជាវ៉ិចទ័រពីរនៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ ផលគុណស្កាលែរ (ផលគុណក្នុង) រវាង x និង y កំណត់ដោយ

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k.$$

For example, if $\mathbf{x}=[2,-4,3]$ and $\mathbf{y}=[1,5,-2]$, then

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(2)(1)+(-4)(5)+(3)(-2)=-24$$

Theorem

បើ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *និង* $\mathbf{z}$ *គឺជាវ៉ិចទ័រណាមួយនៅក្នុង* $\mathbb{R}^n$ *ហើយបើ* c *ជាស្កាលែរណាមួយ នោះគេបាន៖*

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ *(Commutativity of Dot Product)*

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0$ *(Relationship between Dot Product and Length)*

(3) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ *if and only if* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(4) $c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (c\mathbf{y})$ *(Relationship between Scalar Multiplication and Dot Product)*

(5) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$ *(Distributive Laws of Dot Product)*

(6) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ *(... over Addition)*

Proof of (5):

Let $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, and $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$. Then,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot ([y_1, y_2, \ldots, y_n] + [z_1, z_2, \ldots, z_n]) \\
&= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot [y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n] \\
&= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \cdots + x_n (y_n + z_n) \\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n).
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) &= ([x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot [y_1, y_2, \ldots, y_n]) \\
&\quad + ([x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot [z_1, z_2, \ldots, z_n]) \\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n)
\end{aligned}$$

Hence, $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$.

cont...

លក្ខណៈនៅក្នុងទ្រឹស្តីខាងលើ អាចឱ្យយើងសម្រួលកន្សោមផលគុណដូចនៅក្នុងពិជគណិតបឋមដែរ។ ឧទាហរណ៍៖

$$\begin{aligned}(5\mathbf{x}-4\mathbf{y})\cdot(-2\mathbf{x}+3\mathbf{y}) &= [(5\mathbf{x}-4\mathbf{y})\cdot(-2\mathbf{x})]+[(5\mathbf{x}-4\mathbf{y})\cdot(3\mathbf{y})]\\ &= [(5\mathbf{x})\cdot(-2\mathbf{x})]+[(-4\mathbf{y})\cdot(-2\mathbf{x})]+[(5\mathbf{x})\cdot(3\mathbf{y})]\\ &\quad +[(-4\mathbf{y})\cdot(3\mathbf{y})]\\ &= -10(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})+8(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})+15(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})-12(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\\ &= -10\|\mathbf{x}\|^2+23(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})-12\|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

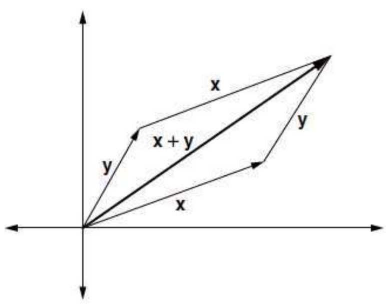
វិសមភាពទាក់ទងនឹងផលគុណក្នុង

(1) **Cauchy-Schwarz Inequality.** បើ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ នោះគេបាន

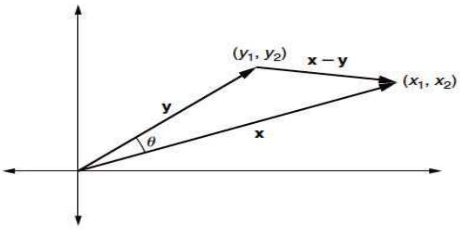
$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le (\|\mathbf{x}\|)(\|\mathbf{y}\|)$$

(2) **Triangle Inequality.** បើ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ នោះគេបាន

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$$



The Angle between Two Vectors



Consider the vector $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, since $0 \le \theta \le \pi$, it follows from the Law of Cosines that

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\|\mathbf{x}\|)(\|\mathbf{y}\|)\cos\theta$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

continued...

Hence, $-2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta = -2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$, which implies $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, and so

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{(\|\mathbf{x}\|)(\|\mathbf{y}\|)}.$$

Example

Suppose $\mathbf{x} = [6, -4]$ and $\mathbf{y} = [-2, 3]$ and θ is the angle between $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$. Then,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{(\|\mathbf{x}\|)(\|\mathbf{y}\|)} = \frac{(6)(-2)+(-4)(3)}{\sqrt{52}\sqrt{13}} = -\frac{12}{13} \approx -0.9231.$$

Properties

- យក $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យក្នុង $\mathbb{R}^n$ និងយក θ ជាមុំរវាង $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$។ គេបាន
  (1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} > 0$ if and only if $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ radians (0° or acute).
  (2) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ if and only if $\theta = \frac{\pi}{2}$ radians (90°).
  (3) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} < 0$ if and only if $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ radians (180° or obtuse).
- វ៉ិចទ័រអ័រតូកូណាល់ និងវ៉ិចទ័រស្រប
  (1) Two vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ are orthogonal (perpendicular) if and only if $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.
  (2) Let $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ be nonzero vectors in $\mathbb{R}^n$. Then $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are parallel if and only if $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \pm\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (that is, $\cos\theta = \pm 1$, where θ is the angle between $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$).

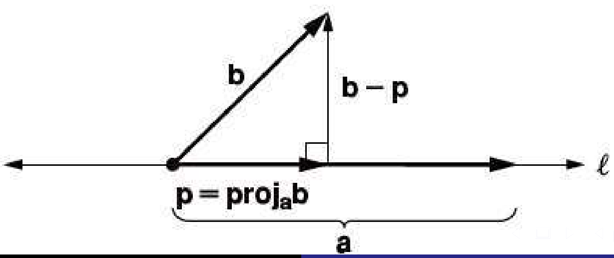
ចំណោលរបស់វ៉ិចទ័រ (Projection vectors)

យើងកំណត់ពិជគណិតនៃចំណោលរបស់វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដើម្បីឱ្យស្របនឹងន័យធរណីមាត្រក្នុងលំហ $\mathbb{R}^2$ និង $\mathbb{R}^3$ ។

Definition

បើ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដែល $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ នោះគេបាន ចំណោលរបស់វ៉ិចទ័រ b មកលើ a គឺកំណត់ដោយៈ

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\mathbf{a}$$



Example

Let $\mathbf{a} = [4, 0, -3]$ and $\mathbf{b} = [3, 1, -7]$. Then

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\mathbf{a} = \frac{(4)(3)+(0)(1)+(-3)(-7)}{(\sqrt{16+0+9})^2}\mathbf{a} = \frac{33}{25}\mathbf{a}$$
$$= \frac{33}{25}[4, 0, -3] = \left[\frac{132}{25}, 0, -\frac{99}{25}\right].$$

cont...

Suppose $\mathbf{a} \neq 0$. Notice that if $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} \neq 0$, then it is parallel to $\mathbf{a}$ by definition because it is a scalar multiple of $\mathbf{a}$. Also, $\mathbf{b} - \mathbf{proj_a b}$ is orthogonal to a because

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - (\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b})\cdot\mathbf{a} \\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right)\|\mathbf{a}\|^2 = 0\end{aligned}$$

Remark. Let $\mathbf{a}$ be a nonzero vector in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathbf{b}$ be any vector in $\mathbb{R}^n$. Then $\mathbf{b}$ can be decomposed as the sum of two component vectors, $\mathbf{proj_a b}$ and $\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$, where the first (if nonzero) is parallel to $\mathbf{a}$ and the second is orthogonal to $\mathbf{a}$.

និយមន័យម៉ាទ្រីស

Definition

ម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ គឺជាការតម្រៀបជារាងចតុកោណនៃចំនួនពិត ដែលរៀបចំជាជួរដេក ចំនួន m និងជួរឈរ ចំនួន n។ គេតាង ម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំ $A = (a_{ij})$ ឬ $[a_{ij}]$ ហើយ a_{ij} ហៅថា ធាតុនៃម៉ាទ្រីសត្រង់ទីតាំងជួរដេក i និងជួរឈរ j។ កន្សោម $m \times n$ តាងឱ្យ ទំហំ ឬ លំដាប់ របស់ម៉ាទ្រីស។

For example, each of the following is a matrix, listed with its correct size:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{2\times 3 \text{ matrix}} \quad \mathbf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}_{?\text{ matrix}} \quad \mathbf{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_{?\text{ matrix}}$$

cont...

$$\mathbf{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{?\text{ matrix}} \quad \mathbf{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{?\text{ matrix}} \quad \mathbf{F} = \underbrace{[4]}_{1\times 1 \text{ matrix}}$$

Notes. Here are some conventions to remember regarding matrices.

- The size of a matrix is always specified by stating the number of rows first. For example, a 3×4 matrix always has three rows and four columns, never four rows and three columns.
- An $m \times n$ matrix can be thought of either as a collection of m row vectors, each having n coordinates, or as a collection of n column vectors, each having m coordinates. A matrix

cont...

- We often write a_{ij} to represent the entry in the i th row and j th column of a matrix $\mathbf{A}$. For example, in the previous matrix $\mathbf{A}$, a_{23} is the entry -5 in the second row and third column. A typical 3×4 matrix C has entries symbolized by

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}.$$

- $\mathcal{M}_{mn}$ represents the set of all matrices with real-number entries having m rows and n columns. For example, $\mathcal{M}_{34}$ is the set of all matrices having three rows and four columns. A typical matrix in $\mathcal{M}_{34}$ has the form of the preceding matrix $\mathbf{C}$.
- The main diagonal entries of a matrix $\mathbf{A}$ are a_{11}, a_{22}, a_{33}

ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ

ជំពូក២.

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ដោយ
កៅ មុយសាន
ហាំ ការីម

Lecture No. 1

សមីការលីនេអ៊ែរជាអ្វី?

- សមីការលីនេអ៊ែរ មានអថេរ $x_1, \dots, x_n$ គឺជាសមីការមួយដែលអាចសរសេរបានជាទម្រង់៖

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

ដែល b និងមេគុណ $a_1, \dots, a_n$ ជាចំនួនពិត ឬជាចំនួនកុំផ្លិចដែលជាទូទៅគេស្គាល់ជាមុន។

- ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ (ឬហៅ ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ) គឺជាបណ្តុំនៃសមីការលីនេអ៊ែរមួយឬច្រើនដែលមានអថេរដូចគ្នា គឺ៖ $x_1, \dots, x_n$ ។

សមីការលីនេអ៊ែរជាអ្វី?

- **ចម្លើយ** របស់ប្រព័ន្ធមួយ គឺជា ចំណុច (s_1, s_2,..., s_n) ដែលធ្វើអោយសមីការនីមួយៗក្លាយជាអំណះអំណាងពិត ពេលដែលតម្លៃ s_1,..., s_n ត្រូវបានគេជំនួសអោយ x_1,..., x_n រៀងគ្នា។
- សំណុំនៃគ្រប់ចម្លើយដែលអាចយកបាន ហៅថា solution set របស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ។
- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរពីរ សមមូលគ្នា បើប្រព័ន្ធទាំងពីរមាន សំណុំចម្លើយដូចគ្នា។

សមីការលីនេអ៊ែរជាអ្វី?

- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ អាចមាន:
  1. គ្មានចម្លើយ
  2. ចម្លើយតែមួយគត់
  3. ចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់
- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយហៅថា consistent (មានចម្លើយ) បើវាមានចម្លើយតែមួយគត់ ឬមានច្រើនរាប់មិនអស់។
- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយហៅថា inconsistent បើវាគ្មានចម្លើយ។

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរតាងដោយម៉ាទ្រីស

- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ អាចតាងបំព្រួញជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសបាន៖

$$AX = B$$

- ពិនិត្យប្រព័ន្ធ៖ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$

- គេបានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសមេគុណ ។

- ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយហៅថា ប្រព័ន្ធអូម៉ូហ្សែន បើវាមានទម្រង់៖

$$AX = 0$$

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរតាងដោយម៉ាទ្រីស

- ម៉ាទ្រីសបន្ថែម (augmented matrix) របស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ ត្រូវសរសេរម៉ាទ្រីសមេគុណ និងជួរឈរដែលបានមកពីអង្គខាងស្តាំរបស់សមីការនីមួយៗ រួមបញ្ចូលគ្នា។

- ចំពោះប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរខាងលើ គេបាន

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

ហៅថា ម៉ាទ្រីសបន្ថែម ។

MATRIX SIZE

- ទំហំរបស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $m \times n$ អាចអោយយើងបញ្ជាក់បានពី **ចំនួនរបស់សមីការ និងចំនួនរបស់អថេរ** ចូលរួមក្នុងប្រព័ន្ធនោះ។
- យុទ្ធសាស្ត្រគន្លឹះក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ គឺការរកវិធីជំនួសប្រព័ន្ធនោះ ដោយប្រព័ន្ធសមមូលថ្មីមួយ (i.e., ជាប្រព័ន្ធមួយដែលមានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា) ដែលមានភាពងាយស្រួលជាងក្នុងការដោះស្រាយ។

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

Solving Systems of Equations

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមាន២អថេរ

- ប្រើវិធីបំបាត់ដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមាន២អថេរ
- បកស្រាយដោយប្រើក្រាហ្វិកនូវចំនួនចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ
- ប្រើប្រព័ន្ធសមីការមាន២អថេរ ដើម្បីសរសេរគម្រូ និងដោះស្រាយចំណោទក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ

វិធីបំបាត់ (Method of Elimination)

- យើងនឹងប្រើវិធីបំបាត់ដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមាន២អថេរ។ ជំហានគន្លឹះចំពោះវិធីនេះ គឺធ្វើយ៉ាងណាអោយមេគុណរបស់អថេរណាមួយ មានតម្លៃផ្ទុយគ្នា រួចបូកសមីការទាំងពីរដើម្បីបំបាត់អថេរនោះ។

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 & (1) \\ x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

វិធីបំបាត់ (Method of Elimination)

- គេបាន

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 7 \\ -3x - 2y = -1 \\ \hline 3y = 6 \end{array}$$

Add equations.

- ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបានទទួលបាន y = 2 ។ បន្ទាប់មកជំនួសចូលក្នុងសមីការទី១ ដោះស្រាយរក x ។

Example 1 – Solving a System by Elimination

- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ 5x - 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

- ចម្លើយ: The solution is $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

- ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចម្លើយនេះត្រឹមត្រូវ អ្នកគ្រាន់តែជំនួសវាចូលក្នុងសមីការដើម។

Example 1 – Check

cont’d

$$3\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} 4$$ ជំនួសចូល Equation 1

$$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$ Equation 1 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$5\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} 8$$ ជំនួសចូល Equation 2

$$\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$$ Equation 2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

TUP-BA 2024 – Muysan, Karim

វិធីបំបាត់ (Method of Elimination)

- ដើម្បីប្រើវិធីបំបាត់ក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ២អថេរ x និង y គេអនុវត្តជំហានខាងក្រោម៖

  i. បម្លែងមេគុណរបស់អថេរ x (ឬ y) អោយមានមេគុណផ្ទុយគ្នា ដោយគុណគ្រប់តួនៃសមីការមួយ ឬសមីការទាំងពីរនឹងចំនួនថេរដែលត្រូវការ

  ii. បូកសមីការទាំងពីរដើម្បីបំបាត់អថេរមួយណាដែលយើងតម្រូវ រួចដោះស្រាយសមីការដែលទទួលបាន។

  iii. ជំនួសត្រឡប់តម្លៃដែលទទួលបានក្នុងជំហានទី២ ចូលក្នុងសមីការ (1) រួចដោះស្រាយរកអថេរផ្សេងទៀត។

  iv. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅក្នុងសមីការដើម។

ប្រព័ន្ធសមីការ២អថេរៈ ការបកស្រាយតាមក្រាហ្វិក

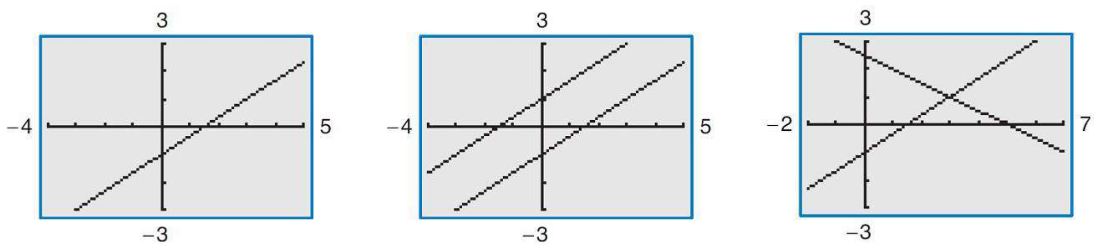
15

Graphical Interpretation

- ប្រព័ន្ធសមីការមួយ អាចមានចម្លើយតែមួយគត់ ឬ ចម្លើយពីរឬច្រើន ឬក៏ គ្មានចម្លើយ។
- បើប្រព័ន្ធមួយមានចម្លើយពីរផ្សេងគ្នា នោះគេថាវាមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។
- ពិនិត្យការបកស្រាយតាមក្រាហ្វិកដូចតទៅ ដើម្បីមើលឃើញនូវទិដ្ឋភាពដូចខាងលើនេះ។

Graphical Interpretation

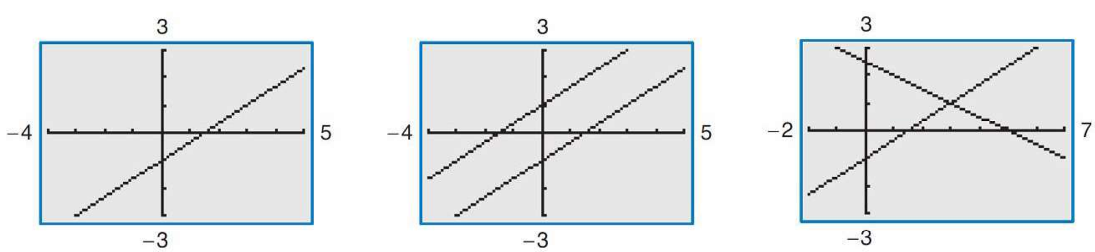
ចំនួនចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ៖	⇔	ការបកស្រាយតាមក្រាហ្វិក៖
1) មានតែមួយគត់		1) បន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
2) មានច្រើនរាប់មិនអស់		2) បន្ទាត់ពីរត្រួតស៊ីគ្នា
3) គ្មានចម្លើយ		3) បន្ទាប់ពីរស្របគ្នា



Example 2 – ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្រាហ្វរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- ចូរផ្គូរផ្គងប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ (a, b, c) ជាមួយក្រាហ្វ (i, ii, iii)។ បញ្ជាក់ចំនួនចម្លើយដែលមាន រួចកំណត់ថាតើប្រព័ន្ធមួយណា consistent ឬ inconsistent?

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = -6 \end{cases}$



i. ii. iii.

Figure 2.2

Example 2 – ពន្យល់

- ផ្តើមដោយសរសេរសេរប្រព័ន្ធសមីការនីមួយៗជាទម្រង់មេគុណប្រាប់ទិស (slope-intercept form)

a. System (a): $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$

b. System (b): $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$

c. System (c): $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

អនុវត្តន៍៖ ប្រព័ន្ធសមីការ២អថេរ

អនុវត្តន៍៖ ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមាន២អថេរ

- តើអ្នកអាចប្រាប់បានទេ ថាមានចំណោទអ្វីដែលអាចអនុវត្តបាន ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ? ចូរពិចារណា
  1. តើក្នុងចំណោទនោះមានបរិមាណមិនស្គាល់ច្រើនទេ?
  2. តើមានសមីការពីរ (ឬ ច្រើន) ឬមានលក្ខខណ្ឌពីរ (ឬ ច្រើន) ដែលត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ឬទេ?
- នៅពេលណាក៏ដោយ អ្នកជួបប្រទះមួយក្នុងចំណោមសំណួរទាំងពីរខាងលើ នោះគម្រូគណិតវិទ្យា (mathematical model) សម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទនោះ គឺជា ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ។

Example 3 – ក្រុមហ៊ុនអាកាសចរណ៍

- តាមគន្លងហោះហើរគេសង្កេតឃើញមានខ្យល់បោកបក់។ យន្តហោះមួយធ្វើដំណើរចម្ងាយ 2000 miles រវាងទីក្រុង A និង B ក្នុងរយៈពេល 4ម៉ោង និង 24 នាទី។ យន្តហោះនេះ ត្រូវហោះត្រឡប់មកវិញក្នុងចម្ងាយដូចគ្នា តែត្រូវធ្វើដំណើរក្នុងរយៈពេល 4 ម៉ោង។ ចូររកល្បឿនរបស់យន្តហោះ និងល្បឿនខ្យល់ ដោយសន្មត់ថាល្បឿនទាំងពីរនៅតែមិនប្រែប្រួលឡើយ។

- ចម្លើយ: (ពិនិត្យរូបតំណាងទំព័រខាងបន្ទាប់)
  - បរិមាណដែលមិនស្គាល់គឺ ល្បឿនរបស់យន្តហោះ និងល្បឿនរបស់ខ្យល់ ដែលតាងដោយ r_1 និង r_2 រៀងគ្នា។ ដូច្នេះ
  - $r_1 - r_2 =$ តាងអោយ……?
  - $r_1 + r_2 =$ តាង………?

Example 3– Solution

- ពិនិត្យ Figure 2. 3.

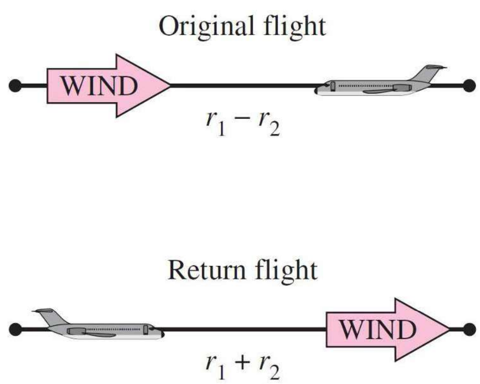


Figure 2.3

- ប្រើរូបមន្ត៖

distance = (rate) (time)

Example 3 – Solution

- ចំពោះល្បឿនទាំងពីរ គេបានសមីការ៖

$$2000 = (r_1 - r_2)\left(4 + \frac{24}{60}\right)$$

$$2000 = (r_1 + r_2)(4)$$

- These two equations simplify as follows.

$$\begin{cases} 5000 = 11r_1 - 11r_2 \\ 500 = r_1 + r_2 \end{cases}$$

Example 3 – Solution

- To solve this system by elimination, multiply Eq. 2 by 11.

$$\begin{array}{rcl} 5000 = 11r_1 - 11r_2 & \Rightarrow & 5000 = 11r_1 - 11r_2 \\ \underline{500 = \quad r_1 + \quad r_2} & \Rightarrow & \underline{5500 = 11r_1 + 11r_2} \\ & & 10{,}500 = 22r_1 \end{array}$$

- So,

$$r_1 = \frac{10{,}500}{22} = \frac{5250}{11} \approx 477.27 \text{ miles per hour}$$

Speed of plane

- and

$$r_2 = 500 - \frac{5250}{11} = \frac{250}{11} \approx 22.73 \text{ miles per hour.}$$

Speed of wind

១. វិធីបំបាត់ហ្គោស

Gaussian Elimination Method

២. វិធីបំបាត់ហ្គោស-ជឌិន

Gauss-Jordan Elimination

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- **ឧទាហរណ៍**. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមៈ

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \qquad (1)$$
$$2x_2 - 8x_3 = 8 \qquad (2)$$
$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \qquad (3)$$

- **ចម្លើយ**: វិធីបំបាត់ត្រូវបានលើកយកប្រើនៅពេលនេះ ដែលមានបង្ហាញទម្រង់ម៉ាទ្រីសផងដែរ ដោយដាក់មកដើម្បីប្រៀបធៀបគ្នា។

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

- រក្សាទុកអថេរ x_1 ក្នុងសមីការទី១ និងបំបាត់វាចេញពីសមីការផ្សេងទៀតគឺៈ បូក 4ដង សមីការទី១ ជាមួយសមីការទី៣

$$\begin{array}{r} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ \underline{-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9} \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- លទ្ធផលដែលទទួលបាន ត្រូវសរសេរជំនួសសមីការដើមទី៣៖

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

- គុណសមីការ២ នឹង $1/2$ ដើម្បីបាន 1 ជាមេគុណរបស់អថេរ x_2 ។

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

- ប្រើ x_2 ក្នុងសមីការ 2 ដើម្បីបំបាត់តួ $-3x_2$ ចេញពីសមីការ 3៖

$$\begin{aligned} 3x_2 - 12x_3 &= 12 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \\ \hline x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- គេបានប្រព័ន្ធថ្មី មានទម្រង់ (ត្រីកោណ)៖

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ \hline x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- បំបាត់តួ $-4x_3$ និង x_3 ក្នុងសមីការ 2 និង 1 ដោយប្រើតួ x_3 ក្នុងសមីការ 3 ៖

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{r} 4x_3 = 12 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ \hline x_2 = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \hline x_1 - 2x_2 = -3 \end{array}$$

- ដោយផ្តុំលទ្ធផលនៃប្រមាណវិធីទាំងពីរខាងលើរួមគ្នា គេបាន៖

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3 \\ x_2 &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- ត្រឡប់ទៅរកអថេរ x_2 ក្នុងសមីការ 2 វិញ។ ប្រើវាដើម្បីបំបាត់តួ $-2x_2$ ក្នុងសមីកា 1 ។ បូក 2 គុណនឹងសមីការ 2 ជាមួយសមីការ 1 គេបានប្រព័ន្ធថ្មី :

$$\begin{aligned} x_1 &= 29 \\ x_2 &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

- ដូច្នេះ ចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធដើមគឺ (29,16,3)។ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (29,16,3) ជាចម្លើយ គេត្រូវយកវាទៅជំនួសនៅអង្គខាងឆ្វេងរបស់ប្រព័ន្ធសមីការដើម៖

$$\begin{gathered} (29)-2(16)+(3)=29-32+3=0 \\ 2(16)-8(3)=32-24=8 \\ -4(29)+5(16)+9(3)=-116+80+27=-9 \end{gathered}$$

- ដោយលទ្ធផលផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយអង្គខាងស្តាំ ដូច្នេះគេថា (29,16,3) គឺជាចម្លើយរបស់សមីការ។
- វិធីសាស្ត្រដែលបានយកមកប្រើក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ មានឈ្មោះថា **វិធីបំបាត់ Gauss–Jordan** ។

ប្រមាណវិធីជួរដេកបឋម (ELEMENTARY ROW OPERATIONS)

- ប្រមាណវិធីជួរដេកបឋម (EROs) ថែងដូចខាងក្រោម:
  - ការជំនួសជួរដេក៖ *ជំនួសជួរដេកណាមួយ ដោយផលបូកខ្លួនវាជាមួយពហុគុណនៃជួរដេកផ្សេងទៀត។* $R_i^{\text{new}} \leftarrow R_i^{\text{old}} + \lambda R_j^{\text{old}}, \lambda \neq 0$
  - ការប្តូរជួរដេក៖ *ប្តូរគ្នារវាងជួរដេកពីរ ណាក៏បាន។* $R_i \leftrightarrow R_j, i \neq j$
  - ការគុណជួរដេក៖ *គុណគ្រប់ធាតុនៅក្នុងជួរដេកណាមួយជាមួយនឹងចំនួន ថេរខុសពីសូន្យ។* $R_i^{\text{new}} \leftarrow \lambda R_i^{\text{old}}, \lambda \neq 0$
- ម៉ាទ្រីសពីរមាន **ជួរដេកសមមូលគ្នា** (row equivalent) បើមានបំលាស់ប្តូបន្តបន្ទាប់នៃ EROs ដែលបម្លែងម៉ាទ្រីសមួយទៅម៉ា

ប្រមាណវិធីជួរដេកបឋម (ELEMENTARY ROW OPERATIONS)

- ចូរសម្គាល់ថា ប្រមាណ EROs ជាប្រមាណវិធីមានចម្រាស។
- បើម៉ាទ្រីសបន្ថែមរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរពីរ **សមមូលគ្នា** នោះប្រព័ន្ធទាំងពីរមានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា។
- ជាទូទៅ មានចម្ងល់ពីរ ទាក់ទងនឹងប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរគឺ៖
  1. តើប្រព័ន្ធមានលក្ខណៈ consistent? (យ៉ាងហោចណាស់ មានចម្លើយមួយ?)
  2. បើមានចម្លើយ ថាតើវាមានតែមួយគត់ឬ?

ទម្រង់អេសឺឡោនជួរដេក (REF) ឬ ទម្រង់អេសឺឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF)

- ម៉ាទ្រីសបន្ថែមរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយអាចកំណត់ចូលទម្រង់ខាងក្រោម៖
  - i. ជួរដេកមិនសូន្យទាំងអស់គឺនៅខាងលើជួរដេកសូន្យ។
  - ii. ធាតុនាំមុខរបស់ជួរដេកនីមួយៗ គឺស្ថិតក្នុងជួរឈរមួយនៅខាងស្តាំធាតុនាំមុខនៃជួរដេកខាងលើវា។
  - iii. ធាតុនាំមុខ (pivot) របស់ជួរដេកនីមួយៗ គឺស្មើនឹង 1 (pivot ជាធាតុ ដែលមិនសូន្យនៅខាងឆ្វេងគេបង្អស់ក្នុងជួរដេកមួយ គឺជាលេខ 1)។
  - iv. ធាតុទាំងអស់ក្នុងជួរឈរមួយ ដែលនៅខាងក្រោមធាតុនាំមុខ គឺត្រូវស្មើ 0 ។
  - iv′. ធាតុទាំងអស់ក្នុងជួរឈរមួយ ដែលនៅខាងលើ និងនៅខាងក្រោមធាតុនាំមុខ គឺត្រូវស្មើ 0
- ម៉ាទ្រីសបន្ថែមទម្រង់: (i), (ii), (iii), (iv) ហៅថា Row–Echelon Form
- ម៉ាទ្រីសបន្ថែមទម្រង់: (i), (ii), (iii), (iv′) ហៅថា Reduced Row–Echelon Form

ទម្រង់អេសឺឡោនជួរដេក (REF) ឬ ទម្រង់អេសឺឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF)

- តើម៉ាទ្រីសមួយណា មានទម្រង់ REF ឬ RREF?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 6 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

១. វិធីសាស្ត្របំបាត់ហ្គោស (GEM) (Gaussian Elimination Method)

i. សរសេរប្រព័ន្ធសមីការជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[A\,|\,B]$

ii. បម្លែងម៉ាទ្រីស $[A\,|\,B]$ អោយចូលរៀង REF

iii. កំណត់រក **អថេរគោល** (ជាអថេរដែលត្រូវគ្នានឹងជួរឈរណាមានធាតុ pivot, 1)។ ក្រៅពីនោះ អថេរផ្សេងទៀតដែលនៅសល់ គេហៅថា **អថេរសេរី** (ជាអថេរកំណត់បានស្រេចចិត្ត)។

iv. ប្រើការជំនួសត្រឡប់ក្រោយ (i.e., គណនារកតម្លៃអថេរ x_n, x_{n-1}, x_{n-2},…, x_2 , x_1) ដោយចាប់ផ្ដើមចេញពីសមីការខាងក្រោមគេបង្អស់។

២. វិធីសាស្ត្របំបាត់ហ្គោស-ជឌិន (GJEM) (Gauss-Jordan Elimination Method)

- ដូចគ្នានឹងវិធីទី១ (GEM) ដែរ លើកលែងតែចំណុចទី២៖

ii′. បម្លែងម៉ាទ្រីស $[A\,|\,B]$ អោយចូលរៀង RREF

អត្ថិភាព និងភាពមានតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ (EXISTENCE AND UNIQUENESS)

- Example 4: កំណត់ថាតើប្រព័ន្ធខាងក្រោម consistent ?

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad ----(1)$$

- Solution: គេបានម៉ាទ្រីសបន្ថែម៖

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

EXISTENCE AND UNIQUENESS

- Interchange rows 1 and 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- លុបតួ $5x_1$ ក្នុងជួរដេកទី៣ ដោយបូក $-5/2$ គុណជួរដេកទី១ ជាមួយជួរដេកទី៣ គេបាន៖

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix} \qquad ----(2)$$

EXISTENCE AND UNIQUENESS

- ប្រើតួ x_2 ក្នុងជួរដេកទី២ ដើម្បីបំបាត់តួ $-(1/2)x_2$ ចេញពីជួរដេកទី៣៖ បូក ($1/2$ គុណជួរដេកទី២) ជាមួយជួរដេកទី៣។

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \text{----(3)}$$

- ម៉ាទ្រីសបន្ថែមមានទម្រង់ត្រីកោណ។ ដូច្នេះ ត្រឡប់ទៅរកសំនេរជាសមីការ៖

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0 &= 5/2 \end{aligned} \qquad \text{----(4)}$$

EXISTENCE AND UNIQUENESS

- សមីការ $0 = 5/2$ អាចសរសេរបានជា

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5/2.$$

- ដូច្នេះ មិនមានតម្លៃ x_1, x_2, x_3 ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (4) ព្រោះសមីការ $0 = 5/2$ មិនអាចកើតឡើងបានទេ។

- ដោយ (4) និង (1) មានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា នោះគេបានប្រព័ន្ធសមីការដើមគឺ inconsistent (i.e., គ្មានចម្លើយ)។

Quiz 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Multiply the 2nd row by 8, and add the result to the 3rd row. Write down the answer.
2. Interchange rows 1 and 3 of the original matrix, after multiplying the 1st row by 2.

ជំពូក២.

លីមីត និងភាពជាប់

Lecture 2

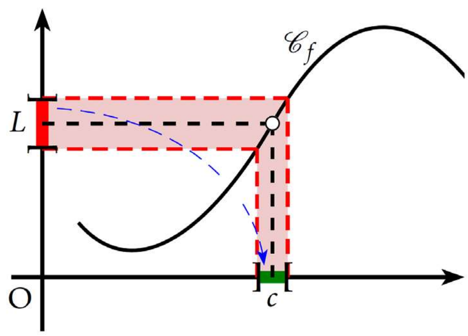
រំឭក

និយមន័យ: យក f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះបើក $I=(a,b)$ ផ្ទុកចំនួន c (អាចលើកលែងត្រង់ c បាន) និងកំណត់ L ជាចំនួនពិតមួយ។ គេបានសំណើរ

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

មានន័យថា

ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មានចំនួនពិត $\delta>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់
បើ $0<|x-c|<\delta$ នោះគេបាន $|f(x)-L|<\varepsilon$



ជារួម៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L ត្រង់ a បើគ្រប់ចន្លោះបើកផ្ទុក L ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗ c ។

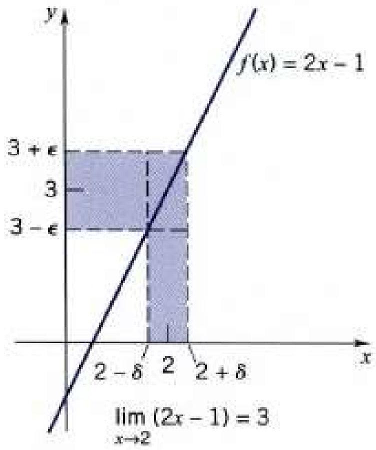
ឧទាហរណ៍:

- គេអោយលីមីត $\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$
- ចូររក δ ដើម្បីអោយ $|(2x-5)-1|<0.01$ កាលណា $0<|x-3|<\delta$
- ស្គាល់ $\varepsilon=0.01$ ។ រក δ ដោយបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃដាច់ខាត

$$|(2x-5)-1| \text{ និង } |x-3|$$

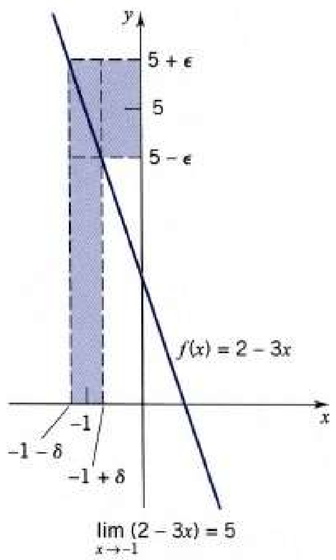
Practice 1. បង្ហាញថា

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$$



Practice 2. បង្ហាញថា

$$\lim_{x\to -1}(2-3x)=5$$



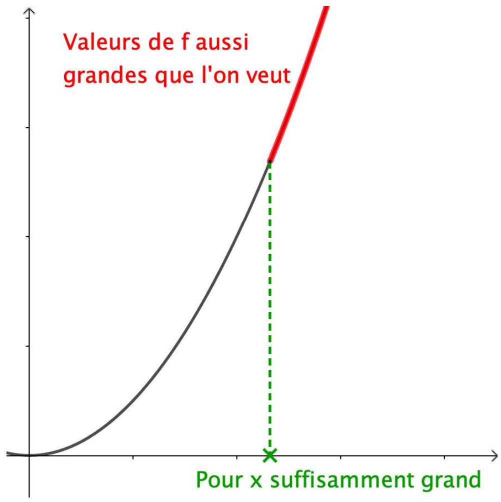
ហាំ ការីម

2.2. លីមីតនៅអនន្ត

1) លីមីតមិនកំណត់នៅ ∞

និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ នៅ $+\infty$ បើ $f(x)$ ធំស្រេចចិត្ត កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

សម្គាល់: គេមាននិយមន័យដូចគ្នា ចំពោះលីមីតនៅ $-\infty$ ។



ឧទាហរណ៍: អនុគមន៍ $f(x) = x^2$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត $+\infty$ ។ ព្រោះ

$$f(100) = 100^2 = 10000$$
$$f(1000) = 1000^2 = 1\,000\,000$$

ដូច្នេះ

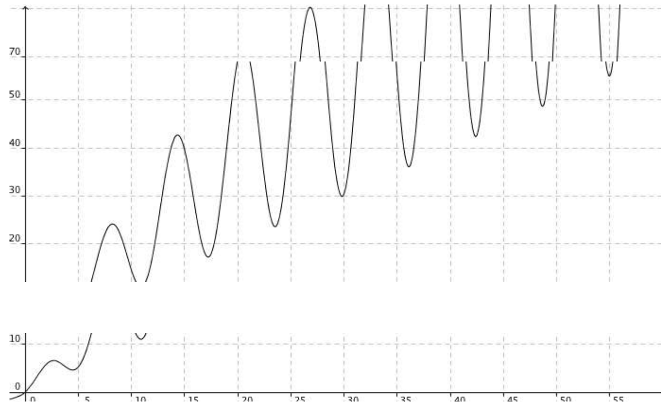
- តម្លៃអនុគមន៍កាន់តែធំទៅៗ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម
- បើគេកំណត់ចន្លោះទូទៅមួយ $]a\,;\,+\infty[$ នោះគ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

និយមន័យ:

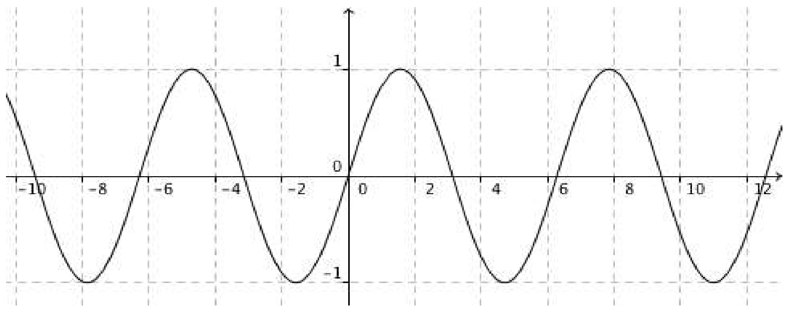
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ នៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះ $]a\,;\,+\infty[$, a ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $-\infty$ នៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះ $]-\infty\,;\,b[$, b ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

សម្គាល់:

- អនុគមន៍ដែលខិតទៅរក $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត $+\infty$ មិនចាំបាច់ជាអនុគមន៍កើននោះទេ។ ជាឧទាហរណ៍៖



- មានអនុគមន៍ខ្លះ គ្មានលីមីតនៅអនន្តទេ។ ដូចជាអនុគមន៍ ស៊ីនុសសូអីតៈ



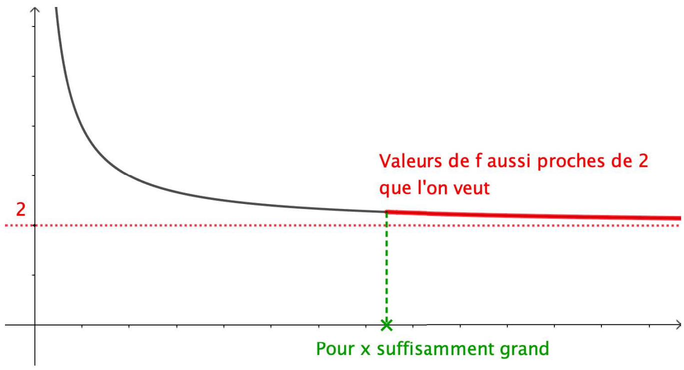
2) លីមីតកំណត់នៅ ∞

និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត L នៅត្រង់ $+\infty$ បើ $f(x)$ ខិតទៅក្បែរៗ L កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម ។ គេតាង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ។

សម្គាល់: ដូចគ្នាចំពោះនិយមន័យនៅត្រង់ $-\infty$ ។

ឧទាហរណ៍: អនុគមន៍ $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ មានលីមីតស្មើ 2 កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty$ ។ ព្រោះ:

- $f(100) = 2 + \frac{1}{100} = 2.01$
- $f(10000) = 2 + \frac{1}{10000} = 2.0001$

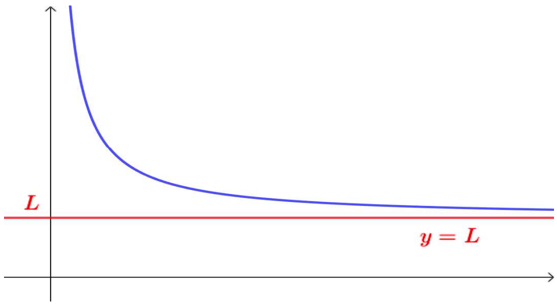


ដូច្នេះ

- តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្បែរ 2 កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។
- ក្រាហ្វរបស់អនុគមន៍ ខិតទៅជិតបន្ទាត់ $y = 2$ តែមិនអាចប៉ះបានទេ។

- ប្រសិនបើគេកំណត់យកចន្លោះបើកមួយដែលផ្ទុកចំនួន 2 នោះគ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាល x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

និយមន័យ៖ បើ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ នោះគេហៅបន្ទាត់ $y = L$ ថា **អាស៊ីមតូតដេក** (horizontal asymptotic) របស់អនុគមន៍ f នៅ $+\infty$ ។



និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត L នៅត្រង់ $+\infty$ បើគ្រប់ចន្លោះបើកដែលផ្ទុក L ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃទាំងអស់របស់ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ គេតាងដោយ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

សម្គាល់៖ ដូចគ្នាចំពោះនិយមន័យនៅត្រង់ $-\infty$ ។

3) លីមីតរបស់អនុគមន៍សំខាន់ៗ

i. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

ii. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

iii. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (n គូ)

iv. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (n សេស)

v. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

vi. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

vii. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2.3. លីមីតអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនពិត c

1) និយមន័យ

និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ ត្រង់ c បើ $f(x)$ ធំស្រេចចិត្ត កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗ c ។

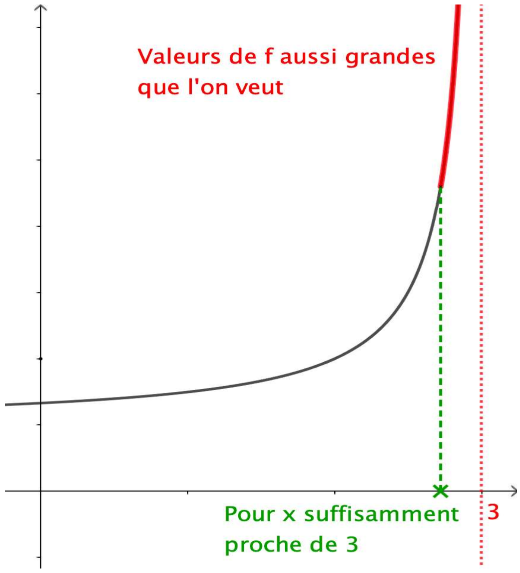
ឧទាហរណ៍: អនុគមន៏ $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត 3 ។

ព្រោះ

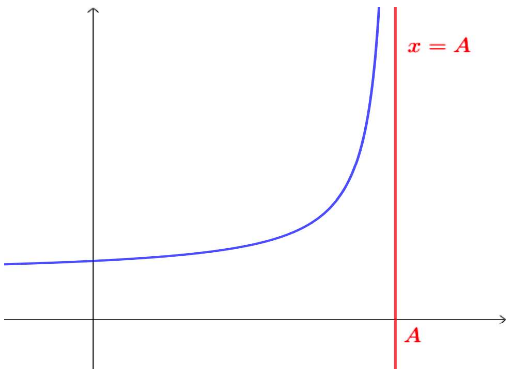
- $f(2.99) = \frac{1}{3-2.99} + 1 = 101$
- $f(2.9999) = \frac{1}{3-2.9999} + 1 = 10\,001$

ដូច្នេះ

- តម្លៃរបស់អនុគមន៏កាន់តែធំទៅៗ x កាន់តែខិតទៅជិតចំនួន 3
- ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៏ខិតទៅជិតបន្ទាត់ $x = 3$ តែមិនអាចប៉ះបានទេ
- បើគេកំណត់បានចន្លោះមួយ $]a\,;+\infty[$ នោះ គ្រប់តម្លៃរបស់អនុគមន៏ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះនេះ កាលណា x កាន់តែខិតទៅជិត 3



និយមន័យ: បើ $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = c$ ហៅថា **អាស៊ីមតូតឈរ** ចំពោះខ្សែកោងរបស់អនុគមន៏ f ។



និយមន័យ :

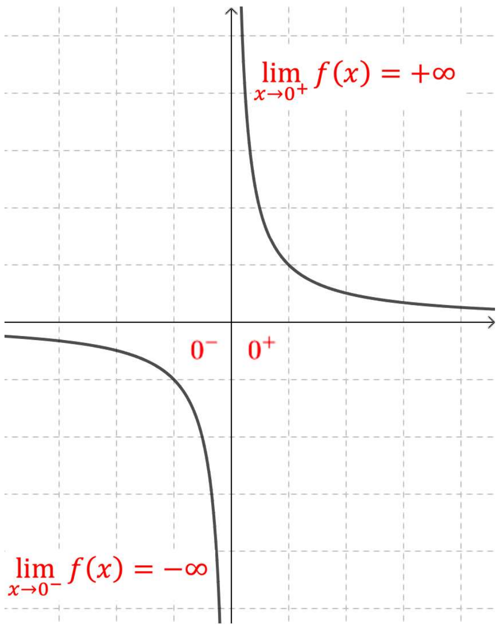
- គេថាអនុគមន៏ f កំណត់បានលីមីត $+\infty$ ត្រង់ចំណុច c បើគ្រប់ចន្លោះបើក $]a\,;+\infty[$, a ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗចំណុច c ។ គេតាងដោយ :
$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$
- គេថាអនុគមន៏ f កំណត់បានលីមីត $-\infty$ ត្រង់ចំណុច c បើគ្រប់ចន្លោះបើក $]-\infty\,; b[$, b ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅក្បែរៗចំណុច c ។ គេតាងដោយ :
$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

2) លីមីតឆ្វេង - លីមីតស្ដាំ

ឧទាហរណ៍: គេអោយអនុគមន៍ច្រាសកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

គេបាន f កំណត់បានលីមីតផ្សេងៗគ្នា ត្រង់ 0 តាមករណី ដែល $x>0$ ឬ $x<0$ ។



- បើ $x>0$: កាលណា x ខិតទៅរក 0 គេបាន $f(x)$ ខិតទៅរក $+\infty$ ។ គេតាង:

  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$

ក្នុងករណីនេះ គេហៅថា លីមីតខាងស្ដាំ 0 ឬ លីមីតស្ដាំត្រង់ 0

- បើ $x<0$: កាលណា x ខិតទៅរក 0 គេបាន $f(x)$ ខិតទៅរក $-\infty$ ។ គេតាង:

  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ ឬ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

ក្នុងករណីនេះ គេហៅថា លីមីតខាងឆ្វេង 0 ឬ លីមីតឆ្វេងត្រង់ 0

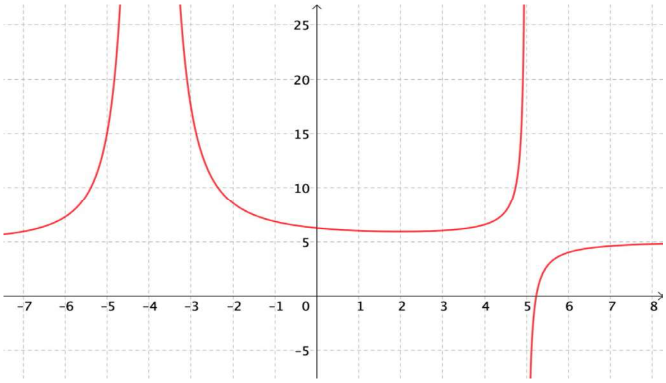
Practice 1: កំណត់លីមីតរបស់អនុគមន៍មួយ ដោយប្រើក្រាហ្វ៖

គេអោយក្រាហ្វតំណាងអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម៖

a) ដោយប្រើក្រាហ្វ ចូរកំណត់លីមីតត្រង់ $-\infty$, ត្រង់ $+\infty$, ត្រង់ -4 និងត្រង់ 5 ។

b) ចូរបំពេញតារាងអថេរភាពរបស់ f ។

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					

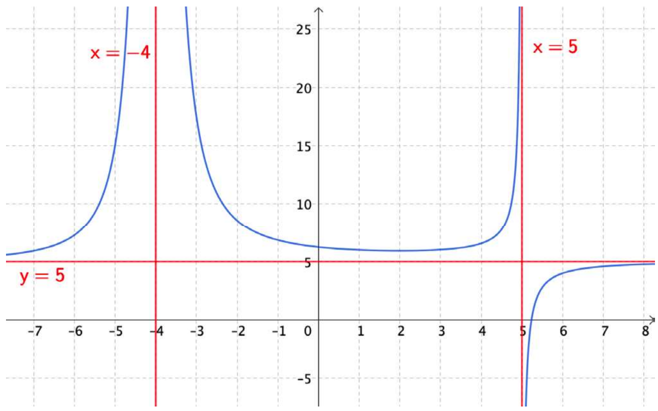


ចម្លើយ៖

a)

b)

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	5



2.4. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

1) ប្រើលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីលើលីមីត

យកតម្លៃ α អាចតាងអោយ $+\infty, -\infty$ ឬចំនួនកុំផ្លិច។

ផលបូក/ផលដក

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	I.F.*

* Indeterminate Form: គេមិនអាចទស្សន៍ទាយតម្លៃលីមីតបានទេ។

ផលគុណ ∞ តាងអោយ $+\infty$ ឬ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	I.F.

ក្នុងករណីនេះ គេអនុវត្តវិធានរបស់សញ្ញា ដើម្បីកំណត់បានថាតើផលគុណ ស្មើ $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។

ផលចែក ∞ តាងអោយ $+\infty$ ឬ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	I.F.	I.F.

ក្នុងករណីនេះ គេអនុវត្តវិធានរបស់សញ្ញា ដើម្បីកំណត់បានថាតើផលចែក ស្មើ $+\infty$ ឬ $-\infty$ ។

Practice 2: គណនាលីមីតរបស់អនុគមន៍មួយ ដោយប្រើរូបមន្ត

ចូរកំណត់លីមីតខាងក្រោម:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3}$

ចម្លើយ៖ a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty$

គេបាន លីមីតផលគុណ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to3^-} 1-2x = 1-2\times3 = -5 \\ \lim\limits_{x\to3^-} x-3 = 0^- \end{cases}$$

លីមីតមានទម្រង់ $\frac{5}{0}$ ត្រូវស្មើ ∞ ។

ដូច្នេះ តាមវិធានសញ្ញា គេបានលីមីតក្រោមទម្រង់ $\frac{-5}{0^-}$ ត្រូវស្មើ $+\infty$ ។

ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1-2x}{x-3} = +\infty$

2) លីមីតក្រោមទម្រង់មិនកំណត់

គេមានរាងមិនកំណត់ :

$\infty - \infty$ $0\times\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Practice 3: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតផលគុណកត្តា (1)

គណនា: $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$

ចម្លើយៈ $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1=?$

ដោយ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.\end{cases}$

គេបានទម្រង់មិនកំណត់ $\infty-\infty$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ :

$$-3x^3+2x^2-6x+1 = x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ និង តាមលីមីតផលបូក :

$$\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3$$

ដូច្នេះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\end{cases}$

ដូច្នេះ លីមីតនៃផលគុណ :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$$

Practice 4: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតផលគុណកត្តា (2)

គណនា: a) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ b) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}$

ចម្លើយ

a) ពិនិត្យមើលភាគយក និងភាគបែងរបស់ប្រភាគ ។ គេបាន A មានទម្រង់មិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$

គេបានលីមីតផលបូក :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2}=6$$

ហើយ លីមីតផលចែក :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}$

b) B មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដោយដាក់ផលគុណកត្តានូវឯកធាដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ សម្រាប់ភាគយក និងភាគបែង :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{x^2}{x}\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

ដែល $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$

គេបានលីមីតផលបូក :

$$\lim_{x\to-\infty}3+\frac{2}{x^2}=3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}4-\frac{1}{x}=4$$

ហើយលីមីតផលចែក:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ ដូច្នេះ លីមីតផលគុណ គឺ :

$$\lim_{x\to-\infty}x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}=-\infty$

Practice 5: ចេញពីទម្រង់មិនកំណត់ បង្កើតកន្សោមឆ្លាស់

គណនា: a) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ b) $B = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

ចម្លើយៈ

a) គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$។ គេបាន A មានរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$

ដោយគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ គេបាន:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

- លីមីតផលបូក $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$
- លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$

b) គេមាន $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5} x - 5 = 5 - 5 = 0 \end{cases}$

ដូច្នេះ លីមីត B មានរាង $\frac{0}{0}$

ដោយគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ គេបាន:

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$= \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$= \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4$ និង លីមីតផលចែក: $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$ គេបានៈ

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$$

Practice 6: កំណត់រកអាស៊ីមតូត

យក f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ដោយ $f(x)=\frac{-2}{1-x}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ក្រាហ្វរបស់ f កំណត់បានអាស៊ីមតូត ដែលគេអាចប្រាប់ប្រភេទ និងសមីការរបស់វាបាន។

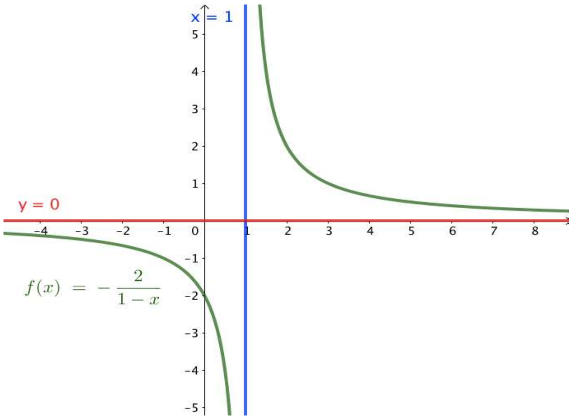
ចម្លើយ៖

- ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ នោះគេបានលីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-x}=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x}=0$ ។

គេបាន បន្ទាត់ $y=0$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរ របស់ក្រាហ្វអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ $-\infty$ ។

- ដោយ $\lim\limits_{x\to1^-} 1-x=0^+$ ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-2}{1-x}=-\infty$ ។ ម៉្យាងទៀត $\lim\limits_{x\to1^+} 1-x=0^-$ ដូច្នេះ លីមីតផលចែក $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-2}{1-x}=+\infty$ ។

គេបាន បន្ទាត់ $x=1$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាហ្វអនុគមន៍ f ។



2.5. លីមីតអនុគមន៍បណ្ដាក់

Practice 7: កំណត់លីមីតរបស់អនុគមន៍បណ្ដាក់

គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ដោយ $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$ ។ ចូរគណនាលីមីតរបស់អនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ។

ចម្លើយ៖ គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}=2$

ដូច្នេះ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$

ព្រោះ បើ $x\to+\infty$ នោះគេបាន $X=2-\frac{1}{x}\to2$ ហើយ $\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$ ។

2.6. លីមីត និងវិធានប្រៀបធៀប

1) ទ្រឹស្តីបទប្រៀបធៀប

ទ្រឹស្តីបទ: យក f និង g ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់លើចន្លោះបើក $I =]a\,;\,+\infty[$ ។

- បើគ្រប់ x ក្នុង I : $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (Fig.1)
- បើគ្រប់ x ក្នុង I : $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (Fig.2)

សម្គាល់: គេទទួលបានទ្រឹស្តីបទដូចគ្នា នៅត្រង់ $-\infty$ ។

គេអាចនិយាយបានថា អនុគមន៍ f រុញអនុគមន៍ g ទៅ $+\infty$ ចំពោះតម្លៃ x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។

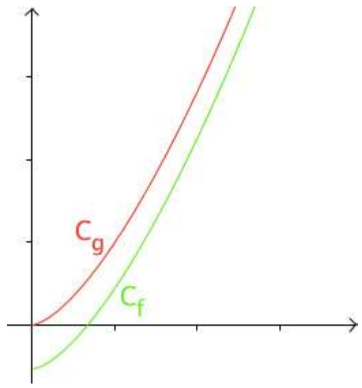


Figure 1

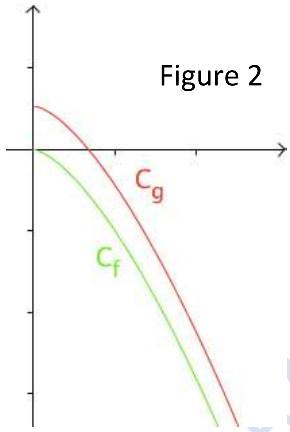


Figure 2

សម្រាយបញ្ជាក់ករណីរូបទី 1 :

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ដូច្នេះគ្រប់ចន្លោះបើក $]m\,;\,+\infty[$, m ជាចំនួនពិត ផ្ទុកគ្រប់តម្លៃរបស់ $f(x)$ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម។ សន្មតយក $f(x) > m$ ។
ឬម្យ៉ាងទៀត កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម គេមាន $f(x) \le g(x)$ ។
ដូច្នេះ កាលណា x ធំគ្រប់គ្រាន់ល្មម គេបាន $g(x) > m$ ។ដូច្នេះ

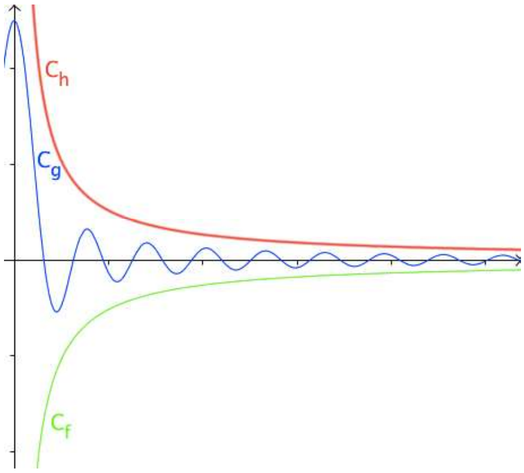
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

2) ទ្រឹស្តីបទ Sandwich

ទ្រឹស្តីបទ: យក f, g និង h ជាអនុគមន៍បីកំណត់លើចន្លោះបើក $I =]a\,;\,+\infty[$ ។ដូច្នេះ

បើគ្រប់ x ក្នុង I : $\begin{cases} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ នោះគេបាន $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L$ ។ 16

សម្គាល់: គេទទួលបានទ្រឹស្តីបទដូចគ្នា នៅត្រង់ $-\infty$ ។



គេអាចនិយាយថា អនុគមន៍ f និង h (គឺជាប៉ូលីស) កំពុងតែកៀបអនុគមន៍ g ចំពោះតម្លៃ x ធំល្មម ដើម្បីអោយវាមានលីមីតដូចគ្នា ។

Practice 8: ប្រើទ្រឹស្តីប្រៀបធៀប និងទ្រឹស្តីបទ sandwich

គណនា 1) $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

ចម្លើយ៖ 1)

- ដោយ $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ គ្មាន ដូច្នេះ លីមីតដែលត្រូវរក គឺកំណត់មិនបាន ។

ដកចេញទម្រង់កំណត់មិនបាន $-1 \le \sin x$ ។ ដូច្នេះ $x - 1 \le x + \sin x$ ។

- គេមាន $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទប្រៀបធៀប :

$$\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$$

- ដោយ $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ គ្មាន ដូច្នេះ លីមីតដែលត្រូវរក គឺកំណត់មិនបាន។

ដោយដកចេញ ទម្រង់កំណត់មិនបាន $-1 \le \cos(x) \le 1$ ។ ដូច្នេះ គេបាន

$$-x \le x\cos(x) \le x, \text{car } x > 0$$

ដូច្នេះ

$$-\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ gendarmes គេបាន: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0$

2.7. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1) លីមីតទាល់

លក្ខណៈ:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ និង } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

អនុវត្តន៍: គណនាលីមីតអនុគមន៍មានតួអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គណនា:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

ចម្លើយ៖ a)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ នោះតាមលីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$

ព្រោះ កាលណា $x \to +\infty$ គេបាន: $X = -3x \to -\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ នោះតាមលីមីតផលបូក គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-3x} = +\infty$

b) ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

ដូច្នេះ តាមលីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1 = e$ ។

2) ប្រៀបធៀបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង ស្វ័គុណ

ហាំ ការីម

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ (តចប់)

(System of linear equations, Lecture 3.)

កៅ មុយសាន
ហាំ ភារីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

វត្ថុបំណង | ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា - រ៉ង់ - និងលំហជួរដេក | អនុវត្តន៍ RREF៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

HK | Chapter 2

មាតិកាសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

វត្ថុបំណង

- ពិភាក្សាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ ដោយប្រើភាពសមមូលជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស។
- កំណត់រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសដោយប្រើម៉ាទ្រីសទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម។
- កំណត់លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស ដោយបង្កើតសំណុំនៃបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រទាក់ទងនឹងម៉ាទ្រីសនោះ ព្រមទាំងបញ្ជាក់បានភាពមិនប្រែប្រួលក្រោមប្រមាណវិធីជួរដេក។
- រកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសមួយ ដោយប្រើទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម។
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ ដោយប្រើម៉ាទ្រីសច្រាស។

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា និង លំហជួរដេក

និយមន័យ ១

(i) ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរពីរ មាន m សមីការ និងមាន n អថេរ ជា ប្រព័ន្ធសមមូលគ្នា លុះត្រាតែ មានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា។

(ii) ម៉ាទ្រីសបន្ថែម **D** សមមូលជួរដេក ទៅនឹងម៉ាទ្រីសបន្ថែម **C** លុះត្រាតែ ម៉ាទ្រីស **D** បានមកពីម៉ាទ្រីស **C** តាមរយៈការអនុវត្តប្រមាណវិធីជួរដេក (EROs) ប្រភេទទី (I), (II) និង (III) ទៅលើម៉ាទ្រីសនេះ។

គេបាន ប្រព័ន្ធទាំងពីរខាងក្រោមសមមូលគ្នា

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} x + 4y &= 14 \\ 5x - 2y &= 4 \end{cases}$$

ព្រោះប្រព័ន្ធទាំងពីរមានសំណុំចម្លើយតែមួយដូចគ្នា គឺ $\{(2,3)\}$ ។

Cont...

- ចំពោះម៉ាទ្រីសណាមួយ គេបានទាំងទម្រង់ REF និងទម្រង់ RREF របស់វា សុទ្ធតែជាម៉ាទ្រីសដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសនោះ។
- បើម៉ាទ្រីស **D** សមមូលជួរដេកទៅនឹង **C** នោះគេថា ម៉ាទ្រីស **C** ក៏សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស **D** វិញដែរ ព្រោះប្រមាណវិធី EROs ក៏មានចម្រាសមកវិញដែរ (សូមមើល តារាង 2.1)។

Table 2.1. EROs និង ចម្រាសរបស់វា

ប្រភេទ	ប្រមាណវិធី	ប្រមាណវិធីច្រាស
(I)	$R_i^{\text{New}} \longleftarrow cR_i^{\text{old}}, \ c \neq 0$	$R_i^{\text{old}} \leftarrow \frac{1}{c} R_i^{\text{New}}$
(II)	$R_i \longleftrightarrow R_j, \ \ i \neq j$	$R_j \longleftrightarrow R_i$
(III)	$R_i^{\text{New}} \longleftarrow R_i^{\text{old}} + cR_j^{\text{old}}, \ \ c \neq 0$	$R_i^{\text{old}} \longleftarrow R_i^{\text{new}} - cR_j^{\text{old}}$

Cont...

ទ្រឹស្តីបទ ២

គេអោយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ។ *បើ* $[\mathrm{C} \mid \mathrm{D}]$ *សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសបន្ថែម* $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$ *នោះគេថា ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ* $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ *សមមូលគ្នាទៅនឹងប្រព័ន្ធ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់.

- យក S_A ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ និង
- យក S_C ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$ ។

ដូច្នេះ ស្រាយថា បើ $[\mathbf{C} \mid \mathbf{D}]$ សមមូលជួរដេកទៅនឹង $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$ នោះគេបាន $S_A = S_C$? □

ពិនិត្យមើលសម្រាយចំពោះប្រមាណវិធីជួរដេកទី (III) ខាងក្រោម។

Cont...

- Type (III) Operation: ឧបមាថា ប្រព័ន្ធសមីការដើមមានទម្រង់៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

យើងប្រើប្រមាណវិធីជួរដេកទី៣៖ $R_j^{\text{new}} \leftarrow qR_i^{\text{old}} + R_j^{\text{old}}$ $(i \neq j)$ ។ គេបានសមីការទី j ថ្មី៖

$$(qa_{i1} + a_{j1})\, x_1 + (qa_{i2} + a_{j2})\, x_2 + \cdots + (qa_{in} + a_{jn})\, x_n = qb_i + b_j.$$

យក $S_A = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ជាសំណុំចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធដើម។ ដូច្នេះ $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ គឺជាចម្លើយរបស់សមីការទី i និងសមីការទី j នៅក្នុងប្រព័ន្ធដើម។ គេបាន

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i \quad \text{និង} \quad a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \cdots + a_{jn}s_n = b_j$$

ដូច្នេះ $(qa_{i1} + a_{j1})\, s_1 + (qa_{i2} + a_{j2})\, s_2 + \cdots + (qa_{in} + a_{jn})\, s_n = qb_i + b_j$
មានន័យថា៖ $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ជាចម្លើយមួយចំពោះសមីការទី j ថ្មី។

រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីស

- ពេលណាយើងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan ទៅលើប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ ពេលនោះគេទទួលបានម៉ាទ្រីសបន្ថែមតែមួយគត់។ ក្នុងន័យនេះ គេថាៈ **គ្រប់ម៉ាទ្រីសទាំងអស់សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសតែមួយគត់ក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF)**។
- តាមន័យខាងលើ គេអាចមានម៉ាទ្រីសជាច្រើននៅក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេក ដែលវាសមមូលជួរដេកជាមួយគ្នា។ ដូច្នេះ វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan មានសារៈសំខាន់ជាងវិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss។

វត្ថុបំណង ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា - រ៉ង់ - និងលំហជួរដេក អនុវត្តន៍ RREF៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

រ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីស

- ពេលណាយើងប្រើវិធីបំបាត់ Gauss-Jordan ទៅលើប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមួយ ពេលនោះគេទទួលបានម៉ាទ្រីសបន្ថែមតែមួយគត់។ ក្នុងន័យនេះ គេថាៈ **គ្រប់ម៉ាទ្រីសទាំងអស់សមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីសតែមួយគត់ក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF)**។
- តាមន័យខាងលើ គេអាចមានម៉ាទ្រីសជាច្រើននៅក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេក ដែលវាសមមូលជួរដេកជាមួយគ្នា។ ដូច្នេះ វិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss-Jordan មានសារៈសំខាន់ជាងវិធីសាស្ត្របំបាត់ Gauss។

និយមន័យ ៣

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$។ គេបាន រ៉ង់របស់ $\mathbf{A}$ (តាងដោយ $\text{rank}(\mathbf{A})$) គឺជាចំនួនជួរដេកមិនសូន្យ (i.e., ជួរដេកដែលមានធាតុនាំមុខ) ស្ថិតក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF) ដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$។

Cont...

ពិនិត្យម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{និង} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 12 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 22 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

ទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួមរបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ កំណត់បានដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \quad \text{និង} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 3$ ហើយ $\operatorname{rank}(\mathbf{B} = 2$។

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន និង រ៉ង់

យើងអាចសិក្សាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនបាន ដោយប្រើរ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម។

ទ្រឹស្តីបទ ៤

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ មាន n អថេរ។ គេបាន

(1) *បើ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយងាយ (trivial solution=ចម្លើយសូន្យ) តែមួយគត់។*

(2) *បើ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែននេះមានចម្លើយផ្សេងក្រៅពីចម្លើយងាយ (nontrivial)។ i.e., ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។*

ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន និង រ៉ង់

យើងអាចសិក្សាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនបាន ដោយប្រើរ៉ង់របស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម។

ទ្រឹស្តីបទ ៤

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *មាន* n *អថេរ។ គេបាន*

(1) *បើ* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ *នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយងាយ (trivial solution=ចម្លើយសូន្យ) តែមួយគត់។*

(2) *បើ* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ *នោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែននេះមានចម្លើយផ្សេងក្រៅពីចម្លើយងាយ (nontrivial)។ i.e., ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។*

សម្រាយបញ្ជាក់.

ចំពោះម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{0}]$ គេបានចំនួនធាតុ pivots ស្មើនឹង $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$។

- យក $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ ។ គេបាន៖

- យក $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ ។ គេបាន៖

Cont..

Corollary ៥

យក $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ *ជាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមួយ ដែលមាន* m *សមីការលីនេអ៊ែរ និង* n *អថេរ។ ដូច្នេះ បើ* $m < n$ *នោះគេថាប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនគ្មានចម្លើយងាយទេ។*

គេអោយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន៖

$$\begin{cases} -4c_1 + 2c_2 + 6c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ 2c_1 - 4c_3 = 0 \end{cases}$$

ចូរសន្និដ្ឋាន?

លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស

- ចូរចងចាំថា បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ នោះគេបាន ជួរដេករបស់ $\mathbf{A}$ គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមានកូអរដោនេចំនួន n ។ មានន័យថា ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ $\mathbb{R}^n$ ។

និយមន័យ ៦

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ ។ គេបាន សំណុំរងរបស់ $\mathbb{R}^n$ គឺជាសំណុំផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រដែលជាបន្សំលីនេអ៊ែររបស់ជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ គេហៅសំណុំរងនេះថា **លំហជួរដេក** របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។

$$\mathrm{col}(\mathbf{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_n r_n \right\}$$

ដែល $r_i, i = 1, \cdots, n$ ជាវ៉ិចទ័រជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ហើយ c_i ជាស្កាលែរ។

វត្ថុបំណង | ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរសមមូលគ្នា - រ៉ង់ - និងលំហជួរដេក | អនុវត្តន៍ RREF៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស

- ចូរចងចាំថា បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ នោះគេបាន ជួរដេករបស់ $\mathbf{A}$ គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមានកូអរដោនេចំនួន n ។ មានន័យថា ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ $\mathbb{R}^n$ ។

និយមន័យ ៦

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ ។ គេបាន សំណុំរងរបស់ $\mathbb{R}^n$ គឺជាសំណុំផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រដែលជាបន្សំលីនេអ៊ែររបស់ជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ គេហៅសំណុំរងនេះថា **លំហជួរដេក** របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។

$$\mathrm{col}(\mathbf{A}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots c_n r_n \right\}$$

ដែល $r_i, i = 1, \cdots, n$ ជាវ៉ិចទ័រជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ហើយ c_i ជាស្កាលែរ។

គេអោយម៉ាទ្រីស៖ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ ។ តើ $[5, 17, -20] \in \mathrm{col}(\mathbf{A})$? ពិនិត្យ

$$[5, 17, -20] = c_1[3, 1, -2] + c_2[4, 0, 1] + c_3[-2, 4, -3]$$

រួចដោះស្រាយរក c_1, c_2 និង c_3? Ans. $c_1 = 5, c_2 = -1$ និង $c_3 = 3$

សមមូលជួរដេកកំណត់បានលំហជួរដេក

ទ្រឹស្តីបទ ៧

បើម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ សមមូលជួរដេកនឹងគ្នា នោះគេបាន លំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ស្មើនឹងលំហជួរដេករបស់ $\mathbf{B}$ ។

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 & 33 & 19 \\ 3 & 6 & -4 & -25 & -11 \\ 1 & 2 & -2 & -11 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

គេបានទម្រង់ RREF របស់ $\mathbf{A}$ គឺ៖ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ដូច្នេះ លំហជួរដេករបស់ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ស្មើគ្នា។

ម៉ាទ្រីសច្រាស

គេតាង $\mathbf{A}^{-1}$ ហៅថា ច្រម្រាស របស់ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ មានលំដាប់ $n \times n$។ គេបាន៖

- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{B}$ ជាចម្រាសរបស់ $\mathbf{A}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$។
- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីស singular លុះត្រាតែ វាគ្មានចម្រាស។ $\mathbf{A}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ វាមានចម្រាស។
- បើ $\mathbf{B}$ និង $\mathbf{C}$ ជាចម្រាសពីររបស់ម៉ាទ្រីសការ $\mathbf{A}$ នោះគេបាន $\mathbf{B} = \mathbf{C}$។
- បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ នោះគេបាន៖

$$\text{គ្រប់ } k \geq 2, \mathbf{A}^{-k} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$$

វិធីសាស្ត្ររកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសមួយ

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។

(1) **Step 1:** សរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ ។

(2) **Step 2:** បម្លែងម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ អោយចូលទម្រង់ RREF ។

(3) **Step 3:** បើ n ជួរឈរដំបូងរបស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ មិនអាចបម្លែងទៅជាម៉ាទ្រីស $\mathbf{I}_n$ បានទេ នោះគេថា ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គ្មានចម្រាស់ (singular) ។

(4) **Step 4:** ផ្ទុយមកវិញ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ មានចម្រាស (nonsingular)។ ដូច្នេះ ជួរឈរចំនួន n ចុងក្រោយរបស់ម៉ាទ្រីសបន្ថែមក្នុងទម្រង់ RREF គឺជាម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}^{-1}$។ i.e., ម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ បង្រួមជួរដេកទៅរក $[\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}]$ ។

ចូររកចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -4 & 12 & -9 \\ 2 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

Cont...

គេបានម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×6 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -9 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ហើយម៉ាទ្រីស RREF របស់វា គឺ៖

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

គេបាន ចម្រាស់របស់ $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3$?

លក្ខណះរបស់ម៉ាទ្រីសច្រាស

យក $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស លំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន៖

(i) $\mathbf{A}^{-1}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}^{k}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{k}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{k} = \mathbf{A}^{-k}$, គ្រប់ចំនួនគត់ k

(iii) $\mathbf{AB}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(iv) $\mathbf{A}^{T}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular ហើយ $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$

(v) បើ s និង t ជាចំនួនគត់ គេបាន

$$\mathbf{A}^{s+t} = \left(\mathbf{A}^{s}\right)\left(\mathbf{A}^{t}\right)$$

$$\left(\mathbf{A}^{s}\right)^{t} = \mathbf{A}^{st} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{s}$$

ទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់២)

ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *មានចម្រាសលុះត្រាតែ* $\delta = ad - bc \neq 0$ *។ គេបាន*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(សម្រាយ. ប្រើម៉ាទ្រីស $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_2]$)

ទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទ ៩

1. *ម៉ាទ្រីសការេ* $\mathbf{A}$ *លំដាប់* $n \times n$ *ជាម៉ាទ្រីស* $nonsingular$ *លុះត្រាតែ* $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$។
2. *គេអោយប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *ដែលម៉ាទ្រីសមេគុណ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីសការេ។ គេបាន៖*
   1. *បើ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីស* $nonsingular$ *នោះប្រព័ន្ធនេះមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ៖*
   $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
   2. *បើ* $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីស* $singular$ *នោះប្រព័ន្ធនេះ អាចគ្មានចម្លើយ ឬមានចម្លើយរាប់មិនអស់។*

គេអោយប្រព័ន្ធ 3×3៖

$$\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{មានន័យថា} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

Cont...

ដោយម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ គេបាន $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$។ ដូច្នេះ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ដេទែរមីណង់

(Determinants and Eigenvalues, Lecture 1.)

ហាំ ការីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP **អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា**
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

វត្ថុបំណង

- រៀននិយមន័យរបស់ដេទែមីណង់
- រៀនលក្ខណៈគ្រឹះរបស់ដេទែមីណង់ និងវិធីអនុវត្តន៍របស់វា

សេចក្តីផ្តើម៖ វិធាន Sarrus ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ $1 \times 1, 2 \times 2$ និង 3×3

- ដេទែរមីណង់ គឺជាអនុគមន៍

$$\det : \left\{ \text{ម៉ាទ្រីសការេ} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងក្រោម៖

1) ជំនួសជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ មិនប្រែប្រួល $\det(\mathbf{A})$ ។
2) គុណជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ ដោយស្កាលែរ c ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹងតម្លៃ c ។
3) ប្តូរជួរដេកពីររបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹង -1។
4) ដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសឯកតា ស្មើ 1។

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 1×1: $\quad |\mathbf{A}| = a$
- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 :

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = afj + bgh + cei - hfc - iga - jeb$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a & b & c & a & b \\ e & f & g & e & f \\ h & i & j & h & i \\ - & - & - & & \end{array}$$

Example

ចូរគណនាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ans. -123

អនុវត្តន៍: Areas and Volumes

ទ្រឹស្តីបទ ១

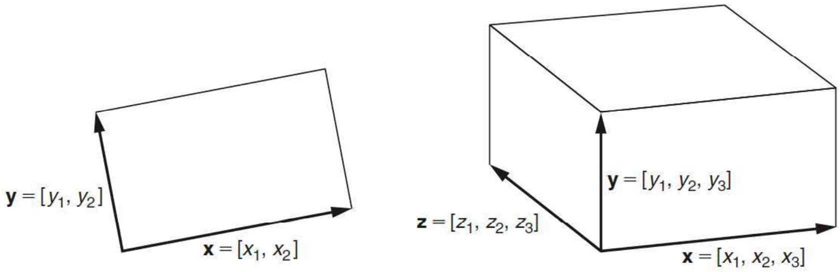
(i) *គេអោយវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ *និង* $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ *ជាវ៉ិចទ័រពីរមិនស្របគ្នាក្នុង* $\mathbb{R}^2$ *ដែលមានគល់រួមត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x}$ *និង* $\mathbf{y}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតរបស់ដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(ii) *យកវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ *និង* $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ *ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ដែលមានគល់រួមនៅត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត ដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *និង* $\mathbf{z}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Cont.



(a) (b)

Note: តាមទ្រឹស្តីបទ (i) ខាងលើ បើ $\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ និង $\mathbf{y} = \overrightarrow{\mathbf{PR}}$ នោះគេបាន ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានកំពូល $\mathbf{P}(x_P, y_P), \mathbf{Q}(x_Q, y_Q)$ និង $\mathbf{R}(x_R, y_R)$ ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖

$$S_{\triangle\mathbf{PQR}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{ឬ} \quad S_{\triangle\mathbf{PQR}} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

Example

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលមានជ្រុង $\mathbf{x} = [-2, 1, 3], \mathbf{y} = [3, 0, -2]$ និង $\mathbf{z} = [-1, 3, 7]$ កំណត់ដោយ

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

Ans. $|-4| = 4$

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ២

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$, $n \geq 2$ ។ ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(n-1) \times (n-1)$ ដែលទទួលបានដោយលុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ ធាតុមីន័រ (minor) ត្រង់ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}_{ij}|$ គឺជាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ ។

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ ។ គេបានធាតុ minors ៖

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -8,$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -5, \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 28, \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -31,$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ៣

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ដែល $n \geq 2$ ។ កូហ្វាក់ទ័រ (cofactor) ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $\mathbf{c}_{ij}$ កំណត់ដោយ៖

$$\mathbf{c}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{11} &= (-1)^{1+1} |\mathbf{A}_{11}| = (-1)^2(3) = 3 \\
\mathbf{c}_{12} &= (-1)^{1+2} |\mathbf{A}_{12}| = (-1)^3(6) = 6 \\
\mathbf{c}_{13} &= (-1)^{1+3} |\mathbf{A}_{13}| = (-1)^4(-8) = -8 \\
\mathbf{c}_{21} &= (-1)^{2+1} |\mathbf{A}_{21}| = (-1)^3(-5) = 5 \\
\mathbf{c}_{22} &= (-1)^{2+2} |\mathbf{A}_{22}| = (-1)^4(28) = 28 \\
\mathbf{c}_{23} &= (-1)^{2+3} |\mathbf{A}_{23}| = (-1)^5(-31) = 31 \\
\mathbf{c}_{31} &= (-1)^{3+1} |\mathbf{A}_{31}| = (-1)^4(2) = 2 \\
\mathbf{c}_{32} &= (-1)^{3+2} |\mathbf{A}_{32}| = (-1)^5(-15) = 15 \\
\mathbf{c}_{33} &= (-1)^{3+3} |\mathbf{A}_{33}| = (-1)^6(20) = 20
\end{aligned}$$

និយមន័យដេទែរមីណង់

និយមន័យ ៤ (ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេក និងជួរឈរ)

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ ដេទែរមីណង់របស់ $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}|$ ឬ $\det(\mathbf{A})$ កំណត់ដោយ៖

(i) បើ $n = 1$ ($\mathbf{A} = [a_{11}]$) នោះគេបាន $|\mathbf{A}| = a_{11}$ ។

(ii) បើ $n > 1$ នោះគេបាន៖

(a) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេកទី i

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\mathbf{c}_{i1} + a_{i2}\mathbf{c}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathbf{c}_{in}, \quad i = 1, \cdots, n$$

(b) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរឈរទី j

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\mathbf{c}_{1j} + a_{2j}\mathbf{c}_{2j} + \ldots + a_{nj}\mathbf{c}_{nj}, \quad j = 1, \cdots, n$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ តាមពន្លាត cofactor តាមជួរដេកទី 3 គេបាន៖

$$|\mathbf{A}| = a_{31}\mathbf{c}_{31} + a_{32}\mathbf{c}_{32} + a_{33}\mathbf{c}_{33} = 2(2) + (-7)(15) + 6(20) = 19$$

Example

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ចូររកដេទែរមីណង់របស់ $\mathbf{A}$ តាមពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រជួរឈរទី 2 ។

Note: ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

ទ្រឹស្តីបទ ៥

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ មានលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Proof. យើងប្រើវិចារកំណើន!

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (4)(3)(-1)(7) = -84.$$

Lecture 2. (07 June 2024)

អនុវត្តន៍ EROs ក្នុងការគណនាដេទែរមីណង់

ទ្រឹស្តីបទ ៦

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ មានដេទែរមីណង់ $|\mathbf{A}|$ និងកំណត់ λ ជាស្កាលែរ។

(1) *បើ r_1 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (I) (i.e., $r_1: \ R_i^{\text{New}} \longleftarrow \lambda R_i^{\text{old}}, \ \lambda \neq 0$) នោះ*

$$|r_1(\mathbf{A})| = \lambda|\mathbf{A}|$$

(2) *បើ r_2 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (II) (i.e., $r_2: \ R_i \longleftrightarrow R_j, \ \ i \neq j$) នោះ*

$$|r_2(\mathbf{A})| = -|\mathbf{A}|$$

(3) *បើ r_3 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (III) (i.e., $r_3: \ R_i^{\text{New}} \longleftarrow R_i^{\text{old}} + \lambda R_j^{\text{old}}$, $\lambda \neq 0$) នោះ*

$$|r_3(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|$$

(Note. សម្រាយបញ្ជាក់សម្រាប់ទ្រឹស្តីខាងលើ ត្រូវប្រើវិចារកំណើន — ចាត់ទុកជាលំហាត់)

Example

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-2&1\\4&3&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

ពិនិត្យម៉ាទ្រីសទាំងបីខាងក្រោម៖

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}5&-2&1\\4&3&-1\\-6&-3&0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}5&-2&1\\4&3&-1\\12&-3&2\end{bmatrix}\ \text{និង}\ \mathbf{B}_3=\begin{bmatrix}4&3&-1\\5&-2&1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

កូរ៉ូលែរ

Corollary ៧

បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n\times n$ និងកំណត់ c ជាស្កាលែរ នោះគេបាន $|c\mathbf{A}|=c^n|\mathbf{A}|$ ។

គេមាន

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\3&-3&-2\\16&7&1\end{vmatrix}=-1$$

ដូច្នេះ

$$\begin{vmatrix}0&-4&-2\\-6&6&4\\-32&-14&-2\end{vmatrix}=\left|-2\begin{bmatrix}0&2&1\\3&-3&-2\\16&7&1\end{bmatrix}\right|$$

$$=(-2)^3\begin{vmatrix}0&2&1\\3&-3&-2\\16&7&1\end{vmatrix}=(-8)(-1)=8$$

គណនាដេទែរមីណង់ដោយប្រើ EROs

- យើងនឹងគណនាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសមួយ **A** ដោយប្រើ EROs ដើម្បីរកម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ **B** ដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស **A** ។
- ឧ. យកម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
- យើងបម្លែងម៉ាទ្រីស **A** ឱ្យទៅជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ដោយអនុវត្តតាមជំហានៗដូចខាងក្រោម៖

$$\text{(II)}: R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (|\mathbf{B}_1| = -|\mathbf{A}|)$$

$$\text{(III)}: R_3' \leftarrow R_3 + 2R_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -8 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad (|\mathbf{B}_2| = |\mathbf{B}_1| = -|\mathbf{A}|)$$

Cont...

$$\text{(I)}\ : R_2' \leftarrow -\frac{1}{14}R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \left(|\mathbf{B}_3| = -\frac{1}{14}|\mathbf{B}_2| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|\right)$$

$$\text{(III)}: R_3' \leftarrow R_3 - 6R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} \end{bmatrix} \quad \left(|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}_3| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|\right)$$

ដោយ **B** ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ គេបាន៖

$$|\mathbf{B}| = (1)(1)\left(\frac{46}{7}\right) = \frac{46}{7}$$

ដោយ $|\mathbf{B}| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|$ គេបាន

$$|\mathbf{A}| = 14|\mathbf{B}| = 14\left(\frac{46}{7}\right) = 92$$

លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដេទែរមីណង់សម្រាប់ភាពមានចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស

- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

  ឧ. ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ មានលុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ ។

- យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់ | ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដេទែរមីណង់សម្រាប់ភាពមានចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស

- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

  ឧ. ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ មានលុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ ។

- យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។
- អនុវត្តន៍៖

  (i) យកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសមេគុណរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} x + 6y = 20 \\ -3x + 5y = 9 \end{cases}$$

  គេបាន $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។ ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមានចម្លើយតែមួយគត់ គឺ៖ $(2, 3)$ ។

Cont...

(ii) គេឱ្យប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

ដែលម៉ាទ្រីសមេគុណ

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

មាន $|\mathbf{B}| = 0$ ។ គេបាន $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) < 3$ ។ ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយ nontrivial គឺ៖

លក្ខខណ្ឌសមមូលចំពោះម៉ាទ្រីស singular និង nonsingular

សន្មត $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបានលក្ខណៈខាងក្រោមសមមូលគ្នា៖

$\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស singular (គ្មាន $\mathbf{A}^{-1}$)	$\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular (មាន $\mathbf{A}^{-1}$)
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \neq n$	$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$
$\|\mathbf{A}\| = 0$	$\|\mathbf{A}\| \neq 0$
$\mathbf{A}$ មិនសមមូលជួរដេកជាមួយ $\mathbf{I}_n$	$\mathbf{A}$ សមមូលជួរដេកជាមួយ $\mathbf{I}_n$
$\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ មានចម្លើយ nontrivial : $\mathbf{X}$	$\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ មានចម្លើយ trivial តែមួយគត់ : $\mathbf{X}$
$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ មិនមានចម្លើយតែមួយគត់ (អាចគ្មានចម្លើយ ឬអាចមានច្រើនរាប់មិនអស់)	$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X}$ ($\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$)

លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់

1. បើ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ ។
2. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular គេបាន $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ ។
3. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ ។
4. គណនាចម្រាសដោយប្រើម៉ាទ្រីស adjoint : បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ ដែលមានម៉ាទ្រីស adjoint : $\text{adj}(\mathbf{A}) = \text{cof}(\mathbf{A})^T$ នោះគេបាន

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A})$$

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមដេទែមីណង់ | ដេទែមីណង់ និងការបន្ទុយជួរដេក

លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់

1. បើ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ ។
2. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular គេបាន $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ ។
3. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ ។
4. គណនាចម្រាសដោយប្រើម៉ាទ្រីស adjoint : បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ ដែលមានម៉ាទ្រីស adjoint : $\text{adj}(\mathbf{A}) = \text{cof}(\mathbf{A})^T$ នោះគេបាន

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A})$$

អនុវត្តន៍៖ ម៉ាទ្រីស adjoint របស់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{គឺ} \quad \text{adj}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{31} \\ \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{32} \\ \mathcal{B}_{13} & \mathcal{B}_{23} & \mathcal{B}_{33} \end{bmatrix}$$

ដែល $\mathcal{B}_{ij}$ $(1 \le i, j \le 3)$ គឺជា ធាតុ cofactor ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}$ ។ ដូច្នេះ

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Cramer's Rule

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (វិធាន Cramer)

យក $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ជាប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ មានចំនួន n សមីការ និងចំនួន n អថេរ ដែល $|\mathbf{A}|\neq 0$ ។ ចំពោះគ្រប់ $1\leq i\leq n$ តាង $\mathbf{A}_i$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ បានមកដោយជំនួសជួរឈរទី i របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ដោយវ៉ិចទ័រ $\mathbf{B}$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X}$ គឺ៖

$$x_1=\frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2=\frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|},\ldots,x_n=\frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|}$$

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមដេទែមីណង់ | ដេទែមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

Cramer's Rule

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (វិធាន Cramer)

យក $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ជាប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ មានចំនួន n សមីការ និងចំនួន n អថេរ ដែល $|\mathbf{A}|\neq 0$ ។ ចំពោះគ្រប់ $1\leq i\leq n$ តាង $\mathbf{A}_i$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ បានមកដោយជំនួសជួរឈរទី i របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ដោយវ៉ិចទ័រ $\mathbf{B}$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X}$ គឺ៖

$$x_1=\frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|},\ x_2=\frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|},\ldots,x_n=\frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|}$$

អនុវត្តន៍៖ គេឱ្យប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases}5x_1-3x_2-10x_3=-9\\ 2x_1+2x_2-3x_3=4\\ -3x_1-x_2+5x_3=-1\end{cases}$$

ទម្រង់ម៉ាទ្រីសរបស់ប្រព័ន្ធគឺ $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ដែល

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -3 & -10\\ 2 & 2 & -3\\ -3 & -1 & 5\end{bmatrix}\text{ និង }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-9\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$ ។ ដូច្នេះ $|\mathbf{A}|=-2$ ។

Cont...

គេបាន

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -10 \\ 4 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -10 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

និង

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -9 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

គេបាន $|\mathbf{A}_1| = 8, \ |\mathbf{A}_2| = -6$ និង $|\mathbf{A}_3| = 4$ ។ ដូច្នេះ

Lecture 3. (14 June 2024)
Eigenvalue and Diagonalization

ដេទែរមីណង់

(Determinants and Eigenvalues, Lecture 1.)

ហាំ ការីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP [redacted]
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

1 សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

វត្ថុបំណង សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់ ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក
3. លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់

HK Chapter 2

មាតិកាសម្រាប់សប្ដាហ៍នេះ

1. សេចក្ដីផ្ដើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក
3. លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់
4. តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្កត់ទ្រូងកម្ម
   - អង្កត់ទ្រូងកម្មរបស់ម៉ាទ្រីស

វត្ថុបំណង សេចក្ដីផ្ដើមដេទែរមីណង់ ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្កត់ទ្រូងកម្ម អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

មាតិកាសម្រាប់សប្ដាហ៍នេះ

1. សេចក្ដីផ្ដើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក
3. លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់
4. តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្កត់ទ្រូងកម្ម
   - អង្កត់ទ្រូងកម្មរបស់ម៉ាទ្រីស
5. អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

វត្ថុបំណង

- រៀននិយមន័យរបស់ដេទែរមីណង់
- រៀនលក្ខណៈគ្រឹះរបស់ដេទែរមីណង់ និងវិធីអនុវត្តន៍របស់វា

សេចក្តីផ្តើម៖ វិធាន Sarrus ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ $1 \times 1, 2 \times 2$ និង 3×3

- ដេទែរមីណង់ គឺជាអនុគមន៍

$$\det : \left\{ \text{ម៉ាទ្រីសការេ} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងក្រោម៖

1) ជំនួសជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ មិនប្រែប្រួល $\det(\mathbf{A})$ ។
2) គុណជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ ដោយស្កាលែរ c ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹងតម្លៃ c ។
3) ប្តូរជួរដេកពីររបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹង -1។
4) ដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសឯកតា ស្មើ 1។

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 1×1: $\quad |\mathbf{A}| = a$
- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 :

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = afj + bgh + cei - hfc - iga - jeb$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a & b & c & a & b \\ e & f & g & e & f \\ h & i & j & h & i \\ - & - & - & & \end{array}$$

Example

ចូរគណនាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ans. -123

អនុវត្តន៍: Areas and Volumes

ទ្រឹស្តីបទ ១

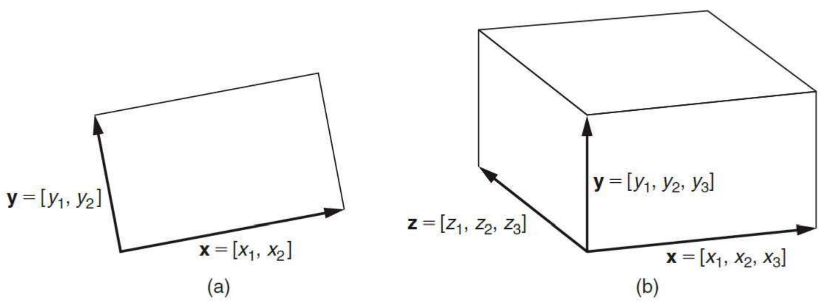
(i) *គេអោយវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ *និង* $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ *ជាវ៉ិចទ័រពីរមិនស្របគ្នាក្នុង* $\mathbb{R}^2$ *ដែលមានគល់រួមត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x}$ *និង* $\mathbf{y}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតរបស់ដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(ii) *យកវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ *និង* $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ *ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ដែលមានគល់រួមនៅត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត ដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *និង* $\mathbf{z}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Cont.



Note: តាមទ្រឹស្តីបទ (i) ខាងលើ បើ $\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ និង $\mathbf{y} = \overrightarrow{\mathbf{PR}}$ នោះគេបាន ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានកំពូល $\mathbf{P}(x_P, y_P), \mathbf{Q}(x_Q, y_Q)$ និង $\mathbf{R}(x_R, y_R)$ ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖

$$S_{\triangle \mathbf{PQR}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \text{ឬ} \qquad S_{\triangle \mathbf{PQR}} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

Example

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលមានជ្រុង $\mathbf{x} = [-2, 1, 3], \mathbf{y} = [3, 0, -2]$ និង $\mathbf{z} = [-1, 3, 7]$ កំណត់ដោយ

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} =?$$

Ans. $|-4| = 4$

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ២

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$, $n \geq 2$ ។ ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(n-1) \times (n-1)$ ដែលទទួលបានដោយលុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ ធាតុមីន័រ (minor) ត្រង់ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}_{ij}|$ គឺជាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ ។

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ ។ គេបានធាតុ minors ៖

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -8,$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -5, \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 28, \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -31,$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ៣

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ដែល $n \geq 2$។ កូហ្វាក់ទ័រ (cofactor) ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $\mathbf{c}_{ij}$ កំណត់ដោយ៖

$$\mathbf{c}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{11} &= (-1)^{1+1} |\mathbf{A}_{11}| = (-1)^2(3) = 3 \\
\mathbf{c}_{12} &= (-1)^{1+2} |\mathbf{A}_{12}| = (-1)^3(6) = 6 \\
\mathbf{c}_{13} &= (-1)^{1+3} |\mathbf{A}_{13}| = (-1)^4(-8) = -8 \\
\mathbf{c}_{21} &= (-1)^{2+1} |\mathbf{A}_{21}| = (-1)^3(-5) = 5 \\
\mathbf{c}_{22} &= (-1)^{2+2} |\mathbf{A}_{22}| = (-1)^4(28) = 28 \\
\mathbf{c}_{23} &= (-1)^{2+3} |\mathbf{A}_{23}| = (-1)^5(-31) = 31 \\
\mathbf{c}_{31} &= (-1)^{3+1} |\mathbf{A}_{31}| = (-1)^4(2) = 2 \\
\mathbf{c}_{32} &= (-1)^{3+2} |\mathbf{A}_{32}| = (-1)^5(-15) = 15 \\
\mathbf{c}_{33} &= (-1)^{3+3} |\mathbf{A}_{33}| = (-1)^6(20) = 20
\end{aligned}$$

និយមន័យដេទែរមីណង់

និយមន័យ ៤ (ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេក និងជួរឈរ)

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ ដេទែរមីណង់របស់ $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}|$ ឬ $\det(\mathbf{A})$ កំណត់ដោយ៖

(i) បើ $n = 1$ ($\mathbf{A} = [a_{11}]$) នោះគេបាន $|\mathbf{A}| = a_{11}$ ។

(ii) បើ $n > 1$ នោះគេបាន៖

(a) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេកទី i

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\mathbf{c}_{i1} + a_{i2}\mathbf{c}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathbf{c}_{in}, \quad i = 1, \cdots, n$$

(b) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរឈរទី j

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\mathbf{c}_{1j} + a_{2j}\mathbf{c}_{2j} + \ldots + a_{nj}\mathbf{c}_{nj}, \quad j = 1, \cdots, n$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ តាមពន្លាត cofactor តាមជួរដេកទី 3 គេបាន៖

$$|\mathbf{A}| = a_{31}\mathbf{c}_{31} + a_{32}\mathbf{c}_{32} + a_{33}\mathbf{c}_{33} = 2(2) + (-7)(15) + 6(20) = 19$$

Example

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ចូររកដេទែរមីណង់របស់ **A** តាមពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រជួរឈរទី 2 ។

Note: ម៉ាទ្រីសការេ **A** លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$។

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់ | ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក | លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ | តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម | អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

Example

HK Chapter 2

ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

ទ្រឹស្តីបទ ៥

យក $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ មានលំដាប់* $n \times n$ ។ *គេបាន*

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Proof. យើងប្រើវិចារកំណើន!

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (4)(3)(-1)(7) = -84.$$

Lecture 2. (08 June 2024)

អនុវត្តន៍ EROs ក្នុងការគណនាដេទែរមីណង់

ទ្រឹស្តីបទ ៦

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ មានដេទែរមីណង់ $|\mathbf{A}|$ និងកំណត់ λ ជាស្កាលែរ។

(1) *បើ r_1 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (I) (i.e., $r_1: \ R_i^{\text{New}} \longleftarrow \lambda R_i^{\text{old}}, \ \lambda \neq 0$) នោះ*

$$|r_1(\mathbf{A})| = \lambda |\mathbf{A}|$$

(2) *បើ r_2 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (II) (i.e., $r_2: \ R_i \longleftrightarrow R_j, \ \ i \neq j$) នោះ*

$$|r_2(\mathbf{A})| = -|\mathbf{A}|$$

(3) *បើ r_3 ជាប្រមាណវិធីជួរដេកប្រភេទ (III) (i.e., $r_3: \ R_i^{\text{New}} \longleftarrow R_i^{\text{old}} + \lambda R_j^{\text{old}}$, $\lambda \neq 0$) នោះ*

$$|r_3(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|$$

(Note. សម្រាយបញ្ជាក់សម្រាប់ទ្រឹស្តីខាងលើ ត្រូវប្រើវិចារកំណើន — ចាត់ទុកជាលំហាត់)

Example

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ពិនិត្យម៉ាទ្រីសទាំងបីខាងក្រោម៖

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 12 & -3 & 2 \end{bmatrix} \ \text{និង} \ \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

កូរ៉ូលែរ

Corollary ៧

បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n\times n$ និងកំណត់ c ជាស្កាលែរ នោះគេបាន $|c\mathbf{A}| = c^n|\mathbf{A}|$ ។

គេមាន

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 16 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ដូច្នេះ

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -6 & 6 & 4 \\ -32 & -14 & -2 \end{vmatrix} = \left|-2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 16 & 7 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= (-2)^3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 16 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-8)(-1) = 8$$

គណនាដេទែរមីណង់ដោយប្រើ EROs

- យើងនឹងគណនាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសមួយ $\mathbf{A}$ ដោយប្រើ EROs ដើម្បីរកម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ $\mathbf{B}$ ដែលសមមូលជួរដេកទៅនឹងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។
- ឧ. យកម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
- យើងបម្លែងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ឱ្យទៅជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ដោយអនុវត្តតាមជំហានៗដូចខាងក្រោម៖

$$(\text{II}):\ R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (|\mathbf{B}_1| = -|\mathbf{A}|)$$

$$(\text{III}):\ R_3' \leftarrow R_3 + 2R_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -14 & -8 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad (|\mathbf{B}_2| = |\mathbf{B}_1| = -|\mathbf{A}|)$$

Cont...

$$(\mathrm{I})\ : R_2' \leftarrow -\frac{1}{14}R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \left(|\mathbf{B}_3| = -\frac{1}{14}|\mathbf{B}_2| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|\right)$$

$$(\mathrm{III}):\ R_3' \leftarrow R_3 - 6R_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} \end{bmatrix} \quad \left(|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}_3| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|\right)$$

ដោយ **B** ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ គេបាន៖

$$|\mathbf{B}| = (1)(1)\left(\frac{46}{7}\right) = \frac{46}{7}$$

ដោយ $|\mathbf{B}| = +\frac{1}{14}|\mathbf{A}|$ គេបាន

$$|\mathbf{A}| = 14|\mathbf{B}| = 14\left(\frac{46}{7}\right) = 92$$

លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដេទែរមីណង់សម្រាប់ភាពមានចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស

- ម៉ាទ្រីសការេ **A** លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

  ឧ. ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ មានលុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ ។

- យក **A** ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យដេទែរមីណង់សម្រាប់ភាពមានចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស

- ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

  ឧ. ចម្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ មានលុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ ។

- យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបាន $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។
- អនុវត្តន៍៖

  (i) យកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសមេគុណរបស់ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} x + 6y = 20 \\ -3x + 5y = 9 \end{cases}$$

  គេបាន $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។ ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមានចម្លើយតែមួយគត់ គឺ៖ $(2, 3)$ ។

វត្ថុបំណង សេចក្ដីផ្ដើមដេទែរមីណង់ ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

Cont...

(ii) គេឱ្យប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

ដែលម៉ាទ្រីសមេគុណ

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

មាន $|\mathbf{B}| = 0$ ។ គេបាន $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) < 3$ ។ ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមានចម្លើយ nontrivial គឺ៖

$$\left\{ c(4, -1, 1) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

HK Chapter 2

លក្ខខណ្ឌសមមូលចំពោះម៉ាទ្រីស singular និង nonsingular

សន្មត $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ គេបានលក្ខណៈខាងក្រោមសមមូលគ្នា៖

$\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស singular (គ្មាន $\mathbf{A}^{-1}$)	$\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular (មាន $\mathbf{A}^{-1}$)
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \neq n$	$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$
$\lvert\mathbf{A}\rvert = 0$	$\lvert\mathbf{A}\rvert \neq 0$
$\mathbf{A}$ មិនសមមូលជួរដេកជាមួយ $\mathbf{I}_n$	$\mathbf{A}$ សមមូលជួរដេកជាមួយ $\mathbf{I}_n$
$\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ មានចម្លើយ nontrivial : $\mathbf{X}$	$\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ មានចម្លើយ trivial តែមួយគត់ : $\mathbf{X}$
$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ មិនមានចម្លើយតែមួយគត់ (អាចគ្មានចម្លើយ ឬអាចមានច្រើនរាប់មិនអស់)	$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ មានចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X}$ ($\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$)

លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់

1. បើ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $\lvert\mathbf{AB}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert\lvert\mathbf{B}\rvert$ ។
2. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular គេបាន $\lvert\mathbf{A}^{-1}\rvert = \dfrac{1}{\lvert\mathbf{A}\rvert}$ ។
3. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{A}^T\rvert$ ។
4. គណនាចម្រាសដោយប្រើម៉ាទ្រីស adjoint : បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ ដែលមានម៉ាទ្រីស adjoint : $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \operatorname{cof}(\mathbf{A})^T$ នោះគេបាន

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lvert\mathbf{A}\rvert}\operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់

1. បើ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ ។
2. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular គេបាន $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$ ។
3. បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ គេបាន $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ ។
4. គណនាចម្រាសដោយប្រើម៉ាទ្រីស adjoint : បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លំដាប់ $n \times n$ ដែលមានម៉ាទ្រីស adjoint : $\text{adj}(\mathbf{A}) = \text{cof}(\mathbf{A})^T$ នោះគេបាន
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A})$$

អនុវត្តន៍៖ ម៉ាទ្រីស adjoint របស់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{គឺ} \quad \text{adj}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{31} \\ \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{32} \\ \mathcal{B}_{13} & \mathcal{B}_{23} & \mathcal{B}_{33} \end{bmatrix}$$

ដែល $\mathcal{B}_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ គឺជា ធាតុ cofactor ទីតាំង (i, j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}$ ។ ដូច្នេះ

តចប់

Lecture 3. (15 June 2024)

Cramer's Rule

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (វិធាន Cramer)

យក $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *ជាប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ មានចំនួន* n *សមីការ និងចំនួន* n *អថេរ ដែល* $|\mathbf{A}| \neq 0$ *។ ចំពោះគ្រប់* $1 \leq i \leq n$ *តាង* $\mathbf{A}_i$ *ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់* $n \times n$ *បានមកដោយជំនួសជួរឈរទី* i *របស់ម៉ាទ្រីស* $\mathbf{A}$ *ដោយវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{B}$ *។ ដូច្នេះ ចម្លើយតែមួយគត់* $\mathbf{X}$ *គឺ៖*

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \ldots, x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|}$$

វត្ថុបំណង　សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់　ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក　លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់　តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម　អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

Cramer's Rule

ទ្រឹស្តីបទ ៨ (វិធាន Cramer)

យក $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ជាប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ មានចំនួន n សមីការ និងចំនួន n អថេរ ដែល $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។ ចំពោះគ្រប់ $1 \leq i \leq n$ តាង $\mathbf{A}_i$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ បានមកដោយជំនួសជួរឈរទី i របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ដោយវ៉ិចទ័រ $\mathbf{B}$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយតែមួយគត់ $\mathbf{X}$ គឺ៖

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \ldots, x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|}$$

អនុវត្តន៍៖ គេឱ្យប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 10x_3 = -9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

ទម្រង់ម៉ាទ្រីសរបស់ប្រព័ន្ធគឺ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ដែល

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ និង } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ។ ដូច្នេះ $|\mathbf{A}| = -2$ ។

Cont...

គេបាន

$$A_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -9 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -10 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -9 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -10 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

និង

$$A_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -9 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

គេបាន $|\mathbf{A}_1| = 8, \ |\mathbf{A}_2| = -6$ និង $|\mathbf{A}_3| = 4$ ។ ដូច្នេះ

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{8}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-6}{-2} = 3, \quad \text{and} \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{4}{-2} = -2$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ៖ $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 3, -2)$ ។

Lecture 3. (15 June 2024)

តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម

Eigenvalues and Eigenvectors

និយមន័យ ៩

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ ។ ចំនួនពិត λ ហៅថា **តម្លៃផ្ទាល់** (eigenvalue) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ លុះត្រាតែ មានវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\mathbf{X}$ ក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដែលផ្ទៀតផ្ទាត់ $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ ។ ដូចគ្នាដែរ វ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\mathbf{X}$ ដែលធ្វើអោយ $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រផ្ទាល់** (eigenvector) ដែលត្រូវគ្នានឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ។

- អ្នកគណិតវិទ្យាខ្លះ ហៅ តម្លៃផ្ទាល់ (eigenvalue) ថា *តម្លៃសម្គាល់* (characteristic values) ហើយហៅ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (eigenvector) ថាជា *វ៉ិចទ័រសម្គាល់* (characteristic vectors) ។
- តម្លៃផ្ទាល់ λ អាចស្មើសូន្យបាន តែតាមនិយមន័យ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ។
- វ៉ិចទ័រ $\mathbf{AX}$ ត្រូវស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\mathbf{X}$ ដោយ*ពង្រីក*ទំហំរបស់ $\mathbf{X}$ បើ $|\lambda| > 1$ និង*បង្រួម*ទំហំរបស់ $\mathbf{X}$ បើ $|\lambda| < 1$ ។
- បើ $\lambda = 0$ គេបាន $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$។

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមវ៉ិចទ័រមីណង់ | វ៉ិចទ័រមីណង់ និងការបន្សំលីនេអ៊ែរ | លក្ខណៈរបស់វ៉ិចទ័រមីណង់ | តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម | អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

ឧទាហរណ៍

គេអោយម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 ៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}.$$

គេបាន $\lambda = 2$ គឺជាតម្លៃសម្គាល់ ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ព្រោះមានវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\mathbf{X}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់បាន $\mathbf{AX} = 2\mathbf{X}$។ គឺ

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cont...

និយមន័យ ១០

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ និងកំណត់ λ ជាតម្លៃសម្គាល់ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ សំណុំ

$$E_\lambda = \left\{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}\right\}$$

ហៅថា លំហសម្គាល់ របស់តម្លៃ λ ។

- លំហសម្គាល់ E_λ ចំពោះតម្លៃសម្គាល់ λ ណាមួយរបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺជាសំណុំដែលផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រសម្គាល់ទាំងអស់ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ភ្ជាប់ទៅនឹងតម្លៃ λ នោះ រួមជាមួយនឹងវ៉ិចទ័រសូន្យ ព្រោះថា $\mathbf{A0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ គ្រប់តម្លៃ λ។
- ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ មានលំហសម្គាល់ E_2 ផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រជាពហុគុណនៃវ៉ិចទ័រ $[4, 3, 0]$ ។

ពហុធាសម្គាល់របស់ម៉ាទ្រីសមួយ

- ការកំណត់រកតម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់សម្រាប់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ គឺអនុវត្តដូចខាងក្រោម៖ បើ $\mathbf{X}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ត្រូវគ្នាទៅនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ នោះគេបាន

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I}_n\mathbf{X}, \quad \text{ឬ} \quad (\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

- បើ $\mathbf{X}$ គឺជាចម្លើយមិនសូន្យ (nontrivial) ចំពោះប្រព័ន្ធអូម៉ូសែនមួយ ដែលមានម៉ាទ្រីសមេគុណ $\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ នោះគេបាន

$$|\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}| = 0$$

និយមន័យ ១១

បើ $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ នោះគេបាន ពហុធាសម្គាល់របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ អញ្ញតិ λ គឺជាពហុធាកំណត់ដោយ

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right|, \qquad \lambda \text{ ជាអញ្ញតិ}$$

- បើ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ នោះពហុធា $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ មានដឺក្រេ n។ ដូច្នេះ វាមានឫសយ៉ាងច្រើន n ។
- ដូច្នេះ តម្លៃសម្គាល់របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺជាឫសរបស់ពហុធាសម្គាល់ $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ ។

អនុវត្តន៍ទី ១

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -51 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$។ ចូររកពហុធាសម្គាល់របស់ និងកំណត់រកវ៉ិចទ័រសម្គាល់។ រួចកំណត់លំហសម្គាល់ចំពោះតម្លៃ λ។

- ពហុធាសម្គាល់៖

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}|$$

វត្ថុបំណង សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់ ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

Cont...

- វ៉ិចទ័រសម្គាល់៖ $(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ត្រូវរក $\mathbf{X} \neq 0$?

- លំហសម្គាល់ចំពោះតម្លៃ λ: $E_\lambda = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}\}$៖

HK Chapter 2

អនុវត្តន៍ទី ២

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -11 & -3 & 2 \\ 18 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ ។ គេបាន

$$p_{\mathbf{B}}(x) = \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -11 & -3 & 2 \\ 18 & 2 & -4 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x-7 & -1 & 1 \\ 11 & x+3 & -2 \\ -18 & -2 & x+4 \end{vmatrix}$$

ចូររកវ៉ិចទ័រសម្គាល់ និងលំហសម្គាល់ចំពោះតម្លៃនៃឫសនីមួយៗរបស់ពហុធា $p_{\mathbf{B}}(x)$ ។

Cont...

Cont...

វត្តបំណង សេចក្តីផ្តើមវ៉ិចទ័រមីណង់ ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក លក្ខណៈរបស់ដេទែរមីណង់ តម្លៃផ្ទាល់ និង អង្គត់ទ្រូងកម្ម អនុវត្តន៍: Large Powers of a Matrix

អនុវត្តន៍ទី ៣

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}$ ។

ចូររកតម្លៃសម្គាល់ វ៉ិចទ័រសម្គាល់ និងលំហសម្គាល់ ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ គេបាន ពហុធាសម្គាល់ ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ កំណត់ដោយ $|x\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}|$ ៖

$$\left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x+4 & -8 & 12 \\ -6 & x+6 & -12 \\ -6 & 8 & x-14 \end{vmatrix}$$

គេទទួលបានពហុធាសម្គាល់ $x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2 = 0$ មានឫស $\lambda_1 = 2$ និង $\lambda_2 = 0$ ។

Diagonalization

- អនុវត្តន៍ដ៏សំខាន់របស់តម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ចំពោះម៉ាទ្រីសការេមួយ គឺការធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្ម ទៅលើម៉ាទ្រីសនោះ។
- ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមានទម្រង់ងាយ ដែលងាយស្រួលអោយយើងគណនាម៉ាទ្រីសផលគុណបាន នៅពេលណាដឹងថាម៉ាទ្រីសមួយអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មទៅលើវាបាន។
- យើងនឹងប្រើគោលគំនិតខាងលើ ដោយចេញពីតម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់របស់ម៉ាទ្រីសការេមួយ គេអាចរកទម្រង់អង្កត់ទ្រូងរបស់ម៉ាទ្រីសនោះ។

Diagonalization

- អនុវត្តន៍ដ៏សំខាន់របស់តម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ចំពោះម៉ាទ្រីសការេមួយ គឺការធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្ម ទៅលើម៉ាទ្រីសនោះ។
- ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមានទម្រង់ងាយ ដែលងាយស្រួលអោយយើងគណនាម៉ាទ្រីសផលគុណបាន នៅពេលណាដឹងថាម៉ាទ្រីសមួយអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មទៅលើវាបាន។
- យើងនឹងប្រើគោលគំនិតខាងលើ ដោយចេញពីតម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់របស់ម៉ាទ្រីសការេមួយ គេអាចរកទម្រង់អង្កត់ទ្រូងរបស់ម៉ាទ្រីសនោះ។

និយមន័យ ១២

(i) ម៉ាទ្រីស $\mathbf{B}$ ដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ បើមានម៉ាទ្រីស nonsingular មួយ $\mathbf{P}$ ដែល

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$$

(ii) ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីសអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន (diagonalizable) លុះត្រាតែ វាដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ។i.e., មានម៉ាទ្រីសមានចម្រាស $\mathbf{P}$ ដែល

Cont...

- យក $\mathbf{D}$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង។ តាមលក្ខណៈរបស់ម៉ាទ្រីសមានចម្រាស គេបាន

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}\left(\mathbf{P}^{-1}\right) &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\right)\mathbf{P}^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\right) = \mathbf{A}\end{aligned}$$

- ជាទូទៅ គេច្រើននិយាយថា ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ ដូចគ្នា ដោយមិនប្រកាន់ម៉ាទ្រីសណាមុន ឬក្រោយទេ។

Practice.

គេអោយម៉ាទ្រីសការេ 2×2: $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ។ គេបាន

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{គេបាន} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1 & -1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 0\\ 0\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1 & 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot\frac{3}{2}+1\cdot 3 & 0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0\\ -2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot 3 & -2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}3 & 0 \end{bmatrix} = D
\end{aligned}$$

សម្គាល់!

ទ្រឹស្តីបទ

ទ្រឹស្តីបទ ១៣

*យក **A** និង **P** ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ ដែល ជួរឈរនីមួយៗរបស់ម៉ាទ្រីស **P** គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់សម្រាប់ម៉ាទ្រីស **A** ។ បើ **P** ជា nonsingular នោះគេថា $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីស **A** ។ ធាតុទី i នៅតាមអង្កត់ទ្រូង d_{ii} របស់ម៉ាទ្រីស **D** គឺជាតម្លៃផ្ទាល់ ភ្ជាប់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៅជួរឈរទី i របស់ម៉ាទ្រីស **P** ។*

អនុវត្តន៍ទី៤. គេអោយម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 ៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}$$

តាមអនុវត្តទី៣ ខាងលើ៖ តម្លៃផ្ទាល់ $\lambda_1 = 2$ និង $\lambda_2 = 0$ ចំពោះ **A** ។ ដោះស្រាយ ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $(\lambda_i \mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$ គេទទួលបានវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\mathbf{X} = [4, 3, 0]$ និង $\mathbf{Y} = [-2, 0, 1]$ ចំពោះតម្លៃ $\lambda_1 = 2$ ហើយ $\mathbf{Z} = [-1, 1, 1]$ ចំពោះ $\lambda_2 = 0$។ ដូច្នេះ

Cont...

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ដោយ $|\mathbf{P}| = -1$ នោះ **P** nonsingular ។ គេបាន

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

គេបាន $\mathbf{A}, \mathbf{P}$ និង $\mathbf{P}^{-1}$ កំណត់បានម៉ាទ្រីស **D** ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

វិធីសាស្ត្រអង្កត់ទ្រូងកម្មរបស់ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$

Step 1: គណនា $p_{\mathbf{A}}(x) = |x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}|$

Step 2: រកគ្រប់ឫសរបស់ $p_{\mathbf{A}}(x)$ (i.e., គ្រប់ឫសជាចំនួនពិតរបស់ $p_{\mathbf{A}}(x) = 0$) ។ គេកំណត់បាន តម្លៃផ្ទាល់ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ for $\mathbf{A}$

Step 3: ចំពោះតម្លៃផ្ទាល់នីមួយៗ λ_m៖ ប្រើវិធានបំបាត់ជួរដេកលើម៉ាទ្រីសបន្ថែម $[\lambda_m \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{0}]$ ។ ប្រើលទ្ធផលនេះ ដើម្បីកំណត់សំណុំចម្លើយពិសេសមួយរបស់ប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន $(\lambda_m \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ដោយកំណត់អថេរសេរី (អថេរមិនអាស្រ័យ) ណាមួយស្មើ 1 និង អថេរសេរីផ្សេងទៀតស្មើ 0។ (បើមានប្រភាគ អាចបំបាត់ប្រភាគចេញ ដើម្បីងាយស្រួលគណនា)

Step 4: បន្ទាប់ពីធ្វើជំហានទី 3 សារឡើងវិញ បើគ្រប់តម្លៃផ្ទាល់ផ្សេងទៀត គេទទួលបាន វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ងាយ មានចំនួនតិចជាង n សម្រាប់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ នោះគេថា ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ មិនអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបានទេ។ (Stop)

Step 5: ក្នុងករណីផ្សេងពីជំហានទី 4 គេបង្កើតម៉ាទ្រីស $\mathbf{P}$ ដែលមានជួរឈរនីមួយៗ តម្រៀប តាមលំដាប់លំដោយ គឺជា n វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ងាយ ដែលទទួលបាន។ (ម៉ាទ្រីស $\mathbf{P}$ nonsingular)

Step 6: ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា៖ $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ដែល ធាតុ d_{ii} គឺជា តម្លៃផ្ទាល់ភ្ជាប់ទៅនឹង

អនុវត្តន៍ទី៥.

ពិនិត្យម៉ាទ្រីសលំដាប់ 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 & 4 \\ 6 & -16 & -3 & -9 \\ 12 & -27 & -4 & -15 \\ -18 & 43 & 7 & 24 \end{bmatrix}$$

គេបាន $p_{\mathbf{A}}(x) = x^4 - 3x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)^2$ ។ ដូច្នេះ តម្លៃផ្ទាល់របស់ $\mathbf{A}$ គឺជាឫសរបស់ $p_{\mathbf{A}}(x)$ គឺ៖ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ និង $\lambda_3 = 0$ ។ សូមបន្ត

Applicat

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

យក **A**

ដូច្នេះ
$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{AA} \\
&= \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)\left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) \\
&= \mathbf{PD}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right)\mathbf{DP}^{-1} \qquad (\text{ម៉ាទ្រីសផលគុណមានលក្ខណៈផ្តុំ}) \\
&= \mathbf{PDI}_n\mathbf{DP}^{-1} \\
&= \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}
\end{aligned}$$

ជាទូទៅ ចំពោះ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k គេបាន

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}$$

វិបាក:

អនុវត្តន៍ទី

ដោយប្រើតម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ ចូរគណនា $\mathbf{A}^{11}$ បើ៖

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 & 4 \\ 6 & -16 & -3 & -9 \\ 12 & -27 & -4 & -15 \\ -18 & 43 & 7 & 24 \end{bmatrix}$$

លំហវ៉ិចទ័រ

(Vector Spaces, Linear Transformations, Lec.2)

កៅ មុយសាន
ហាំ ភារីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

វិធានរកទម្រង់ងាយរបស់សំណុំ span(S) ដោយប្រើទម្រង់ RREF

យក **S** ជាសំណុំវងរាប់អស់របស់លំហ $\mathbb{R}^n$ ដែលផ្ទុក ចំនួន k វ៉ិចទ័រ $k \geq 2$។

(1) បង្កើតម៉ាទ្រីស **A** លំដាប់ $k \times n$ ដោយប្រើវ៉ិចទ័រក្នុង S សរសេរជាជួរដេករបស់ **A**។ (i.e., span(**S**) គឺជាលំហជួរដេករបស់ **A**)

(2) តាង **C** ជាម៉ាទ្រីសមានទម្រង់អេស៊ីឡេានជួរដេកបង្រួម (RREF) ដែលបានមកពីម៉ាទ្រីស **A** ដោយប្រើ EROs ។

(3) គេបាន ទម្រង់ងាយរបស់ span(**S**) គឺជាសំណុំនៃគ្រប់បន្សំលីនេអ៊ែរទាំងអស់របស់វ៉ិចទ័រជួរដេក មិនសូន្យ នៅក្នុង **C**។

Example.

- យក $\mathbf{S} = \{[1, 4, -1, -5], [2, 8, 5, 4], [-1, -4, 2, 7], [6, 24, -1, -20]\}$ របស់ $\mathbb{R}^4$ ។ តាមនិយមន័យ $\text{span}(\mathbf{S})$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់វ៉ិចទ័រទាំងអស់ក្រោមទម្រង់

$$a[1, 4, -1, -5]+b[2, 8, 5, 4]+c[-1, -4, 2, 7]+d[6, 24, -1, -20] \qquad (*)$$

គ្រប់ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ។

- ប្រើវិធីខាងលើ ដើម្បីបង្កើតទម្រង់ងាយមួយរបស់សំណុំ $\text{span}(\mathbf{S})$ កំណត់ក្នុង $(*)$ គឺ៖
  1. បង្កើតម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & 7 \\ 6 & 24 & -1 & -20 \end{bmatrix}$$

  ដែលជួរដេក គឺជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbf{S}$ ។ ដូច្នេះ $\text{span}(S)$ គឺជាលំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។
  2. ប្រើ EROs ដើម្បីបម្លែងម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ទៅជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសអេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF) ដែលតាងដោយ ៖

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cont...

3. ដូច្នេះលំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺជាលំហជួរដេករបស់ម៉ាទ្រីសបង្រួម $\mathbf{C}$ ៖

$$a[1, 4, 0, -3] + b[0, 0, 1, 2] = [a, 4a, b, -3a + 2b]$$

ដូច្នេះ

$$\text{span}(\mathbf{S}) = \Big\{[a, 4a, b, -3a + 2b] \mid a, b \in \mathbb{R}\Big\}$$

គឺជាលំហរងរបស់ $\mathbb{R}^4$ ។

Note.

- វ៉ិចទ័រ $[3, 12, -2, -13] \in \text{span}(\mathbf{S})$ ព្រោះគេរកបាន $(a = 3, b = -2)$ ។
- វ៉ិចទ័រ $[-2, -8, 4, 6] \notin \text{span}(\mathbf{S})$ ព្រោះប្រព័ន្ធគ្មានចម្លើយ៖

$$\begin{cases} a & = -2 \\ 4a & = -8 \\ b & = 4 \\ -3a + 2b & = 6 \end{cases}$$

ភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ

និយមន័យ ១

យក $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ ជាសំណុំរងមិនទទេរបស់លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{V}$ ។ គេបាន៖

- សំណុំ S ហៅថា **អាស្រ័យលីនេអ៊ែរ** (linearly dependent) លុះត្រាតែ មានចំនួនពិត $a_1,\ldots,a_n$ មិនសូន្យព្រមគ្នា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ ។
- សំណុំ S ហៅថា **មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ** (linearly independent) លុះត្រាតែ គ្រប់ចំនួនពិត $a_1,\ldots,a_n$ បើសមីការ $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ នោះគេបាន $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ ព្រមគ្នា ។
- សំណុំទទេ $\{\}$ ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

Eg.

- សំណុំវ៉ិចទ័រ $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

Eg.

- សំណុំ $\mathbf{S}=\{x^2+1,2x-1,2x^2,4x-3\}$ ក្នុង $\mathcal{P}_2$ ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

$$(2)\left(x^2+1\right)+(-4)(2x-1)+(-1)\left(2x^2\right)+(2)(4x-3)=0$$

Eg.

- សំណុំ $S = \{x^2+1, 2x-1, 2x^2, 4x-3\}$ ក្នុង $\mathcal{P}_2$ ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

$$(2)\left(x^2+1\right)+(-4)(2x-1)+(-1)\left(2x^2\right)+(2)(4x-3)=0$$

- សំណុំរង $S' = \{x^2+1, 2x-1, 2x^2\}$ របស់ S ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

$$a\left(x^2+1\right)+b(2x-1)+c\left(2x^2\right)=0$$

មានចម្លើយសូន្យ $a=b=c=0$ ។

Eg.

- សំណុំ $S = \{x^2+1, 2x-1, 2x^2, 4x-3\}$ ក្នុង $\mathcal{P}_2$ ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

$$(2)\left(x^2+1\right)+(-4)(2x-1)+(-1)\left(2x^2\right)+(2)(4x-3)=0$$

- សំណុំរង $S' = \{x^2+1, 2x-1, 2x^2\}$ របស់ S ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ព្រោះ

$$a\left(x^2+1\right)+b(2x-1)+c\left(2x^2\right)=0$$

មានចម្លើយសូន្យ $a=b=c=0$ ។

- យក $S_1 = \{[3,-1,4]\}$ ។ គេបាន S_1 ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។ តែសំណុំ $S_2 = \{[0,0,0,0]\}$ ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៅក្នុង $\mathbb{R}^4$ ។

ចំណាំ. វ៉ិចទ័រពីរអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ហៅថា វ៉ិចទ័រពីរកូលីនេអ៊ែរគ្នា ឬ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ ផ្ទុយពីនេះ គេហៅថា វ៉ិចទ័រពីរមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា ។

វិធានធ្វើតេស្តរកភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ

- គេប្រើម៉ាទ្រីសក្នុងទម្រង់អេស៊ីឡោនជួរដេកបង្រួម (RREF) ដើម្បីធ្វើតេស្តពិនិត្យមើលភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែររបស់សំណុំវ៉ិចទ័រមួយ។
- យក S ជាសំណុំរាប់អស់មិនទទេនៃវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$។ ដើម្បីកំណត់បានថាតើ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ គេត្រូវអនុវត្តតាមវិធីដូចខាងក្រោម៖
  - (i) បង្កើតម៉ាទ្រីស **A** មួយដែលជួរឈររបស់វា គឺជាវ៉ិចទ័រនៅក្នុង S ។
  - (ii) ប្រើ EROs លើម៉ាទ្រីស **A** ដើម្បីទាញរកម៉ាទ្រីស **B** ក្រោមទម្រង់ RREF ។
  - (iii) បើមានធាតុនាំមុខ នៅគ្រប់ជួរឈរទាំងអស់របស់ម៉ាទ្រីស **B** នោះគេថា សំណុំ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ ផ្ទុយពីនេះ គេថា S ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

អនុវត្តន៍.

1. គេអោយសំណុំវ៉ិចទ័រ $\mathbf{S}=\left\{[1,-1,0,2],[0,-2,1,0],[2,0,-1,1]\right\}$ ក្នុង $\mathbb{R}^4$។ គេបាន

$$a[1,-1,0,2]+b[0,-2,1,0]+c[2,0,-1,1]=[0,0,0,0]$$

ដោះស្រាយរក a, b និង c ថាតើមេគុណទាំងនេះ ស្មើសូន្យព្រមគ្នា ឬក៏ មានខ្លះមិនសូន្យ?

$$[a+2c,-a-2b,b-c,2a+c]=[0,0,0,0]$$

សមមូល

$$\begin{cases} a+2c=0\\ -a-2b=0\\ b-c=0\\ 2a+c=0\end{cases}$$

តាមវិធានខាងលើ ដោយប្រើ ERO លើម៉ាទ្រីស **A** គេបានទម្រង់ RREF ៖

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-2&0\\0&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{EROs}}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

Cont...

2. យកសំណុំវ៉ិចទ័រ $S=\Big\{[3,1,-1],[-5,-2,2],[2,2,-1]\Big\}$ របស់លំហ $\mathbb{R}^3$។ ដោយប្រើវិធានតេស្តរកភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដោយជួរឈរនីមួយៗមានធាតុនាំមុខ 1 នោះសំណុំវ៉ិចទ័រ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

បម្លែងលីនេអ៊ែរ

Cont...

2. យកសំណុំវ៉ិចទ័រ $S=\Big\{[3,1,-1],[-5,-2,2],[2,2,-1]\Big\}$ របស់លំហ $\mathbb{R}^3$។ ដោយប្រើវិធានតេស្តរកភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដោយជួរឈរនីមួយៗមានធាតុនាំមុខ 1 នោះសំណុំវ៉ិចទ័រ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

2. គេអោយសំណុំវ៉ិចទ័ររបស់លំហ $\mathbb{R}^3$:

$$S=\Big\{[1,0,2],[-1,-5,-12],[5,10,30],[-3,0,-11],[6,-25,-18]\Big\}$$

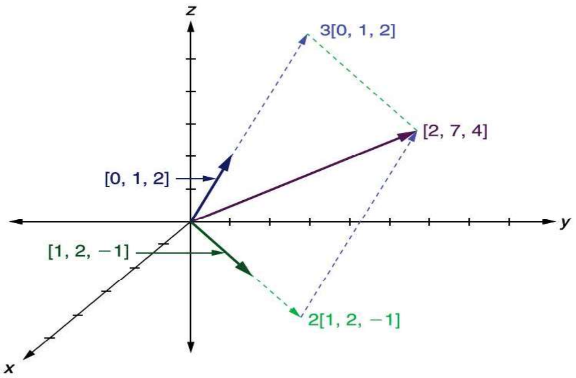
គេបាន ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & 0 & -25 \\ 2 & -12 & 30 & -11 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ដោយជួរឈរទី៣ និងទី៥ គ្មានធាតុនាំមុខ នោះគេថា សំណុំវ៉ិចទ័រ S អាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

លក្ខណៈ

1. បើ S ជាសំណុំរងក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដែលមានចំនួន k វ៉ិចទ័រផ្សេងៗគ្នា ដែល $k > n$ នោះគេបាន S ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
2. យក S ជាសំណុំរាប់អស់ ដែលមានយ៉ាងតិច២វ៉ិចទ័រ។ គេបាន S ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ លុះត្រាតែមានវ៉ិចទ័រមួយក្នុង S អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រផ្សេងទៀតក្នុង S ។
i.e., មានវ៉ិចទ័រ $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ ដែល $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\mathbf{S} - \{\mathbf{v}\})$ ។



សង្ខេប

ភាពសមមូលចំពោះសំណុំរង S របស់លំហវ៉ិចទ័រមួយ៖ ភាពមិនអាស្រ័យ ឬ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា

S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា	S អាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា
បើ $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq S$ និង $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ នោះ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$។	មានសំណុំរង $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ របស់ S ដែល $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ មានមេគុណខ្លះ $a_i \neq 0$
គ្មានវ៉ិចទ័រក្នុង S ជាបន្សំលីនេអ៊ែររាប់អស់របស់វ៉ិចទ័រផ្សេងទៀតក្នុង S	មានវ៉ិចទ័រខ្លះក្នុង S ជាបន្សំលីនេអ៊ែររាប់អស់របស់វ៉ិចទ័រផ្សេងទៀតក្នុង S
គ្រប់វ៉ិចទ័រ $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$: $\mathbf{v} \notin \operatorname{span}(\mathbf{S} - \{\mathbf{v}\})$	មានវ៉ិចទ័រមួយ $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ ដែល $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\mathbf{S} - \{\mathbf{v}\})$
គ្រប់ $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ សំណុំ $\operatorname{span}(\mathbf{S} - \{\mathbf{v}\})$ មិនផ្ទុកគ្រប់វ៉ិចទ័រក្នុង $\operatorname{span}(\mathbf{S})$	មានវ៉ិចទ័រខ្លះ $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ ដែល $\operatorname{span}(\mathbf{S} - \{\mathbf{v}\}) = \operatorname{span}(\mathbf{S})$
បើ $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ នោះ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ហើយគ្រប់ $k \geq 2$ គេបាន $\mathbf{v}_k \notin \operatorname{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\})$	បើ $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ នោះ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ឬចំពោះ $k \geq 2$ ខ្លះ គេបាន $\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$
គ្រប់សំណុំរងរាប់អស់របស់ S ជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា	មានសំណុំរងរាប់អស់ខ្លះរបស់ S ជាសំណុំអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា
គ្រប់វ៉ិចទ័រក្នុង $\operatorname{span}(\mathbf{S})$ អាចសរសេរជា បន្សំលីនេអ៊ែរបានតែមួយរបៀបគត់នៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយក្នុង S	មានវ៉ិចទ័រខ្លះក្នុង $\operatorname{span}(\mathbf{S})$ អាចសរសេរជា បន្សំលីនេអ៊ែរបានច្រើនរបៀបនៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយក្នុង S

គោល និង វិមាត្រ

និយមន័យ ២

យក **V** ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងយក $\mathcal{B}$ ជាសំណុំរងរបស់ **V** ។ គេហៅ $\mathcal{B}$ ថាជា **គោល** ចំពោះលំហ **V** លុះត្រាតែ លក្ខខណ្ឌទាំង២ខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់៖

(1) សំណុំ $\mathcal{B}$ បង្កលំហ **V** ។

(2) សំណុំ $\mathcal{B}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

Ex.1 បង្ហាញថា សំណុំ $\mathcal{B} = \{[1,-2],[2,3]\}$ ជាគោលចំពោះ $\mathbb{R}^2$ ដោយបង្ហាញថា វាបង្កលំហ $\mathbb{R}^2$ និងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

- **យើងបង្ហាញថា** $\mathcal{B}$ **បង្កលំហ** $\mathbb{R}^2$:
  បង្កើតម៉ាទ្រីសមួយ ដោយសរសេរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathcal{B}$ ជាជួរដេករបស់វា រួចប្រើ EROs បង្ហាញអោយដល់ម៉ាទ្រីសក្នុងទម្រង់ RREF ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = \left\{ a[1,0] + b[0,1] \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

បម្លែងលីនេអ៊ែរ

គោល និង វិមាត្រ

និយមន័យ ២

យក **V** ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងយក $\mathcal{B}$ ជាសំណុំរងរបស់ **V** ។ គេហៅ $\mathcal{B}$ ថាជា **គោល** ចំពោះលំហ **V** លុះត្រាតែ លក្ខខណ្ឌទាំង២ខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់៖

(1) សំណុំ $\mathcal{B}$ បង្កលំហ **V** ។

(2) សំណុំ $\mathcal{B}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

Ex.1 បង្ហាញថា សំណុំ $\mathcal{B} = \{[1,-2],[2,3]\}$ ជាគោលចំពោះ $\mathbb{R}^2$ ដោយបង្ហាញថា វាបង្កលំហ $\mathbb{R}^2$ និងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

- **យើងបង្ហាញថា** $\mathcal{B}$ **បង្កលំហ** $\mathbb{R}^2$:
  បង្កើតម៉ាទ្រីសមួយ ដោយសរសេរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathcal{B}$ ជាជួរដេករបស់វា រួចប្រើ EROs បង្ហាញអោយដល់ម៉ាទ្រីសក្នុងទម្រង់ RREF ៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ $\operatorname{span}(\mathcal{B}) = \left\{ a[1,0] + b[0,1] \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

HK Chapter 2

Cont...

- យើងបង្ហាញថា $\mathcal{B}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ :
  បង្កើតម៉ាទ្រីសមួយ ដោយសរសេរវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathcal{B}$ ជាជួរឈររបស់វា រួចប្រើវិធានតេស្តរកភាព មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EROs}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។ ដូច្នេះ $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយចំពោះលំហ $\mathbb{R}^3$ ។

សម្គាល់.

- លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{R}^n$ មានគោល $\left\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\right\}$ ហៅថា **គោលស្តង់ដា** ឬ **គោលកាណូនិច** ។
- សំណុំរង $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ជាគោល standard ចំពោះលំហ $\mathbb{R}^2$
  សំណុំរង $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ជាគោល standard ចំពោះលំហ $\mathbb{R}^3$ ។
- បើ $\mathcal{B}_1$ និង $\mathcal{B}_2$ ជាគោលពីរចំពោះលំហ $\mathbf{V}$ ដែលសំណុំ $\mathcal{B}_1$ និង $\mathcal{B}_2$ មានចំនួនធាតុរាប់អស់ នោះគេបាន $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ ។

វិមាត្ររបស់លំហវ៉ិចទ័រ

និយមន័យ ៣

យកលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{V}$ ។ បើ $\mathbf{V}$ មានគោល $\mathcal{B}$ ផ្ទុកធាតុមានចំនួនរាប់អស់ នោះគេថា លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{V}$ ជា **លំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់** ។ ក្នុងករណីនេះ គេតាងវិមាត្ររបស់លំហ $\mathbf{V}$ ដោយ $\dim(\mathbf{V})$ ស្មើនឹងចំនួនធាតុនៅក្នុងគោលរបស់លំហ $\mathbf{V}$ ។i.e.,

$$\dim(\mathbf{V}) = |\mathcal{B}| \quad (\text{កាឌីណាល់របស់គោល } \mathcal{B})$$

បើ $\mathbf{V}$ ពុំមានគោលរាប់អស់ទេ នោះលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{V}$ ហៅថា **លំហមានវិមាត្ររាប់មិនអស់** ។

Ex.

- ដោយលំហ $\mathbb{R}^3$ មានគោល standard $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ នោះ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ។ ដូច្នេះ គ្រប់គោលចំពោះលំហ $\mathbb{R}^3$ មានធាតុចំនួន 3 គត់ ។
  ជាទូទៅ $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ព្រោះលំហ $\mathbb{R}^n$ មានគោលរាប់អស់ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ។
- សំណុំ $\{1, x, x^2\}$ ជាគោល standard ចំពោះលំហ $\mathcal{P}_2$ នោះគេបាន $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$ ។
  ដូច្នេះ $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$ ($\mathcal{P}_n$ ជាលំហពហុធាដឺក្រេធំបំផុត n)

បម្លែងលីនេអ៊ែរ (Linear Transformations)

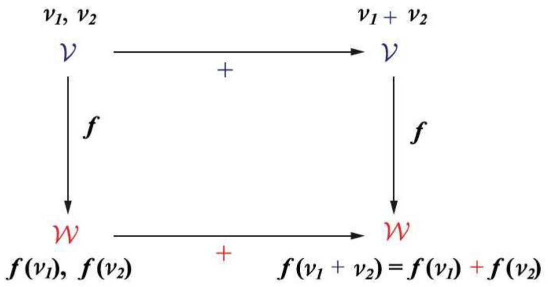
បម្លែងលីនេអ៊ែរ

និយមន័យ ៤

យក $\mathbf{V}$ និង $\mathbf{W}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រពីរ និងកំណត់អនុគមន៍ $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ។ ដូច្នេះ f ហៅថា **បម្លែងលីនេអ៊ែរ** (linear transformation) លុះត្រាតែ លក្ខខណ្ឌទាំងពីរផ្ទៀងផ្ទាត់៖

(1) $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$

(2) $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$ ចំពោះគ្រប់ $c \in \mathbb{R}$ និងគ្រប់ $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$



Note. បម្លែងលីនេអ៊ែរពីលំហ $\mathbf{V}$ ទៅលំហ $\mathbf{V}$ ខ្លួនឯង ហៅថា **ការីលីនេអ៊ែរ** (linear operator) កំណត់លើ $\mathbf{V}$ ។

Eg.

1. គេអោយ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ដែល $f([x,y])=[3x-4y,-x+2y]$ ។ ដូច្នេះ f ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ព្រោះ៖

$$f([x_1,y_1]+[x_2,y_2])=f([x_1+x_2,y_1+y_2])$$
$$=[3(x_1+x_2)-4(y_1+y_2),-(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)]=f([x_1,y_1])+f([x_2,y_2])$$
$$\text{ហើយ}\quad f(c[x,y])=f([cx,cy])=[3cx-4cy,-cx+2cy]=cf([x,y])$$

បម្លែងលីនេអ៊ែរ

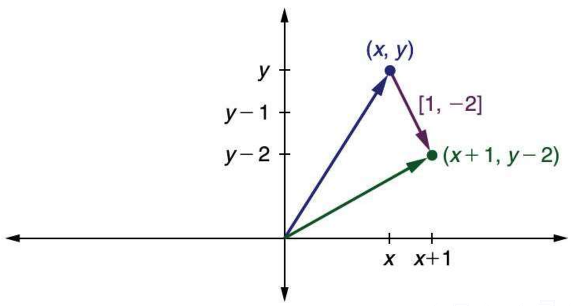
Eg.

1. គេអោយ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ដែល $f([x,y])=[3x-4y,-x+2y]$ ។ ដូច្នេះ f ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ព្រោះ៖

$$f([x_1,y_1]+[x_2,y_2])=f([x_1+x_2,y_1+y_2])$$
$$=[3(x_1+x_2)-4(y_1+y_2),-(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)]=f([x_1,y_1])+f([x_2,y_2])$$
$$\text{ហើយ}\quad f(c[x,y])=f([cx,cy])=[3cx-4cy,-cx+2cy]=cf([x,y])$$

2. គេអោយ $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ $h([x,y])=[x+1,y-2]=[x,y]+[1,-2]$ ។ គេបាន h មិនមែនជាបម្លែងលីនេអ៊ែរទេ ព្រោះ៖ បើយកវ៉ិចទ័រពីរក្នុង $\mathbb{R}^2$:

$$h([1,2]+[3,4])=h([4,6])=[5,4]\quad\text{ហើយ}\quad h([1,2])+h([3,4])=[2,0]+[4,2]=[6$$



លក្ខណៈគ្រឹះ

សន្មត $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរទូទៅ។ តាង $\mathbf{0}_\mathbf{V}$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុង $\mathbf{V}$ និងតាង $\mathbf{0}_\mathbf{W}$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុង $\mathbf{W}$ ។ គេបាន៖

(1) $T(\mathbf{0}_\mathbf{V}) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$

(2) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ គ្រប់ $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

(3) $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_nT(\mathbf{v}_n)$ គ្រប់ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ និង $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

Matrix of a Linear Transformation

- យក $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរមួយ។ ដូច្នេះ គេអាចរកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ បាន ដោយវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
ក្នុងករណីនេះ គេថាអនុគមន៍ T កំណត់ដោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។
- យក $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរមួយ។ ដូច្នេះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & & | \\ T(\vec{e}_1) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$$
ដែល $\vec{e}_i$ គឺជា ជួរឈរទី i^{th} របស់ម៉ាទ្រីសឯកតា $\mathbf{I}_n$ ហើយ $T(\vec{e}_i)$ គឺជាជួរឈរទី i^{th} របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។i.e.,
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

Eg.

1. យក T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ដែល

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់អនុវត្តន៍ T ដែល $T(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$?

បម្លែងលីនេអ៊ែរ

Eg.

1. យក T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ដែល

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់អនុវត្តន៍ T ដែល $T(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$?

2. ឧបមាថា T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរមួយ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ដែលកំណត់ដោយ

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់អនុវត្តន៍ T ដែល $T(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$?

Eg.

1. យក T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ដែល

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់អនុវត្តន៍ T ដែល $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$?

2. ឧបមាថា T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរមួយ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ដែលកំណត់ដោយ

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់អនុវត្តន៍ T ដែល $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$?
ក្នុងករណីនេះ គេសរសេរវ៉ិចទ័រ $[1,0]$ និង $[0,1]$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរទៅនឹងវ៉ិចទ័រគោល $\{[1,1],[0,-1]\}$ ដូចតទៅៈ

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\quad(1),\qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\quad(2)$$

Cont...

ដោះស្រាយ (1) គេបាន $a=1,b=1$ ហើយចំពោះ (2) គេបាន $c=0,d=-1$ ។ ដូច្នេះ

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=aT\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+bT\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=cT\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+dT\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺ

$$\mathbf{A}=\left[T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}4&-3\\4&-2\end{bmatrix}$$

Cont...

ដោះស្រាយ (1) គេបាន $a = 1, b = 1$ ហើយចំពោះ (2) គេបាន $c = 0, d = -1$ ។ ដូច្នេះ

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = aT\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + bT\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$
$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = cT\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + dT\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺ

$$\mathbf{A} = \left[T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}4 & -3\\4 & -2\end{bmatrix}$$

3. ចូររកម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែងលីនេអ៊ែរ T ដែល

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 - x_2\\2x_3\end{bmatrix}$$

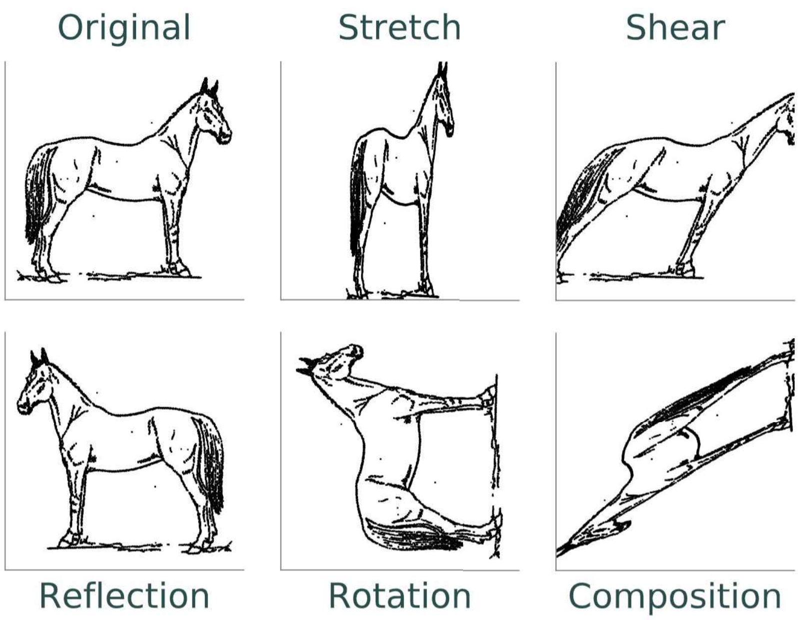
គេបាន

$$T(e_1) = T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ T(e_2) = T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\ T(e_3) = T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},$$

ដូច្នេះ

$$\mathbf{A} = \left[T(e_1), T(e_2), T(e_3)\right] = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

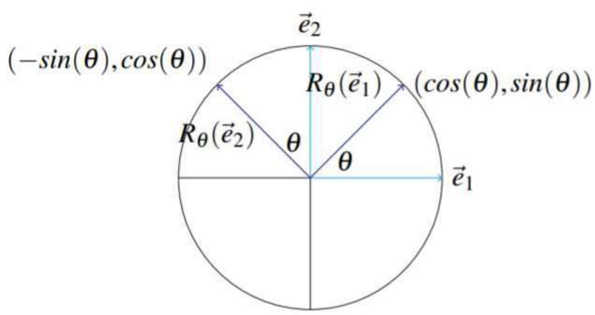
អនុវត្តន៍របស់បម្លែងលីនេអ៊ែរក្នុង $\mathbb{R}^2$ និង $\mathbb{R}^3$



ម៉ាទ្រីសនៃរង្វិល និង បម្លែងឆ្លុះក្នុង $\mathbb{R}^2$

- យក $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ គឺជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ដោយបង្វិលវ៉ិចទ័រទាំងឡាយតាមមុំ θ ។ ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ របស់បម្លែង R_θ កំណត់ដោយៈ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



តាមរយៈរូប គេបានៈ

$$R_\theta(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, R_\theta(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ex.

យក $R_{\frac{\pi}{2}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ តាងអោយរង្វិលតាមមុំ $\pi/2$ ។ ចូររកម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង $R_{\frac{\pi}{2}}$ រួចរក $R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x})$ ដែល $\mathbf{x}=[1,-2]$ ។

- ម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង $R_{\frac{\pi}{2}}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\pi/2 & -\sin\pi/2\\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

- ដើម្បីរក $R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x})$ គេគុណម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង $R_{\frac{\pi}{2}}$ និង $\mathbf{x}$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីសនៃរង្វិល និង បម្លែងឆ្លុះក្នុង $\mathbb{R}^2$

- យក $Q_m:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ដោយធ្វើអោយវ៉ិចទ័រទាំងឡាយឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $\mathbf{y}=m\mathbf{x}$ ។ ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង Q_m កំណត់ដោយ

$$\mathbf{A}=\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{bmatrix}$$

Ex. យក $Q_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ តាងអោយបម្លែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ $\mathbf{y}=2\mathbf{x}$ ។ ចូររកម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង Q_2 រួចគណនា $Q_2(\mathbf{x})$ ដែល $\mathbf{x}=[1,-2]$ ។

- ម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង Q_2 កំណត់ដោយ៖

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{bmatrix}=\frac{1}{1+(2)^2}\begin{bmatrix}1-(2)^2 & 2(2)\\ 2(2) & (2)^2-1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$

- គណនា $Q_2(\mathbf{x})$:

$$Q_2(\mathbf{x})=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 8 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{19}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

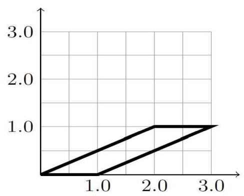
ប្តូរទ្រង់ទ្រាយតាមអ័ក្សដេក និងអ័ក្សឈរក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$

- យក $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ជា បម្លែងលីនេអ៊ែរក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ បានមកដោយប្តូរទ្រង់ទ្រាយវ៉ិចទ័រ ស្របតាមអ័ក្ស x តាមមេគុណ m (កូអរដោនេ y មិនប្រែប្រួល) ។ ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែង T កំណត់ដោយ៖

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+my \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

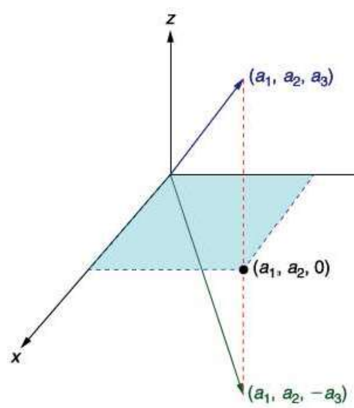
- ដូចគ្នាដែរ ចំពោះបម្លែងលីនេអ៊ែរ T ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ដោយប្តូរទ្រង់ទ្រាយវ៉ិចទ័រ ស្របតាមអ័ក្ស y តាមមេគុណ m មានម៉ាទ្រីសរបស់បម្លែងកំណត់ដោយ៖

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ mx+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



បម្លែងលីនេអ៊ែរសំខាន់ក្នុង $\mathbb{R}^3$

1. បម្លែងឆ្លុះ : យក $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $T([a_1, a_2, a_3]) = [a_1, a_2, -a_3]$ ។ គេបាន T ជាបម្លែងឆ្លុះនៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយ $[a_1, a_2, a_3]$ ធៀបនឹងប្លង់ xy ។

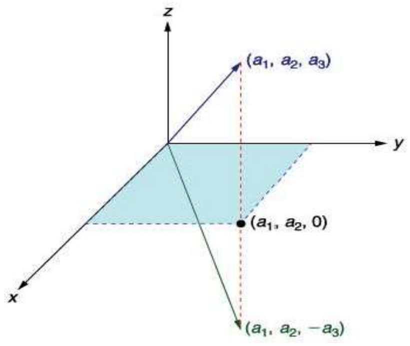


ម៉ាទ្រីសនៃបម្លែងនេះកំណត់ដោយ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

បម្លែងលីនេអ៊ែរសំខាន់ក្នុង $\mathbb{R}^3$

2. **បង្រួម ឬ ពង្រីក** : យក $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $T([a_1,a_2,a_3])=[ca_1,ca_2,ca_3]$ ចំពោះគ្រប់ $c\in\mathbb{R}$ ។ គេហៅ T ជា បង្រួមនៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយ $[a_1,a_2,a_3]$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ បើ $|c|<1$ ហើយ T ហៅថា ពង្រីកនៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយ $[a_1,a_2,a_3]$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ បើ $|c|>1$។

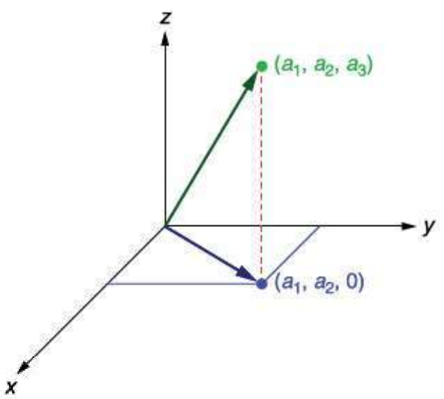


ម៉ាទ្រីសនៃបម្លែងនេះកំណត់ដោយ

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & c & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

បម្លែងលីនេអ៊ែរសំខាន់ក្នុង $\mathbb{R}^3$

3. **ចំណោលលើប្លង់** : យក $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $T([a_1,a_2,a_3])=[a_1,a_2,0]$ ។ គេហៅ T ជា ចំណោលនៃវ៉ិចទ័រទាំងឡាយ $[a_1,a_2,a_3]$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ មកលើប្លង់ xy។

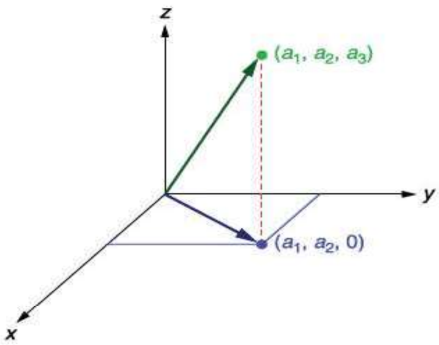


ម៉ាទ្រីសនៃបម្លែងនេះកំណត់ដោយ

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

បម្លែងលីនេអ៊ែរសំខាន់ក្នុង $\mathbb{R}^3$

4. រង្វិលជុំវិញអ័ក្ស z តាមមុំ θ ធៀបនឹងប្លង់ xy : យក $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $T([a_1,a_2,a_3])=[a_1\cos\theta-a_2\sin\theta, a_1\sin\theta+a_2\cos\theta, a_3]$ ។ គេហៅ T ជា រង្វិលនៃវិចទ័រទាំងឡាយ $[a_1,a_2,a_3]$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ជុំវិញអ័ក្ស z តាមមុំ θ ធៀបនឹងប្លង់ xy ។

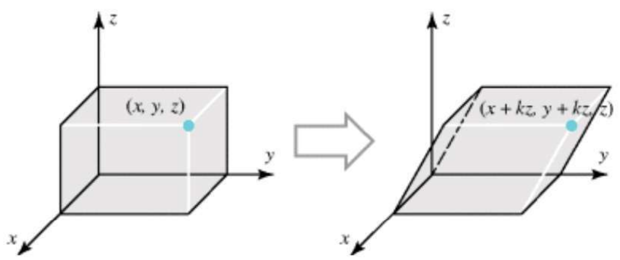


ម៉ាទ្រីសនៃបម្លែងនេះកំណត់ដោយ

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

បម្លែងលីនេអ៊ែរសំខាន់ក្នុង $\mathbb{R}^3$

5. ប្តូរទ្រង់ទ្រាយ (shear) តាមទិសដៅ xy មានមេគុណ k : យក $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $T([x,y,z])=[x+kz, y+kz, z]$ ។ គេហៅ T ជា ការប្តូរទ្រង់ទ្រាយនៃវិចទ័រទាំងឡាយ $[x,y,z]$ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ស្របទៅនឹងប្លង់ xy ទៅរកទីតាំងថ្មី $[x+kz, y+kz, z]$ ។i.e., ប្តូរកូអរដោនេ x និង y ដោយរក្សាកូអរដោនេ z មិនប្រែប្រួល ។



ម៉ាទ្រីសនៃបម្លែងនេះកំណត់ដោយ

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

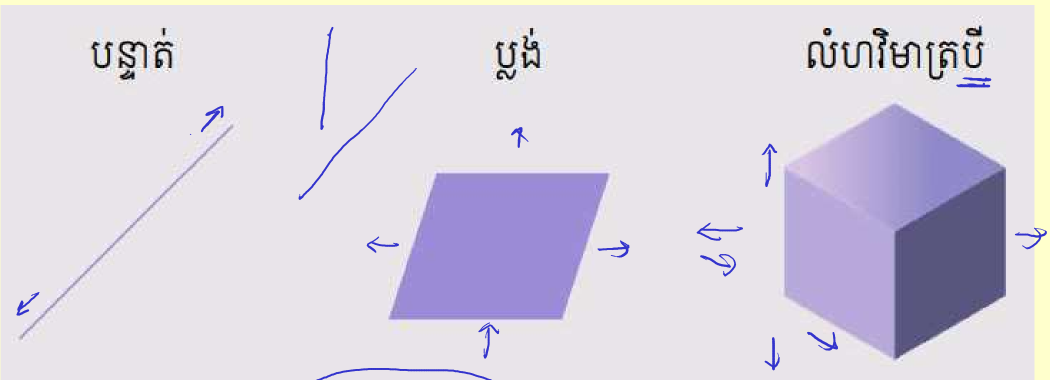
រំលឹក
វ៉ិចទ័រ បន្ទាត់ និង ប្លង់

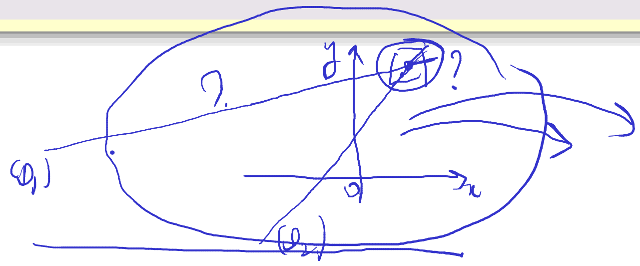
បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

បន្ទាត់ ប្លង់ និង លំហ

អត្ថន័យធរណីមាត្រ





$$\begin{cases} x+3y=4 \\ -x-3y=5 \end{cases}$$

បន្ទាត់ ប្លង់ លំហ

សំណុំចំនួនពិត ជាសំណុំនៃចំនួនសនិទាន និង អសនិទានទាំងអស់ តាងដោយ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$។
ប្លង់ចំនួនពិត ជាសំណុំនៃគូលំដាប់ (a, b) ចំពោះគ្រប់ធាតុ $a, b \in \mathbb{R}$ ទាំងអស់ តាងដោយ

$$\mathbb{R}^2 := \{(a, b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

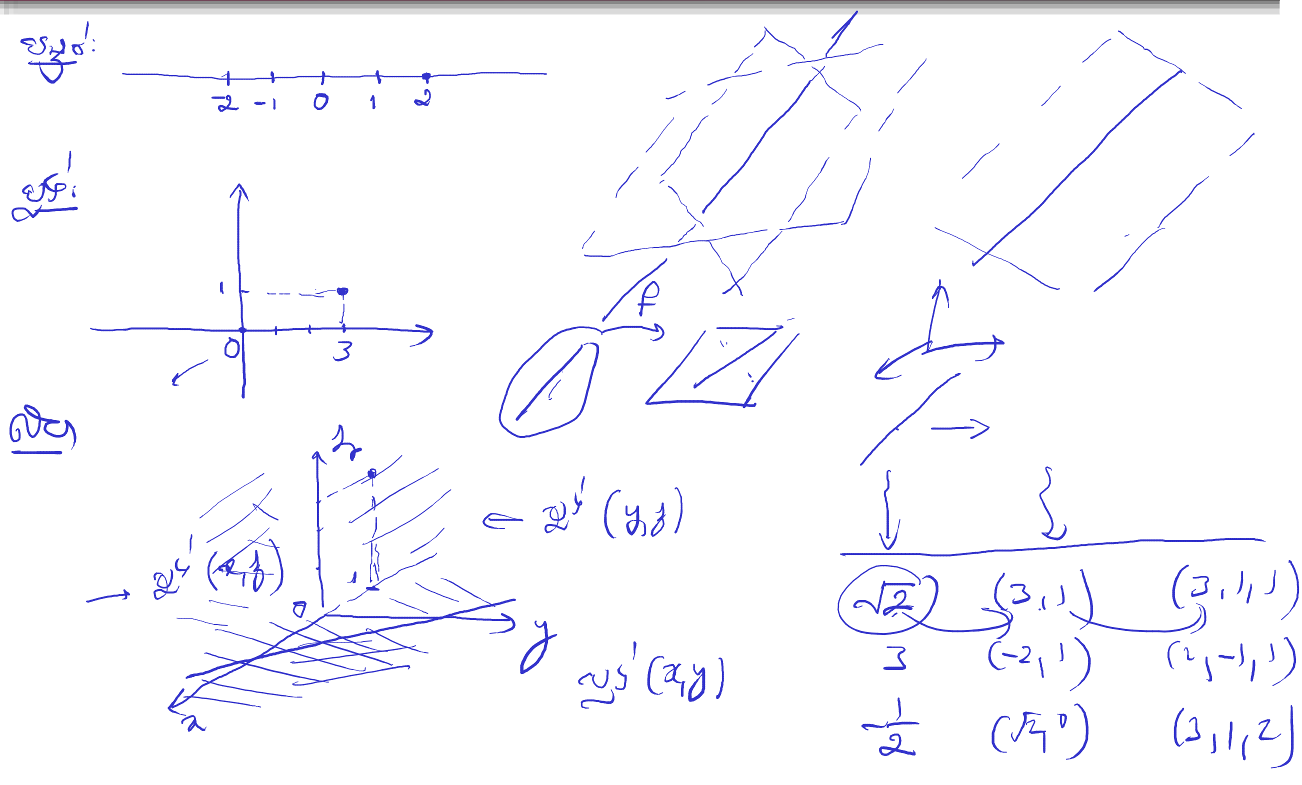
លំហពិតវិមាត្របី ជាសំណុំនៃធាតុមានលំដាប់ (a, b, c) ចំពោះគ្រប់ធាតុ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ទាំងអស់ តាងដោយ

$$\mathbb{R}^3 := \{(a, b, c) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$$

ជាទូទៅ លំហពិតវិមាត្រ n តាង និង កំណត់ដោយ

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1, 2, \cdots, n\}$$

ការដៅចំណុចលើបន្ទាត់ ក្នុងប្លង់ និង ក្នុងលំហ



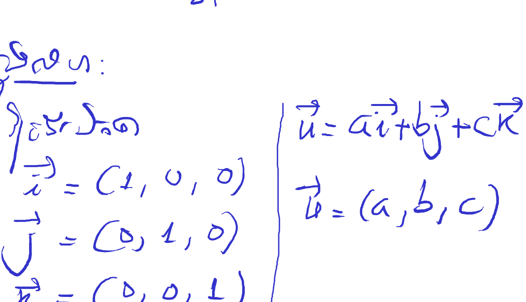
វ៉ិចទ័រលើបន្ទាត់ ក្នុងប្លង់ និង ក្នុងលំហ

វ៉ិចទ័រមួយកំណត់ដោយលក្ខណៈ 4 យ៉ាងគឺ:
- ចំណុចចាប់ផ្ដើម
- ទិស
- ទិសដៅ
- ប្រវែង

វ៉ិចទ័រពីរស្មើគ្នា កាលណា វ៉ិចទ័រទាំងពីរមាន ទិស ទិសដៅ ដូចគ្នា ហើយ ប្រវែងស្មើគ្នា.

វ៉ិចទ័រលើបន្ទាត់ ក្នុងប្លង់ និង ក្នុងលំហ

គ្រឹះតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ដែល $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា [illegible]
[illegible]



ឧទាហរណ៍: $\vec{i} = (1,0)$
$\vec{j} = (0,1)$

[illegible] $\vec{u}$ [illegible] ដោយ

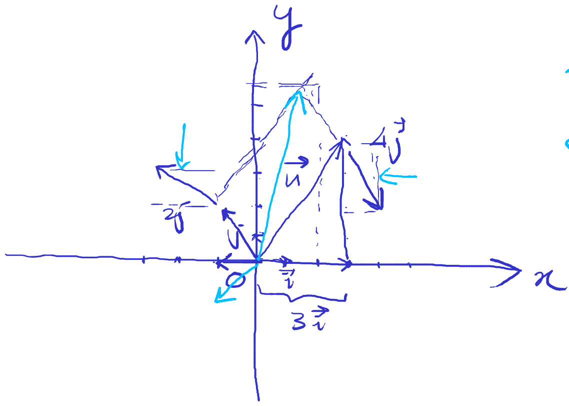
$$\boxed{\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}\ ,\quad a,b \in \mathbb{R}} \quad (1).$$

$$= a(1,0) + b(0,1)$$
$$= (a,0) + (0,b)$$
$$\boxed{\vec{u} = (a,b)} \quad (2)$$

ឧទាហរណ៍:
វ៉ិចទ័រឯកតា
$\vec{i} = (1,0,0)$
$\vec{j} = (0,1,0)$
$\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$
$\vec{u} = (a,b,c)$

ការដៅវ៉ិចទ័រលើបន្ទាត់ ក្នុងប្លង់ និង ក្នុងលំហ

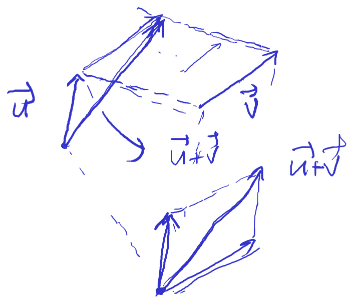


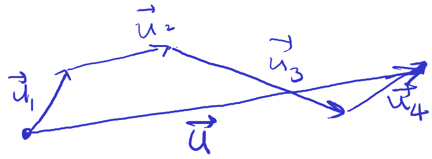
$$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$
$$\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$
$$2\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$(-2, 1) + (1, -2) = \boxed{(-1, -1)}$$

ប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រ

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 = ?$$





$$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$
$$\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\vec{u} = (3, 4)$$
$$\vec{v} = (-1, 2)$$
$$\vec{v} = (2, 6)$$

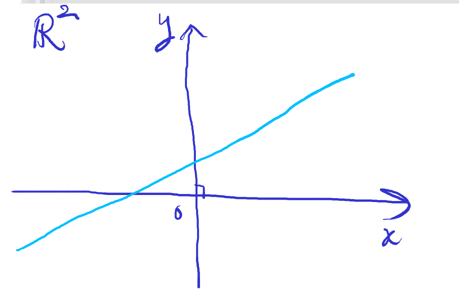
ផលគុណស្កាលែ:

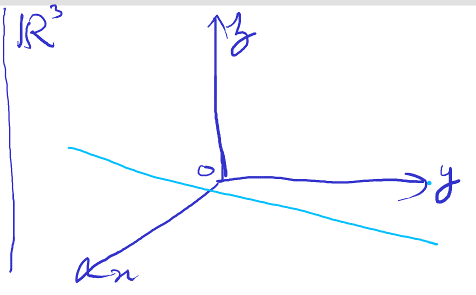
$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$(3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$$
$$(3)(-1) + (4)(2) = 4.$$
$$(3, 4) \cdot (-1, 2)$$

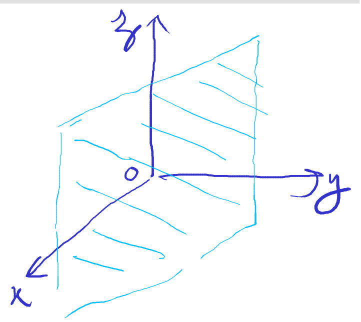
$$(3, 4) \cdot (-1, 2) = -3 + 8 = 5$$
$$(1, 0, 2) \cdot (3, 1, 4) = 3 + 0 + 8 = 11$$

$$-5\vec{u} = -5(3\vec{i} + 4\vec{j}) = -15\vec{i} - 20\vec{j}$$
$$= -5(3, 4) = (-15, -20)$$

សមីការបន្ទាត់ និង ប្លង់







សមីការទូទៅ:

$(D):\ ax+by=c\ ,\quad a,b,c\in\mathbb{R}$

ឧទា: $3x+5y=-1$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ:

$$(D):\ \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

សមីការឆ្លុះ

$$(D):\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$$

សមីការទូទៅប្លង់:

$(P):\ ax+by+cz=d\ ,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}.$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រប្លង់

$$(P):\ \begin{cases} x=x_0+at+ms \\ y=y_0+bt+ns \\ z=z_0+ct+ps \end{cases},\quad t,s\in\mathbb{R}.$$

សមីការបន្ទាត់ និង ប្លង់

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

សមីការឆ្លុះបន្ទាត់:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}}=\frac{z-z_0}{c}$$

ប្លង់ ឬ ប្លង់ ?

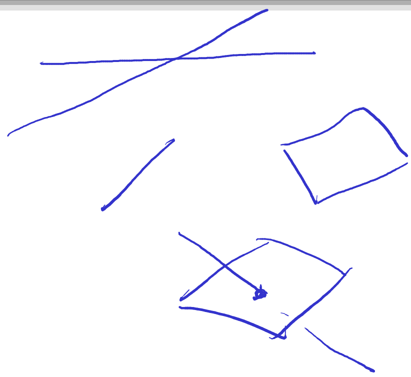
សមីការ ប៉ារ៉ាម៉ែត្រប្លង់:

$$\begin{cases} x=3t-s \\ y=4+t+2s \\ z=2-4s \end{cases},\quad t,s\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x=2+3t-3s=2+3(t-s) \\ y=1+t-s=1+(t-s) \\ z=-4t+4s=-4(t-s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+t \\ z=-4t \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ



$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=d \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 3x-2y+z=3 \\ 5x-2y+3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5=6 \\ \vdots \end{cases}$$

?

សមីការបន្ទាត់ក្នុងប្លង់
សប្តាហ៍ទី២

បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

សមីការបន្ទាត់ក្នុងប្លង់

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេមានចំណុច $A(a_1, a_2)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2)$ នោះមានបន្ទាត់ (L) តែមួយគត់ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$។ បន្ទាត់ (L) នេះមានសមីការ៖

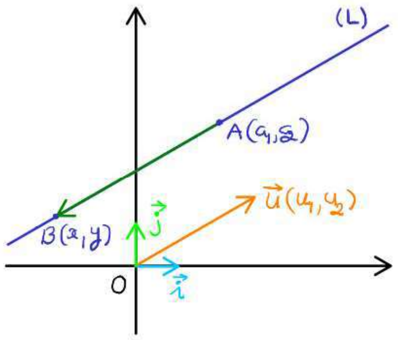
- $(L) : \begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ ហៅថា សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)។

  បើ $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ នោះ៖
- $(L) : \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$ ហៅថា សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L)។
- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតខាងលើអាចសរសេរជាទម្រង់ $(L) : u_2 x - u_1 y = c$ ដែល $c = a_1 u_2 - a_2 u_1$ ហៅថាសមីការទូទៅនៃបន្ទាត់ (L)។

សម្គាល់៖

- ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ វ៉ិចទ័រ $t\vec{u}$ ហៅថា វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)។
- បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា កាលណាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរកូលីនេអ៊ែរគ្នា មានន័យថា វ៉ិចទ័រទាំងពីរមានទិសដូចគ្នា។
- បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា កាលណាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរអរតូកូណាល់គ្នា មានន័យថា វ៉ិចទ័រទាំងពីរមានផលគុណស្កាលែស្មើសូន្យ។

សម្រាយបញ្ជាក់



• បើ $B(x,y)$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=(x-a_1,y-a_2)$ ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2)$ នោះមាន $t\in\mathbb{R}$ ដែល

$(x-a_1,y-a_2)=t(u_1,u_2)=(u_1t,u_2t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-a_1=u_1t \\ y-a_2=u_2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a_1+u_1t \\ y=a_2+u_2t \end{cases}$$

• ច្រាសមកវិញ ឧបមា $(L): x=a_1+u_1t, y=a_2+u_2t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$។ ចំពោះ $t=0$ និង $t=1$ យើងបាន (L) កាត់តាមចំណុច $A(a_1,a_2)$ និង ចំណុច $B(a_1+u_1,a_2+u_2)$ រៀងគ្នា នាំអោយ $\overrightarrow{AB}=(u_1,u_2)$ នាំអោយ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{u}$ យើងបាន (L) ជាបន្ទាត់កាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{u}$។

ឧទាហរណ៍១៖ចូរសរសេរសមីការទូទៅបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(-2,1)$ និង $B(3,2)$។

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(5,1)$។ បន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច A និង B តាងដោយ (AB) គឺជាបន្ទាត់ដែលស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$។ បន្ទាត់ (AB) មានសមីការឆ្លុះ

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{1}\Leftrightarrow x+2=5y-5\Leftrightarrow x-5y=-7$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (AB) មានសមីការទូទៅ $(AB): x-5y=-7$

ឧទាហរណ៍២៖ តើបន្ទាត់ $(L_1): 2x-3y=1$ និង $(L_2): x=1+2t, y=-1-t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ ប្រសព្វគ្នាឬទេ? បើប្រសព្វ ចូររកចំណុចប្រសព្វនោះ។

បន្ទាត់ (L_1) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(3,2)$ ហើយបន្ទាត់ (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(2,-1)$។ ដោយ $(3,2)\neq k(2,-1), \forall k\in\mathbb{R}$ នាំអោយបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) កាត់គ្នា យើងបាន ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) គឺជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x-3y=1 & (1)\\ x=1+2t & (2)\\ y=-1-t & (3)\end{cases}$$

ជំនួស $(2),(3)$ ក្នុង (1) យើងបាន $2+4t+3+3t=1$ នាំអោយ $t=-\frac{4}{7}$
នាំអោយ $x=1-\frac{8}{7}=-\frac{1}{7}, y=-1+\frac{4}{7}=-\frac{3}{7}$
ដូចនេះ $(-\frac{1}{7},-\frac{3}{7})$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (L_1) និង (L_2)។

បន្ទាត់ និង ប្លង់ក្នុងលំហ
សប្តាហ៍ទី៣

បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ គេមានចំណុច $A(a_1, a_2, a_3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ នោះមានប្លង់ (P) មួយដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយអរតូកូណាល់ (កែង) នឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}$។ ប្លង់ (P) នេះ មានសមីការៈ

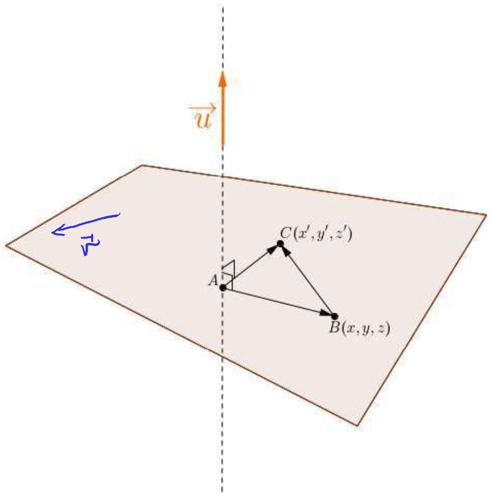
- $(P) : u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0$ ហៅថា សមីការស្តង់ដានៃប្លង់ (P)។

  សម្រួលសមីការខាងលើ យើងបាន
- $(P) : u_1x + u_2y + u_3z = d$ ដែល $d = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3$ ហៅថា សមីការទូទៅនៃប្លង់ (P)

សម្គាល់៖

- ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $t\overrightarrow{u}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)។
- ចំពោះប្លង់ពីរក្នុងលំហ ប្លង់ទាំងពីរអាចត្រួតស៊ីគ្នា (ជាប្លង់តែមួយ) ឬ ស្របគ្នា ឬ កាត់គ្នាបានបន្ទាត់មួយ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង $B(x,y,z)$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) នោះ $\overrightarrow{AB} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$ ជាវិចទ័រស្ថិតនៅលើប្លង់ (P)។
ដោយ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (P) នោះ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹងគ្រប់វិចទ័រស្ថិតក្នុងប្លង់ (P)។ យើងបាន $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ សមមូល
$u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0$

ច្រាសមកវិញ បើ

$(P) : u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0$ នោះកូអរដោនេនៃ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (P) នាំអោយ (P) កាត់តាម A។ តាង $C(x', y', z')$ នៅលើប្លង់ (P) នោះ $\overrightarrow{BC} = (x' - x, y' - y, z' - z)$ ស្ថិតក្នុងប្លង់ (P)។ ដោយ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ និង $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ និង $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ យើងបាន $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BA} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
ដូចនេះ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹងគ្រប់វិចទ័រក្នុងប្លង់ (P) នាំអោយ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (P)។

សម្គាល់

គេអោយសមីការប្លង់ $(P) : 3x + y - z = 4$។ តាង $y = s, z = t$ ដែល $s, t \in \mathbb{R}$ យើងបាន $3x = 4 - s + t \Rightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t$។ ដូចនេះ (P) អាចសរសេរជា

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t \\ y = s \\ z = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$ ហៅថា សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់ (P)។

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃប្លង់ (P) មានច្រើនរាប់មិនអស់។
បើតាង $x = s, y = 5 + 2t$ នាំអោយ $z = 1 + 3s + 2t$ យើងបាន

$$\begin{cases} x = s \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3s + 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមួយទៀតនៃប្លង់ (P)។

ឧទាហរណ៍១៖ សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់

$$(P):\begin{cases} x=1+s+t & (1)\\ y=2s-t & (2)\\ z=2-s-2t & (3)\end{cases},\ s,t\in\mathbb{R}។$$

វិភាគ:

- វ៉ិចទ័រមេគុណនៃអញ្ញាត s គឺ $\vec{u}=(1,2,-1)$
- វ៉ិចទ័រមេគុណនៃអញ្ញាត t គឺ $\vec{v}=(1,-1,-2)$

យើងបាន $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ មិនកូលីនេអ៊ែរ

យើងចង់បានបំបាត់អញ្ញាតនៃ $ax+by+cz=d$ គឺ មិនអាស្រ័យនឹងអញ្ញាត s និង t ទេ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវ ស្វែងរក $a,b,c\in\mathbb{R}$ ដែល

$$a(1)+b(2)+c(3)=d \rightarrow \text{ចំនួនថេរ.}$$

ឧទាហរណ៍១៖ សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់

$$(P):\begin{cases} x=1+s+t & (1)\\ y=2s-t & (2)\\ z=2-s-2t & (3)\end{cases},\ s,t\in\mathbb{R}។$$

គុណសមីការ $(1),(2),(3)$ រៀងគ្នានឹង $a,b,c\neq 0$ ហើយបូកបញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$ax+by+cz=(a+2c)+(a+2b-c)s+(a-b-2c)t$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}a+2b-c=0\\ a-b-2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+2b=c & (i)\\ a-b=2c & (ii)\end{cases}$

យក $(i)-(ii): 3b=-c\Rightarrow b=-\frac{c}{3}$

$(ii)\Rightarrow a=2c-\frac{c}{3}=\frac{5c}{3}$

យក $c=3\Rightarrow a=5, b=-1, a+2c=11$

ដូចនេះ

$$(P): 5x-y+3z=11$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ បើ $s=t=0, s=t=1, s=t=-1$ យើងបាន(រៀងគ្នា)ចំណុច $(1,0,2),(3,1,-1),(-1,-1,5)$ ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P)។

សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(a_1, a_2, a_3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ នោះមានបន្ទាត់ (L) តែមួយគត់ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$។ បន្ទាត់ (L) នេះមានសមីការ៖

- $(L) : \begin{cases} x = a_1 + u_1 t & (1) \\ y = a_2 + u_2 t & (2) \\ z = a_3 + u_3 t & (3) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ហៅថា សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)។

  បើ $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$ នោះ
- $(L) : \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2} = \dfrac{z - a_3}{u_3}$ ហៅថា សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L)។
- ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) នៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតខាងលើ យើងបាន $u_2 x - u_1 y = a_1 u_2 - a_2 u_1$។ ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (3) យើងបាន $u_3 x - u_1 z = a_1 u_3 - a_3 u_1$។ ដូចនេះ
- $(L) : \begin{cases} (P_1) : u_2 x - u_1 y = a_1 u_2 - a_2 u_1 \\ (P_2) : u_3 x - u_1 z = a_1 u_3 - a_3 u_1 \end{cases}$ ជាប្រសព្វនៃប្លង់ (P_1) និង (P_2)។

សម្គាល់៖ ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $t\vec{u}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)។

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

$$(L) : \begin{cases} 2x + 5y - z = 0 & (P_1) \\ x - y + 3z = 2 & (P_2) \end{cases}$$

វិភាគ : បន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វនៃប្លង់ (P_1) និង (P_2) ដោយប្លង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា ព្រោះ ប្លង់ទាំងពីរមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា ។

ដំណោះ:
- ដើម្បីរកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ ... ប្លង់ទាំងពីរ ... ប្លង់ទាំងពីរ ... ។

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

$$(L):\begin{cases}2x+5y-z=0 & (P_1)\\ x-y+3z=2 & (P_2)\end{cases}$$

ប្លង់ (P_1) និង (P_2) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $(2,5,-1)$ និង $(1,-1,3)$ ដែលជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា នាំអោយ (P_1) ប្រសព្វ (P_2) បានបន្ទាត់មួយគត់។

តាង $y=t$ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x-z=-5t & (1)\\ x+3z=t+2 & (2)\end{cases}$

$(1)-2(2):-7z=-7t-4\Rightarrow z=\frac{4}{7}+t$

$(2)\Rightarrow x=t+2-\frac{12}{7}-3t=\frac{2}{7}-2t$

ដូចនេះ

$$(L):\begin{cases}x=\frac{2}{7}-2t\\ y=t & ,t\in\mathbb{R}\\ z=\frac{4}{7}+t\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថាសមីការ $\begin{cases}x=-1+2s-t\\ y=4-2s+t & ,s,t\in\mathbb{R}\\ z=2+4s-2t\end{cases}$ *ជាសមីការបន្ទាត់ រួចសរសេរសមីការឆ្លុះរបស់វា។*

ដំណោះ:

- វ៉ិចទ័រមេគុណនៃប៉ារ៉ាម៉ែត s គឺ $\vec{u}=(2,-2,4)$
- វ៉ិចទ័រមេគុណនៃប៉ារ៉ាម៉ែត t គឺ $\vec{v}=(-1,1,-2)$

ឃើញថា $\vec{u} // \vec{v}$

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថាសមីការ $\begin{cases} x = -1 + 2s - t \\ y = 4 - 2s + t \\ z = 2 + 4s - 2t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$ *ជាសមីការបន្ទាត់ រួចសរសេរសមីការឆ្លុះរបស់វា។*

សមីការខាងលើអាចសរសេរជា $\begin{cases} x = -1 + (2s - t) \\ y = 4 - (2s - t) \\ z = 2 + 2(2s - t) \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$

ជំនួស $2s - t$ ដោយ t យើងបាន $(L) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់។

ទាញរក t ពីក្នុងសមីការនីមួយៗ រួចផ្ទឹម t យើងទទួលបានសមីការឆ្លុះ៖

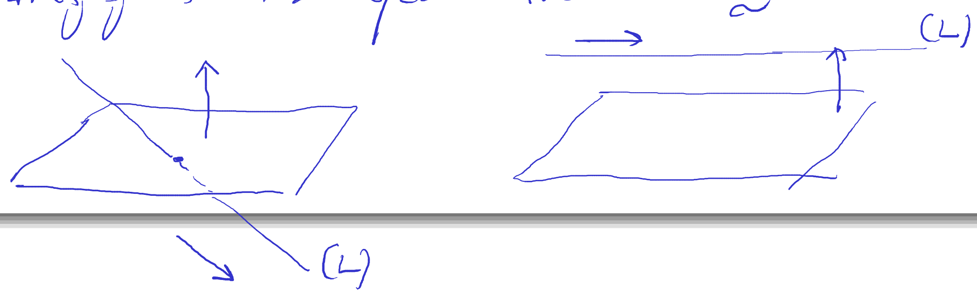
$$(L) : x + 1 = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 2}{2}$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូររកចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) ខាងក្រោម៖

$$(L) : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad (P) : 4x + y + z = 4$$

ចំណាំ:

- បន្ទាត់ប្រសព្វនឹងប្លង់ លុះត្រាតែ វាមានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស មិនអរតូកូណាល់ នឹង វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ របស់ប្លង់ ។



ឧទាហរណ៍៨៖ ចូររកចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) ខាងក្រោម៖

$$(L):\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = 3-4t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \qquad (P): 4x+y+z=4$$

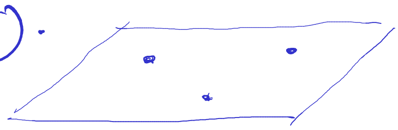
បន្ទាត់ (L) មានវិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u}=(-2,1,-4)$
ប្លង់ (P) មានវិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n}=(4,1,1)$
ដោយ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=-8+1-4=-11\neq 0$ នោះបន្ទាត់ (L) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់មួយចំណុច។ ជំនួសតម្លៃ x,y,z នៃបន្ទាត់ (L) ទៅក្នុងសមីការប្លង់ (P) យើងបាន

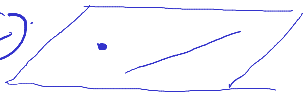
$$4(3-2t)+t+3-4t=4 \Leftrightarrow -11t+15=4 \Leftrightarrow t=1$$

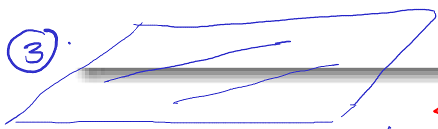
ជំនួស $t=1$ ទៅក្នុងបន្ទាត់ (L) យើងទទួលបាន $(1,1,-1)$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)។

ឧទាហរណ៍៩៖ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L_1):\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -3-5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ *និង*
$(L_2): \dfrac{x}{2}=y-3=\dfrac{z-2}{4}$ *ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយគត់ រួចសរសេរសមីការប្លង់នោះ។*

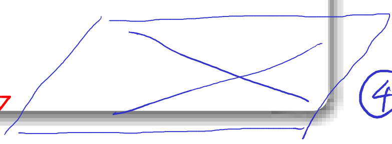
ចំណាំ : ប្លង់មួយអាចកំណត់បាន 4 ករណីដូចខាងក្រោម៖

①  - បីចំណុចមិនរត់ត្រង់គ្នា

②  - បន្ទាត់មួយនិងចំណុចមួយនៅក្រៅបន្ទាត់

③ 

បន្ទាត់ពីរស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ
ស្រប ឬ
(ឬ)

④ 

បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា (ក្នុងប្លង់តែមួយ)

បន្ទាត់ពីរកាត់គ្នា

ឧទាហរណ៍៥៖ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L_1):\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-3-5t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ និង $(L_2):\dfrac{x}{2}=y-3=\dfrac{z-2}{4}$ ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយគត់ រួចសរសេរសមីការប្លង់នោះ។

បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $(1,-1,-5)$ និង $(2,1,4)$ រៀងគ្នា ដែលវ៉ិចទ័រទាំងពីរមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នាទេ។ ជំនួស x,y,z នៃ (L_1) ក្នុង (L_2) យើងបាន

$$\frac{1+t}{2}=-1-t=\frac{-5-5t}{4}\Rightarrow\begin{cases}1+t=-2-2t\\-4-4t=-5-5t\end{cases}\Rightarrow t=-1$$

ជំនួស $t=-1$ ក្នុង (L_1) យើងបាន $(0,3,2)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (L_1) និង (L_2)។ ដោយ (L_1) និង (L_2) មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា នោះ (L_1) និង (L_2) ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយគត់ តាងដោយ (P)។

របៀបទីមួយ

ម៉្យាងទៀត ចំណុច $(1,2,-3)$ ស្ថិតលើបន្ទាត់ (L_1) និង ចំណុច $(-2,2,-2)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L_2)។ យើងបានចំណុច $(0,3,2),(1,2,-3),(-2,2,-2)$ ជាបីចំណុចរត់មិនត្រង់ជួរស្ថិតក្នុងប្លង់ $(P): ax+by+cz=d$ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}3b+2c=d & (1)\\a+2b-3c=d & (2)\\-2a+2b-2c=d & (3)\end{cases}$$

$2(2)+(3): 6b-8c=3d \qquad (4)$
$(4)-2(1): -12c=d\Rightarrow c=\frac{-d}{12}$
$(4)+4(1): 18b=7d\Rightarrow b=\frac{7d}{18}$
$(2)\Rightarrow a=d-\frac{14d}{18}-\frac{d}{4}=\frac{-d}{36}$
យក $d=-36$ យើងបាន $a=1, b=-14, c=3$ ហើយប្លង់ (P) មានសមីការ

$$(P): x-14y+3z=-36$$

របៀបទីពីរ

ម៉្យាងទៀត ចំណុច $(1, 2, -3)$ ស្ថិតលើបន្ទាត់ (L_1) និង ចំណុច $(-2, 2, -2)$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L_2)។ យើងបានចំណុច $A(0, 3, 2), B(1, 2, -3), C(-2, 2, -2)$ ជាបីចំណុចរត់មិនត្រង់ជួរស្ថិតក្នុងប្លង់ នាំអោយ $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -5), \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -4)$។

តាង $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) នាំអោយ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
យើងបាន ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} a - b - 5c = 0 \\ -2a - b - 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 5c \\ -2a - b = 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{3} \\ b = \frac{-14c}{3} \end{cases}$$

យក $c = 3$ នាំអោយ $a = 1, b = -14$ យើងបាន $\overrightarrow{u} = (1, -14, 3)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)។ យក $A(0, 3, 2)$ ជាចំណុចកាត់តាម យើងបាន

$(P) : x - 14(y - 3) + 3(z - 2) = 0 \Rightarrow (P) : x - 14y + 3z = -36$

ម៉ាទ្រីស និងចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស
សប្តាហ៍ទី៤

បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

សញ្ញាណម៉ាទ្រីស

គេអោយចំនួនគត់ធម្មជាតិ m, n។ ម៉ាទ្រីស $m \times n$ គឺជាតំរៀបនៃចំនួនដែលមាន m ជួរដេក និង n ជួរឈរ។
ឧទាហរណ៍៖

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 2 \times 3 \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 5 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 3 \times 3 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 3 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 1 \times 5 \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីស } 4 \times 1$$

ការតាងម៉ាទ្រីស

បើ A ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$ គេកំណត់តាង A ដោយ

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ដែល a_{ij} ហៅថា ធាតុទូទៅនៃម៉ាទ្រីស តាងអោយចំនួនដែលនៅក្នុងតួដេកទី i និងជួរឈរទី j ហើយ $1 \le i \le m$ និង $1 \le j \le n$។ បើ $m = n$ យើងកំណត់តាងដោយ $A = [a_{ij}]_n$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n។
បើយើងស្គាល់ធាតុទូទៅនៃម៉ាទ្រីស យើងអាចសរសេរម៉ាទ្រីសបាន។ ម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុនីមួយៗស្មើសូន្យហៅថា ម៉ាទ្រីសសូន្យ តាងដោយ O ហើយម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ដែលធាតុ $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ និង ធាតុផ្សេងទៀតស្មើសូន្យ ហៅថា ម៉ាទ្រីសឯកតា តាងដោយ I_n។

ឧទាហរណ៍១៖

ម៉ាទ្រីស $A = [a_{ij}]_{3\times 4}$ ដែលមានធាតុទូទៅ $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{បើ} i < j \\ 0 & \text{បើ} i \ge j \end{cases}$ គឺ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍២៖

ម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{bmatrix}$ មានធាតុទូទៅ $a_{ij} = i^j$ ដែល $1 \le i, j \le 3$។

ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា

ម៉ាទ្រីស $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ និង $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ ជាម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នា $A = B$ កាលណា វាមានទំហំប៉ុនគ្នា ហើយធាតុនីមួយៗរបស់វាស្មើៗគ្នា យើងបាន $m = p, n = q, a_{ij} = b_{ij}$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$។

ប្រមាណវិធីបូកម៉ាទ្រីស

ដូចការបូកវិចទ័រដែរ គេបូកម៉ាទ្រីស $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ និង $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ដែលជាម៉ាទ្រីស $m\times n$ ដូចគ្នា ដោយបូកធាតុត្រូវគ្នារបស់វា គេបាន

$$A+B=[x_{ij}]_{m\times n} \text{ ដែល } x_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

ឧទាហរណ៍៖

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -5 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 4 & 0 & 2\\ 1 & 6 & -5 & -2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 4 & -5 & -5 & 2 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & 5 & -8 & 3 & 5\\ -1 & -3 & 6 & 1 & 1\\ 5 & 1 & -10 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីបូកម៉ាទ្រីស

តាង A,B,C ជាម៉ាទ្រីស $m\times n$ យើងបាន

• $A+B=B+A$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

• $(A+B)+C=A+(B+C)$

$$\left(\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\ 4\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}-3\\ 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right)$$

• $A+O=O+A=A$ ដែល O ជាម៉ាទ្រីសសូន្យ។

• តាង $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ យើងបាន $A+(-A)=(-A)+A=0$។ ម៉ាទ្រីស $-A$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះប្រមាណវិធីបូក។

ម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូក គឺ $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 1\\ -4 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសនឹងស្កាលែ

គេអោយម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$ និង ចំនួនពិត ឬ កុំផ្លិច λ ហៅថា ស្កាលែ យើងបាន៖

$$\lambda A = \lambda[a_{ij}]_{m\times n} = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

ឧទាហរណ៍

$$3\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 0 \\ 9 & 15 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

ជាទូទៅ៖

- $(-1)A = -A$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះប្រមាណវិធីបូក។
- $A - B = A + (-B)$។

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសនឹងស្កាលែ

គេអោយម៉ាទ្រីស A និង B ដែលមានទំហំដូចគ្នា និងស្កាលែ λ, μ យើងបាន៖

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $0A = O$

បន្សំលីនេអ៊ែរ

គេមាន ម៉ាទ្រីស $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ដែលមានទំហំដូចគ្នា និង ស្កាលែ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$។ ម៉ាទ្រីស

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n$$

ហៅថាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ហើយស្កាលែ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ហៅថា មេគុណបន្សំលីនេអ៊ែរ។

ឧទាហរណ៍៣

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

តើម៉ាទ្រីស A អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស B, C, D បានដែរ ឬទេ?
តាង a, b, c ជាស្កាលែដែល

$$a\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ $\begin{cases} 3a - b & = 2 \\ -a + 3b + c & = 1 \\ a + 5b + 3c & = 3 \\ 2a - 2b & = 0 \end{cases}$ នាំអោយ $a = b = 1, c = -1$

ដូចនេះ $A = B + C - D$

ឧទាហរណ៍៤៖ សរសេរម៉ាទ្រីស X ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A និង B ដោយដឹងថា $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$។

យើងមាន

$$\begin{aligned} 3(X + \frac{1}{2}A) &= 5(X - \frac{3}{4}B) \\ 3X + \frac{3}{2}A &= 5X - \frac{15}{4}B \\ -3X + 3X + \frac{3}{2}A &= -3X + 5X - \frac{15}{4}B \\ \frac{3}{2}A &= 2X - \frac{15}{4}B \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A\right) &= \frac{1}{2}\left(2X - \frac{15}{4}B\right) \\ \frac{3}{4}A &= X - \frac{15}{8}B \\ X &= \frac{3}{4}A + \frac{15}{8}B \end{aligned}$$

ដូចនេះ $X = \frac{3}{4}A + \frac{15}{8}B$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A និង B។

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស

បើ A ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$ ហើយ B ជាម៉ាទ្រីស $n \times p$ នោះ ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស A និង B តាងដោយ $AB = [x_{ij}]_{m\times p}$ គឺជាម៉ាទ្រីស $m \times p$ ដែលមានធាតុទូទៅ

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ឧទាហរណ៍៖

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2 \quad 1 \quad 0} \\ 3 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{(-2)(-4)+(1)(-1)+(0)(1)} & 0+3+0 & -2+2+0 \\ -12-5-3 & 0+15-9 & 3+10+12 \\ 0-2+2 & 0+6+6 & 0+4-8 \\ -4+1-2 & 0-3-6 & 1-2+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -20 & 6 & 25 \\ 0 & 12 & -4 \\ -5 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

សម្គាល់

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសមិនមានលក្ខណៈត្រលប់ជាទូទៅទេ។

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [5] = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស

គេអោយម៉ាទ្រីស $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}]$ និង ស្កាលែ λ។ ទំហំរបស់ម៉ាទ្រីស A, B, C ប្រែប្រួលយ៉ាងណាអោយប្រមាណវិធីខាងក្រោមមានន័យ នោះគេបាន៖

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
- បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n យើងបាន ម៉ាទ្រីសឯកតា I_n ជាម៉ាទ្រីសតែមួយគត់ដែល $AI_n = I_nA = A$។

ឧទាហរណ៍៥

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

យើងបាន៖

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC,$
- $(B + C)A = BA + CA$

ឧទាហរណ៍៦៖ គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_3 - 6x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

តាង $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ចូរសរសេរប្រព័ន្ធសមីការខាងលើជាទម្រង់ $AX = B$ ដែល A ជាម៉ាទ្រីសដែលត្រូវកំណត់។

តាង $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ យើងបាន

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 \\ 3x_1 + x_3 - 6x_4 - 2x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_3 - 6x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -6 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

គេអោយម៉ាទ្រីសការេ $A = [a_{ij}]_n \neq O$។
• ម៉ាទ្រីស $L = [\ell_{ij}]_n$ ជាចម្រាស់ខាងឆ្វេងនៃ A កាលណា $LA = I_n$។
• ម៉ាទ្រីស $R = [r_{ij}]_n$ ជាចម្រាស់ខាងស្តាំនៃ A កាលណា $AR = I_n$។
• បើ A មានចម្រាស់ខាងឆ្វេងផង និង ខាងស្តាំផង នោះ A ហៅថា ម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់ ហើយចម្រាស់ទាំងពីរ L, R ស្មើគ្នា និង តាងដោយ A^{-1}។ ចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស A មានតែមួយគត់។

សម្គាល់

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសការេមិនសុទ្ធតែមានចម្រាស់ទេ។
ឧទាហរណ៍៖ ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ គ្មានចម្រាស់ទេ ព្រោះបើម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ជាចម្រាស់របស់វា យើងបាន៖

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ -2a + 2c & -2b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a - c = 1, & b - d = 0 \\ -2a + 2c = 0, & -2b + 2d = 0 \end{cases}$ ដែលគ្មានចម្លើយ។

ឧទាហរណ៍៧៖ បង្ហាញថា ម៉ាទ្រីស $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$។

ដោយ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$A^{-1} = B$$

ឧទាហរណ៍៨៖ រកចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ បើមាន។

វិភាគ៖

តាង $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសខាងលើ យើងបាន

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

យើងបាន ប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន 9 អញ្ញាត និង 9 សមីការ។

- បើប្រព័ន្ធគ្មានចម្លើយ នោះម៉ាទ្រីសគ្មានចម្រាស់ទេ។
- បើប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ (តែមួយគត់) នោះម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់។
  សន្និដ្ឋាន៖ វិធីសាស្ត្ររកចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការបែបនេះ មិនមានប្រសិទ្ធិភាពទេ។ យើងនឹងបង្កើតនូវវិធានគណនាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសនៅមេរៀនក្រោយ។

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ
សប្តាហ៍ទី៥

បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

ប្រមាណវិធីលើជួរដេក

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ A = \Big[& 2 & 1 & 0 & 3 & \Big] \; {}_1a \\ & 1 & 0 & 1 & 2 & \quad {}_2a \end{array}$$

គេអោយម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} {}_1a \\ {}_2a \\ \vdots \\ {}_ma \end{bmatrix}_{m\times n}$ ដែល ${}_ia$ តាងអោយជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីស A។ ប្រមាណវិធីលើជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស A មានបីប្រភេទដូចខាងក្រោម៖

(1). គុណជួរដេកណាមួយនឹងស្កាលែខុសពីសូន្យ (${}_ia \to k({}_ia), k \neq 0$)។

(2). ប្តូរជួរដេកពីរ (${}_ia \leftrightarrow {}_ja$)។

(3). ប្តូរជួរដេកមួយ ដោយបូកជួរដេកនោះ នឹង ផលគុណស្កាលែនឹងជួរដេកមួយទៀត (${}_ia \to {}_ia + k({}_ja), k \neq 0$)។

ដូចគ្នាដែរ យើងអាចតាង $A = [a_1\; a_2\; \cdots\; a_n]_{m\times n}$ ដែល a_j តាងអោយជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីស A។ គេអាចកំណត់ប្រមាណវិធីជួរឈរលើម៉ាទ្រីស A ដូចខាងលើ។

សម្គាល់

ក្នុងការអនុវត្តន៍ បើមានតែម៉ាទ្រីសតែមួយ ឬ ច្រើនតែមិនមានភាពភ័ន្តច្រលំរវាងធាតុនៃម៉ាទ្រីសទេ គេអាចតាង r_i ជាជួរដេកទី i នៃ A និង c_j ជាជួរឈរទី j នៃ A។

ឧទាហរណ៍១៖

គេអាចធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកលើម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ជាបន្តបន្ទាប់ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 + r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} r_2 + r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_2 \\ \\ r_3 + r_2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 + \frac{3}{5}r_3 \\ r_2 - \frac{1}{5}r_3 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{5}r_3 \end{matrix}$$

សម្គាល់

ម៉ាទ្រីសចុងក្រោយបំផុត ហៅថា ទម្រង់ជណ្ដើររួម (Reduced StairStep Form: RSSF ឬ Reduced Row-Echelon Form: RREF)

ម៉ាទ្រីសប្តូរជួរ

បើ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ គេតាង $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកពីការផ្លាស់ប្តូរជួរដេក និង ជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស A ហៅថា ម៉ាទ្រីសប្តូរជួរនៃម៉ាទ្រីស A។

បើ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ យើងបាន $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ ការធ្វើប្រមាណវិធីលើជួរដេក A គឺជាការធ្វើប្រមាណវិធីលើជួរឈរ A^t និង ច្រាសមកវិញ។

លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសប្តូរជួរ

គេអោយម៉ាទ្រីស A និង B ផលបូក និង ផលគុណម៉ាទ្រីស អាចកំណត់បាន និង ស្កាលែ λ។ គេបាន $(A^t)^t = A, (A+B)^t = A^t + B^t, (\lambda A)^t = \lambda A^t, (AB)^t = B^t A^t$។

បើ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ យើងបាន

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 0+2+3 & 0-1+0 & 0+0+6 \\ -5 & 8 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -5 & 8 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 8 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 8 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីសបឋម (Elementary Matrix)

ម៉ាទ្រីសបឋម E ជាម៉ាទ្រីស~~ឯកតា~~ ការេ ដែលបានមកពីការធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេក ឬ ជួរឈរ តែម្តងគត់ទៅលើម៉ាទ្រីសឯកតា។ ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសបឋម មានបីប្រភេទ ទៅតាមប្រភេទនៃប្រមាណវិធីជួរដេក ឬ ជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស។

ឧទាហរណ៍២៖

ពិនិត្យមើលម៉ាទ្រីសឯកតា $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គេបានម៉ាទ្រីសបឋមមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសបឋម

ម៉ាទ្រីសបឋមជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស់។ ចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសបឋមខាងក្រោម

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

រៀងគ្នា គឺ៖

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ទ្រឹស្តីបទ៖ $(m\times m)(m\times n)$

គេអោយម៉ាទ្រីស $A=[a_{ij}]_{m\times n}$។ គេបាន

• ការធ្វើប្រមាណវិធីដោយប្រភេទណាមួយលើជួរដេកនៃ A គឺជាការគុណខាងឆ្វេងនឹង A ដោយម៉ាទ្រីសបឋមលំដាប់ m ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា។

• ការធ្វើប្រមាណវិធីដោយប្រភេទណាមួយលើជួរឈរនៃ A គឺជាការគុណខាងស្តាំនឹង A ដោយម៉ាទ្រីសបឋមលំដាប់ n ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា។

វិបាក៖

បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ដែលមានចម្រាស់ នោះគេអាចធ្វើ ប្រមាណវិធីលើជួរដេកនៃ A ជាបន្តបន្ទាប់រហូតទទួលបានម៉ាទ្រីសឯកតា។ គេបាន

$$(E_kE_{k-1}\cdots E_1)A=I_n$$

$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$

$[A \mid I_n]$
$[E_1A \mid E_1I_n]$
$[E_2E_1A \mid E_2E_1I_n]$
$\vdots$
$[I_n \mid E_kE_{k-1}\cdots E_1]$

ដែលនាំអោយ $A^{-1}=E_kE_{k-1}\cdots E_1$។
ក្នុងការអនុវត្ត យើងសរសេរម៉ាទ្រីស A និង ម៉ាទ្រីសឯកតារួមគ្នា រួចធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកយ៉ាងណាអោយ A ក្លាយទៅជាម៉ាទ្រីសឯកតា នោះយើងនឹងទទួលបានចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស A។

$$[A|I_n]\to\cdots\to[I_n|A^{-1}]$$

បើយើងមិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកបម្លែង A ទៅជា I_n ទេ នោះ A ជាម៉ាទ្រីសគ្មានចម្រាស់។

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\1&-1&0&1\\2&1&1&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0&0&2&3\\1&-1&0&1\\2&1&1&1\end{bmatrix} r_1-r_3$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3&4\\1&-1&0&1\\2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

លក្ខណៈនៃចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស៖

បើ A, B ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ដែលមានចម្រាស់ និង λ ជាស្កាលែខុសពីសូន្យ នោះគេបាន

$$\bullet(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t \quad \bullet(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$
$$\bullet(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1} \quad \bullet(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ តើម៉ាទ្រីសខាងក្រោម មានចម្រាស់ឬទេ? បើមាន ចូររកចម្រាស់របស់វា និង សរសេរចម្រាស់របស់វាជាផលគុណនៃម៉ាទ្រីសបឋម។

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 - 2r_2 \\ \\ r_3 + r_2 \end{array}$$

ដោយជួរដេកទី 3 នៃម៉ាទ្រីសខាងឆ្វេងស្មើសូន្យ
នាំ A ស្មើ 0
ដូច្នេះ A ជាម៉ាទ្រីសគ្មានច្រាស់

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 + r_3 \\ r_2 + 3r_3 \\ \\ \end{array}$$

4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ហើយ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ដែលមាន n អញ្ញាត និង m សមីការ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ជាអញ្ញត្តិ ហើយ a_{ij}, b_j ជាចំនួន (ស្កាលែ) ដែលស្គាល់។ ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ អាចសរសេរជាទម្រង់៖

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ដែល

ប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$ ហៅថា ទម្រង់ម៉ាទ្រីស

នៃប្រព័ន្ធសមីការ។ ម៉ាទ្រីស A ហៅថា ម៉ាទ្រីសមេគុណនៃប្រព័ន្ធសមីការ ហើយម៉ាទ្រីស $[A|B]$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធសមីការ។
ទម្រង់ម៉ាទ្រីសខាងលើ អាចសរសេរជាទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

ឬ $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=B$ ហៅថា ទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃប្រព័ន្ធសមីការ។
ដូចនេះ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គឺស្វែងរកមេគុណបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសមេគុណដែលបង្ក B។
បើ $B=0$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ ហៅថា ប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែន។

ឧទាហរណ៍៤៖ រកម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធខាងក្រោម។

(1). $\begin{cases} x_1+x_3=1\\ x_1+x_2=2\\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2+2x_3+x_4=2\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\end{array}\right]$$

(2). $\begin{cases} a+b+c=1\\ 2a-b+2c=1\\ a+2b+c=0\end{cases}$

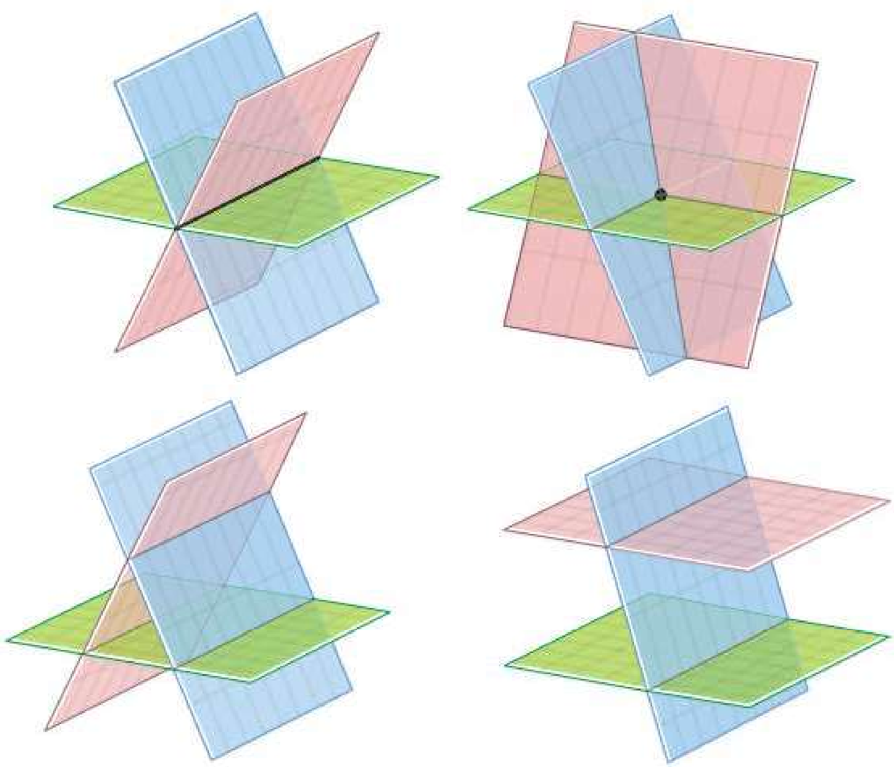
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

(3). $\begin{cases} a+2b+3c=0\\ 3a+b+2c=0\\ 5a+5b+8c=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0\\ 5 & 5 & 8 & 0\end{array}\right]$$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

- ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ គឺជាការស្វែងរកនូវសំណុំវ៉ិចទ័រ X ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការម៉ាទ្រីស $AX = B$។
- ប្រព័ន្ធសមីការមួយ អាចគ្មានចម្លើយ មានចម្លើយតែមួយគត់ ឬ មានចម្លើយរាប់មិនអស់។
- ប្រព័ន្ធសមីការពីរសមមូលគ្នា កាលណាវាគ្មានចម្លើយ ឬ មានសំណុំចម្លើយដូចគ្នា។
- ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការដែលមានពីរអញ្ញាត្តិ នោះសមីការនីមួយៗនៃប្រព័ន្ធ ជាបន្ទាត់ក្នុងប្លង់។ ដូចនេះ ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមានពីរអញ្ញាត្តិ គឺជាការស្វែងរកសំណុំចំណុចប្រសព្វរួមនៃបន្ទាត់ទាំងអស់។
- ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការដែលមានបីអញ្ញាត្តិ នោះ សមីការនីមួយៗនៃប្រព័ន្ធ ជាប្លង់ក្នុងលំហ។ ដូចនេះ ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការមានបីអញ្ញាត្តិ គឺជាការស្វែងរកសំណុំចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងអស់។



ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$AX = B \iff E_1AX = E_1B \tag{1}$$

ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ សមមូលនឹងប្រព័ន្ធសមីការ

$$E_kE_{k-1}\cdots E_1AX = E_kE_{k-1}\cdots E_1B \tag{2}$$

ដែល $E_1, E_2, \cdots, E_k$ ជាម៉ាទ្រីសបឋម។ យើងបាន ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធ (1) គឺ $[A|B]$ និង ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធ (2) គឺ $[E_kE_{k-1}\cdots E_1A|E_kE_{k-1}\cdots E_1B]$ ដែលបានមកពីការធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកជាបន្តបន្ទាប់លើម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធ (1)។

- បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេ និងមានចម្រាស់ ហើយឧបមាថា $A^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_1$ នោះ សមីការ (2) ទៅជា $A^{-1}AX = A^{-1}B$ នាំអោយ $X = A^{-1}B$ ជាចម្លើយតែមួយគត់នៃប្រព័ន្ធសមីការ (1) និង (2)។
- បើ A ជាម៉ាទ្រីសដែលគ្មានចម្រាស់ នោះគេបម្លែងម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធសមីការ (1) ទៅប្រព័ន្ធសមីការ (2) ក្នុងទម្រង់ដែលងាយបំផុត រួចដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (2)។ ក្នុងករណីនេះ ប្រព័ន្ធសមីការអាចគ្មានចម្លើយ ឬ មានចម្លើយរាប់មិនអស់។

ឧទាហរណ៍៥៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងឧទាហរណ៍ទី៤។

(1).
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - r_2 \\ r_4 - r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3 \\ -r_3 \\ r_4 + 3r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 - \frac{1}{4}r_4 \\ r_2 + \frac{1}{4}r_4 \\ r_3 + \frac{1}{4}r_4 \\ \frac{1}{4}r_4 \end{array}$$

ដូច្នេះ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ជាចម្លើយតែ

នៃប្រព័ន្ធ (1).

ឧទាហរណ៍៥៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងឧទាហរណ៍ទី៤។

(1).
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] r_3+3r_2$$

ដោយថា ប្រព័ន្ធ(1) សមមូលនឹង
$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b=-1 \\ 0=-4 \quad \text{មិនពិត} \end{cases}$$

ដូច្នេះ ប្រព័ន្ធ (1) គ្មានចម្លើយទេ.

ឧទាហរណ៍៥៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងឧទាហរណ៍ទី៤។

(3).
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2-3r_1 \\ r_3-5r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] r_3-r_2$$

ដោយថា ប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ (3) សមមូលនឹង
$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -5b-7c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=-3c \\ b=-\frac{7}{5}c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-3c-2b$$
$$=-3c+\frac{14}{5}c=-\frac{1}{5}c$$

យក $c=5t,\ t\in\mathbb{R}$ ដោយថា សំណុំចម្លើយនៃប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ (3) គឺ:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -7t \\ 5t \end{bmatrix} \middle|\ t\in\mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} t \ \middle|\ t\in\mathbb{R} \right\}$$

ដេទែរមីណង់

(Determinants and Eigenvalues, Lecture 1.)

ហាំ ការីម

RUPP
Department of Mathematics

វគ្គបណ្តុះបណ្តាលថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ
ក្នុងកម្មវិធី BA TUP អនុវិស័យមធ្យមសិក្សា
សម្រាប់ថ្នាក់ M1, M2, M3, M4

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់

មាតិការសម្រាប់សប្តាហ៍នេះ

1. សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់
2. ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

វត្ថុបំណង

- រៀននិយមន័យរបស់ដេទែមីណង់
- រៀនលក្ខណៈគ្រឹះរបស់ដេទែមីណង់ និងវិធីអនុវត្តន៍របស់វា

សេចក្តីផ្តើម៖ វិធាន Sarrus ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ $1 \times 1, 2 \times 2$ និង 3×3

- ដេទែរមីណង់ គឺជាអនុគមន៍

$$\det : \left\{ \text{ម៉ាទ្រីសការេ} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងក្រោម៖

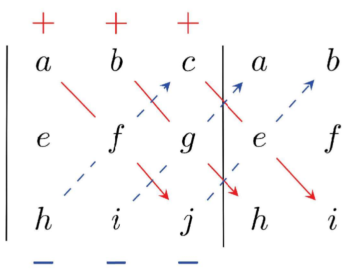
1) ជំនួសជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ មិនប្រែប្រួល $\det(\mathbf{A})$ ។
2) គុណជួរដេកមួយរបស់ $\mathbf{A}$ ដោយស្កាលែរ c ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹងតម្លៃ c ។
3) ប្តូរជួរដេកពីររបស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ត្រូវគុណដេទែរមីណង់នឹង -1 ។
4) ដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសឯកតា ស្មើ 1 ។

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 1×1: $\quad |\mathbf{A}| = a$
- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- ចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 :

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = afj + bgh + cei - hfc - iga - jeb$$



Example

ចូរគណនាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -1 & 5 & 0\\ 6 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

Ans. -123

អនុវត្តន៍: Areas and Volumes

ទ្រឹស្តីបទ ១

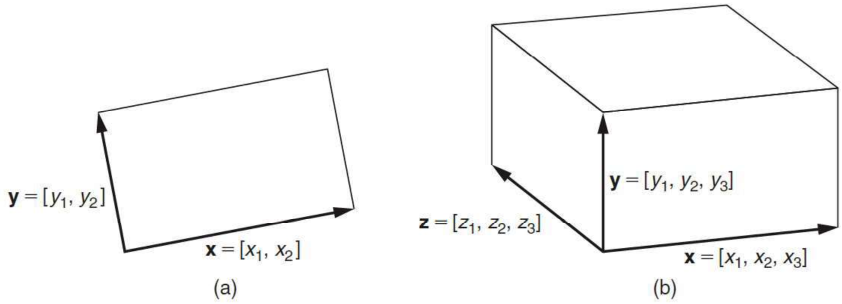
(i) *គេអោយវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x}=[x_1,x_2]$ *និង* $\mathbf{y}=[y_1,y_2]$ *ជាវ៉ិចទ័រពីរមិនស្របគ្នាក្នុង* $\mathbb{R}^2$ *ដែលមានគល់រួមត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x}$ *និង* $\mathbf{y}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតរបស់ដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

(ii) *យកវ៉ិចទ័រ* $\mathbf{x}=[x_1,x_2,x_3]$, $\mathbf{y}=[y_1,y_2,y_3]$ *និង* $\mathbf{z}=[z_1,z_2,z_3]$ *ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ដែលមានគល់រួមនៅត្រង់ចំណុចមួយ។ ដូច្នេះ មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត ដែលមានជ្រុងកំណត់ដោយ* $\mathbf{x},\mathbf{y}$ *និង* $\mathbf{z}$ *គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖*

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

Cont.



Note: តាមទ្រឹស្តីបទ (i) ខាងលើ បើ $\mathbf{x} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ និង $\mathbf{y} = \overrightarrow{\mathbf{PR}}$ នោះគេបាន ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានកំពូល $\mathbf{P}(x_P, y_P), \mathbf{Q}(x_Q, y_Q)$ និង $\mathbf{R}(x_R, y_R)$ ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែរមីណង់៖

$$S_{\triangle \mathbf{PQR}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{ឬ} \quad S_{\triangle \mathbf{PQR}} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

វត្ថុបំណង | សេចក្តីផ្តើមដេទែរមីណង់ | ដេទែរមីណង់ និងការបន្ថយជួរដេក

Example

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលមានជ្រុង $\mathbf{x} = [-2, 1, 3], \mathbf{y} = [3, 0, -2]$ និង $\mathbf{z} = [-1, 3, 7]$ កំណត់ដោយ

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

Ans. $|-4| = 4$

HK Chapter 2

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ២

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n,\ n \geq 2$ ។ ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ គឺម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(n-1) \times (n-1)$ ដែលទទួលបានដោយលុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ។ ធាតុមីន័រ (minor) ត្រង់ទីតាំង (i,j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}_{ij}|$ គឺជាដេទែរមីណង់របស់ម៉ាទ្រីសរង $\mathbf{A}_{ij}$ ។

គេអោយម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ ។ គេបានធាតុ minors ៖

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -8,$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -5, \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 28, \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -31,$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

កូហ្វាក់ទ័រ

និយមន័យ ៣

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ដែល $n \geq 2$ ។ កូហ្វាក់ទ័រ (cofactor) ទីតាំង (i,j) របស់ម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ តាងដោយ $\mathbf{c}_{ij}$ កំណត់ដោយ៖

$$\mathbf{c}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}$ ខាងលើ គេបាន៖

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{11} &= (-1)^{1+1} |\mathbf{A}_{11}| = (-1)^2(3) = 3 \\
\mathbf{c}_{12} &= (-1)^{1+2} |\mathbf{A}_{12}| = (-1)^3(6) = 6 \\
\mathbf{c}_{13} &= (-1)^{1+3} |\mathbf{A}_{13}| = (-1)^4(-8) = -8 \\
\mathbf{c}_{21} &= (-1)^{2+1} |\mathbf{A}_{21}| = (-1)^3(-5) = 5 \\
\mathbf{c}_{22} &= (-1)^{2+2} |\mathbf{A}_{22}| = (-1)^4(28) = 28 \\
\mathbf{c}_{23} &= (-1)^{2+3} |\mathbf{A}_{23}| = (-1)^5(-31) = 31 \\
\mathbf{c}_{31} &= (-1)^{3+1} |\mathbf{A}_{31}| = (-1)^4(2) = 2 \\
\mathbf{c}_{32} &= (-1)^{3+2} |\mathbf{A}_{32}| = (-1)^5(-15) = 15 \\
\mathbf{c}_{33} &= (-1)^{3+3} |\mathbf{A}_{33}| = (-1)^6(20) = 20
\end{aligned}$$

និយមន័យដេទែរមីណង់

និយមន័យ ៤ (ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេក និងជួរឈរ)

យក $\mathbf{A}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ ដេទែរមីណង់របស់ $\mathbf{A}$ តាងដោយ $|\mathbf{A}|$ ឬ $\det(\mathbf{A})$ កំណត់ដោយ៖

(i) បើ $n = 1$ ($\mathbf{A} = [a_{11}]$) នោះគេបាន $|\mathbf{A}| = a_{11}$ ។

(ii) បើ $n > 1$ នោះគេបាន៖

(a) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរដេកទី i

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\mathbf{c}_{i1} + a_{i2}\mathbf{c}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathbf{c}_{in}, \quad i = 1, \cdots, n$$

(b) ពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រតាមជួរឈរទី j

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}\mathbf{c}_{1j} + a_{2j}\mathbf{c}_{2j} + \ldots + a_{nj}\mathbf{c}_{nj}, \quad j = 1, \cdots, n$$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ តាមពន្លាត cofactor តាមជួរដេកទី 3 គេបាន៖

$$|\mathbf{A}| = a_{31}\mathbf{c}_{31} + a_{32}\mathbf{c}_{32} + a_{33}\mathbf{c}_{33} = 2(2) + (-7)(15) + 6(20) = 19$$

Example

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ចូររកដេទែរមីណង់របស់ $\mathbf{A}$ តាមពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រជួរឈរទី 2 ។

Note: ម៉ាទ្រីសការេ $\mathbf{A}$ លំដាប់ $n \times n$ ជាម៉ាទ្រីស nonsingular លុះត្រាតែ $|\mathbf{A}| \neq 0$ ។

ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

ទ្រឹស្តីបទ ៥

យក $\mathbf{A}$ *ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ មានលំដាប់* $n \times n$ ។ *គេបាន*

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Proof. យើងប្រើវិចារកំណើន!

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ គេបានៈ

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (4)(3)(-1)(7) = -84.$$

ការអនុវត្តន៍នៃម៉ាទ្រីស
សប្តាហ៍ទី៧

បណ្ឌិត សេង មុន្នីរតនៈ
seng.monyrattanak@rupp.edu.kh

សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ
មហាវិទ្យាល័យអប់រំ

ការអនុវត្តន៍ក្នុងការរកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស

គេអាចរកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ តាមវិធាន Gauss ដូចខាងក្រោម៖

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 + r_1 \\ r_1 - 2r_3 \\ r_4 + r_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 9 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 - 2r_2 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ 2r_3 + 7r_2 \\ r_4 + r_3 \end{array}$$

ការអនុវត្តន៍ក្នុងការរកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 7 & 3 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 + 3r_4 \\ r_2 - \frac{1}{2}r_4 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \\ r_3 - 7r_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{7} & -1 & -\frac{11}{7} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & 1 & \frac{3}{7} & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{7}r_4 \\ r_2 - \frac{1}{14}r_4 \\ \\ \frac{1}{7}r_4 \end{array}$$

ដូចនេះ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} & -1 & -\frac{11}{7} & 2 \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{7} & 1 & \frac{3}{7} & -1 \end{bmatrix}$$

សម្គាល់៖ ក្នុងការអនុវត្តន៍ ត្រូវជៀសវាងប្រការខាងក្រោម៖

- នៅពេលដែលបម្លែងជួរឈរផ្សេងទៀតអោយទៅជាជួរឈរដូចក្នុងម៉ាទ្រីសឯកតា មិនត្រូវធ្វើអោយប្តូរទម្រង់នៃជួរឈរដែលបានបម្លែងរួចពីមុនឡើយ។
- ធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកណា ត្រូវគណនាជាមួយជួរដេកនោះ។
- មិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីដូចគ្នាពីរដង ឬ គ្រាន់តែខុសគ្នាដោយផលគុណនឹងស្កាលែណាមួយ ទៅលើជួរដេកពីរផ្សេងគ្នាទេ។

ការអនុវត្តន៍ក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន n អញ្ញាត និង m សមីការមានទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ឬ $AX = B$ ដែល A ជាម៉ាទ្រីសមេគុណ X ជាវ៉ិចទ័រនៃអញ្ញាត ហើយ $[A|B]$ ជាម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធសមីការ។
ប្រព័ន្ធសមីការ $AX = 0$ ហៅថា ប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែនទាញចេញពីប្រព័ន្ធសមីការ $AX = B$។
ដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $AX = B$ គេត្រូវបម្លែងម៉ាទ្រីសប្រព័ន្ធ $[A|B]$ ធ្វើយ៉ាងណាអោយ A ក្លាយម៉ាទ្រីសជណ្តើរ ឬ ម៉ាទ្រីសជណ្តើររួម (RREF) រួចដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលនៅសល់។

ការអនុវត្តន៍ក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

យើងបម្លែងម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធដូចខាងក្រោម៖

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 7 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 - r_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 - \frac{1}{2}r_2 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ -\frac{1}{3}r_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \quad r_2 - 2r_3$$

ការអនុវត្តន៍ក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើទៅជា

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{7}{3} \\ x_4 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

តាង $x_2 = t \in \mathbb{R}$ នាំអោយ $x_1 = -2t$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានសំណុំចម្លើយ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$។

សម្គាល់៖ សំណុំចម្លើយខាងលើ អាចសរសេរជាទម្រង់៖

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$។ យើងបាន $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ជាចម្លើយមួយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ហើយ $t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែនទាញចេញ។

អនុវត្តន៍១៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

គេអោយម៉ាទ្រីស

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ចូរដោះស្រាយសមីការ $AX = B$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

$$(i).B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (ii).B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (iii).B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

បម្លែងម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ដូចខាងក្រោម៖

ការអនុវត្តន៍ទៅលើបម្លែងលីនេអ៊ែរ

បម្លែងលីនេអ៊ែរ

អនុគមន៍ $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ហៅថា បម្លែងលីនេអ៊ែរ កាលណា ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ និង $\lambda \in \mathbb{R}$ យើងបាន៖

$(i).T(x+y) = T(x) + T(y)$

$(ii).T(\lambda x) = \lambda T(x)$

ឧទាហរណ៍៖ អនុគមន៍ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ

$$T(x,y) = (2x-y, x+y)$$

ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ព្រោះ $\forall (x_1,y_2),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ និង $\lambda \in \mathbb{R}$ យើងបាន

$$\begin{aligned}(i).\,T[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] &= T(x_1+x_2, y_1+y_2)\\ &= (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2))\\ &= ((2x_1-y_1)+(2x_2-y_2), (x_1+y_1)+(x_2+y_2))\end{aligned}$$

I

$$\begin{aligned}(ii).\,T[\lambda(x_1,y_2)] &= T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (2(\lambda x_1)-(\lambda y_1), \lambda x_1 + \lambda y_1)\\ &= \lambda(2x_1-y_1, x_1+y_1) = \lambda T(x_1,y_1)\end{aligned}$$

សម្គាល់៖ បម្លែងលីនេអ៊ែរខាងលើអាចសរសេរជាទម្រង់មាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x-y\\x+y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

ជាទូទៅ៖ បម្លែងលីនេអ៊ែរ $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ មានទម្រង់ម៉ាទ្រីស
$TX = AX$ ដែល A ជាម៉ាទ្រីស $m \times n$ ហើយ $X \in \mathbb{R}^n$ ជាវ៉ិចទ័រ (ម៉ាទ្រីស) ជួរឈរ។
ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសតំណាងអោយបម្លែងលីនេអ៊ែរ ហើយបម្លែងលីនេអ៊ែរអាចតំណាងដោយម៉ាទ្រីស។

អនុវត្តន៍២៖ បម្លែងលីនេអ៊ែរ

គេអោយបម្លែងលីនេអ៊ែរ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ និង $S:\mathbb{R}^3\to R^4$ ដូចខាងក្រោម៖

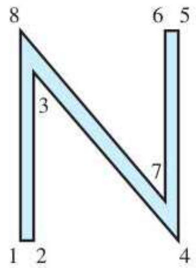
$$T(x_1,x_2,x_3)=(3x_1+x_2-3x_3,x_1-2x_2-4x_3,x_2-x_3)$$
$$S(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,2x_1-x_2,3x_2-2x_3,4x_1+x_2-3x_3)$$

ដែល $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$។ ចូររក $T^2=T\circ T$ និង $S\circ T$។

អនុវត្តន៍២៖ បម្លែងលីនេអ៊ែរ

ការអនុវត្តន៍ក្នុងក្រាភិចកុំព្យូទ័រ

រូបភាពក្នុងក្រាភិចកុំព្យូទ័រកើតឡើងដោយសំណុំចំណុច ការភ្ជាប់អង្កត់ ឬ ខ្សែកោង ពត៌មានអំពីពណ៌នៅក្នុងផ្ទៃបិទជិតដែលខ័ណ្ឌដោយអង្កត់ ឬ ខ្សែកោង។ សំណុំចំណុចនៃរូបក្រាភិចទាំងនោះអាចកំណត់តាងដោយប្រើម៉ាទ្រីស។



ឧទាហរណ៏ តួអក្សរ N មាន 8 ចំណុច ដែលអាចកំណត់ដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

បន្ថែមពីលើចំណុចទាំងនេះ គឺជាការភ្ជាប់ពីចំណុចមួយទៅចំណុចមួយ និងការចាក់ពណ៌ក្នុងផ្ទៃបិទជិតដែលយើងមិនរៀបរាប់លម្អិតនៅទីនេះទេ។

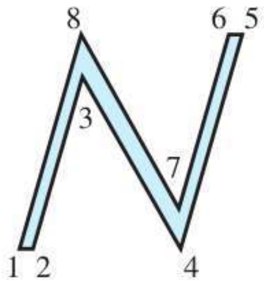
ឧបមាថា យើងចង់បានអក្សរ N ទ្រេត តើយើងត្រូវកំណត់សារជាថ្មីនូវចំណុចទាំង 8 កំណត់នូវការភ្ជាប់ចំណុចទាំងនោះ និង ការចាក់ពណ៌ម្តងទៀត ឬ យ៉ាងណា?

ការអនុវត្តន៍ក្នុងក្រាភិចកុំព្យូទ័រ

ពិនិត្យមើលបម្លែងលីនេអ៊ែរ $T = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។ តើ T បម្លែងអក្សរ N ទៅជារូបបែបណា?

$$\begin{aligned} TA &= \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

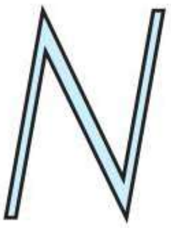
បម្លែងលីនេអ៊ែរ T ខាងលើបម្លែងរូប N ខាងលើទៅជា



អក្សរ N ដែលបម្លែងរួចនេះរាងក្រាស់បន្តិច។ យើងចង់បម្លែងអក្សរ N ថ្មីនេះ អោយរាងស្តើងបន្តិច។ តើយើងត្រូវប្រើបម្លែងលីនេអ៊ែរបែបណា?

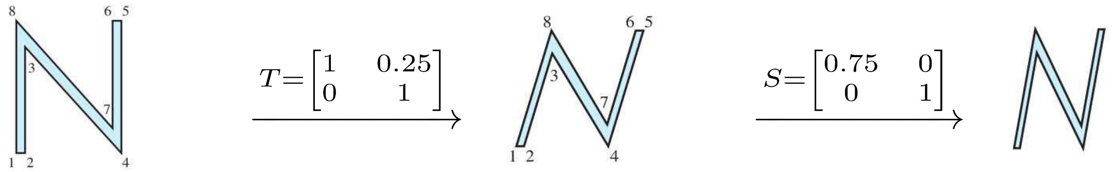
ការអនុវត្តន៍ក្នុងក្រាភិចកុំព្យូទ័រ

ពិនិត្យមើលបម្លែងលីនេអ៊ែរ $S=\begin{bmatrix}0.75 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ដែលធ្វើការបង្រួម $x-$ អរដោនេ ពី 1 ទៅ 0.75។ ម៉ាទ្រីសនេះនឹងបម្លែងអក្សរថ្មីខាងលើទៅជារូបខាងក្រោម៖



$$S(TA)=\begin{bmatrix}0.75 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2\\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0.375 & 1.57875 & 4.5 & 6 & 5.625 & 4.42125 & 1.5\\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8\end{bmatrix}$$

យើងបាន



ហើយម៉ាទ្រីស $ST=\begin{bmatrix}0.75 & 0.1875\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរដែលបម្លែងអក្សរ N ទីមួយ ទៅអក្សរ N ទីបី។

ការអនុវត្តន៍ក្នុងក្រាភិចកុំព្យូទ័រ

សំណួរត្រិះរិះ

តើបម្លែងលីនេអ៊ែរ (ម៉ាទ្រីស) បែបណាដែល

1. បង្វិលអក្សរ N តាមទិសដៅស្រប ឬ ច្រាសទ្រនិចនាឡិកាជុំវិញគល់ O ជាមួយរង្វាស់មុំជាក់លាក់ណាមួយ?

2 បម្លែងអក្សរ N ទៅជារូបឆ្លុះរបស់វាធៀបនឹងអ័ក្សដេក? ធៀបនឹងអ័ក្សឈរ? ឬ ធៀបនឹងបន្ទាត់ដែលអោយណាមួយ?

ដេទែមីណង់

សាស្ត្រាចារ្យ ថៃ ថាល់

០៧ - ០៧ - ២០១៧

១. ដេទែមីណង់លំដាប់ ២

យើងអាចគណនាដេទែមីណង់ នៃម៉ាទ្រីសបាន លុះត្រាតែម៉ាទ្រីសនោះជាម៉ាទ្រីសការេ។

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ឧទាហរណ៍ : គណនា $detE, detF$ បើ

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

គេបាន $detE = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$$detF = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 0 = -7$$

$$G = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$detG = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{9+4}{36}$$

$$\boxed{\mathrm{detG} = \frac{13}{36}}$$

$$H = \begin{pmatrix} sinx & cosx \\ -cosx & sinx \end{pmatrix}$$

$$detH = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ -cosx & sinx \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\boxed{detH = 1}$$

$$I = \begin{pmatrix} cosx & cosx \\ sinx & -sinx \end{pmatrix}$$

$$detI = \begin{vmatrix} cosx & cosx \\ sinx & -sinx \end{vmatrix}$$

$$= -sinxcosx - sinxcosx$$

$$= 2sinxcosx$$

$$\boxed{\det I = -sin2x}$$

$$J = \begin{pmatrix} x & 1-2x \\ x & 1+2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} detJ &= \begin{vmatrix} x & 1-2x \\ x & 1+2x \end{vmatrix} \\ &= x(1+2x) - x(1-2x) \\ &= x + 2x^2 - x + 2x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{detJ = 4x^2}$$

$$K = \begin{pmatrix} x+1 & y-1 \\ x+2 & y-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} detK &= \begin{vmatrix} x+1 & y-1 \\ x+2 & y-2 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(y-2) - (x+2)(y-1) \\ &= xy - 2x + y - 2 - xy + x - 2y + 2 \\ &= -x - y \end{aligned}$$

$$\boxed{detk = -(x+y)}$$

២. ដេទែមីណង់លំដាប់ខ្ពស់

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$detA = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{13}$$

$$= a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{31}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$
$$= (a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{31}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{22})$$

ឧទាហរណ៍: រកដេទែមីណង់ A បើ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$detA = 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (20 + 2) - 2(15 + 0) + 3(3 - 0)$$
$$= 222 - 30 + 8 = 1$$

ឧទាហរណ៍: រក $detB$, បើ $B \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

$$detB = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-35) - 1(8 - 20) + 3(-7 - 0)$$
$$= -70 + 12 - 21 = -79$$

ឧទាហរណ៍ : គណនា $detE$ និង $detF$ ។ បើ

$$E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&2\\6&1&5\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}3&-2&4\\1&0&5\\0&4&6\end{pmatrix}$$

$$detE=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&4&2\\6&1&5\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}4&2\\1&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&2\\0&5\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}3&4\\6&1\end{vmatrix}$$

$$=(20-2)-2(15-12)-3-24=18-8+21=33$$

$$detF=\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&0&5\\0&4&6\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}0&5\\4&6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&5\\0&6\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}$$

$$=3(0-20)+2(6-0)+4(4-0)$$

$$=-60+12+16=-32$$

ពិនិត្យ: $E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&2\\6&1&5\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}3&-2&4\\1&0&5\\0&4&6\end{pmatrix}$

$$detE=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&4&2\\6&1&5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\3&4\\6&1\end{matrix}$$

$$=(20+24-3)—24+2+30=41-8=33$$

$$detF=\begin{vmatrix}3&-2&4\\1&0&5\\0&4&6\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-2\\1&0\\0&4\end{matrix}$$

$$=(0+0+16)-(0+60-12=16-48=-32$$

រំលឹក $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&-3\\-2&0&1\end{pmatrix}$

$detA = 3\begin{vmatrix}5 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 5\\ -2 & 0\end{vmatrix} = 29$ (តាមវិធីមីន័រ Minor)

$detA = \left|\begin{matrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3 & 2\\ 4 & 5\\ -2 & 0\end{matrix} = 29$ (តាមវិធីសារ៉ូស (Sarus))

EX: ប្រើវិធីសាស្ត្រសារ៉ូស គណនាដេទែមីណង់

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$detM = \left|\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}$$

$$detM = (12 + 0 + 2) - (6 - 1 + 0)$$

$$= 14 - 5$$

$$detM = 9$$

$$N = \begin{pmatrix} x & x & x-1 \\ x & x-1 & x \\ x-1 & x & x \end{pmatrix}$$

$$detN = \begin{vmatrix} x & x & x-1 \\ x & x-1 & x \\ x-1 & x & x \end{vmatrix} \begin{matrix} x & x \\ x & x-1 \\ x-1 & x \end{matrix}$$

$$detN = \left(x^2(x-1) + x^2(x-1) + x^2(x-1)\right) - \left((x-1)^3 + x^3 + x^3\right)$$

$$= x^3 - x^2 + x^3 - x^2 + x^3 - x^2 - x^3 - x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= x^3 - 3x^2 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$detN = 1 - 3x$$

៣. មីន័រនិងកូហ្វាក់ទ័រ

ក. មីន័រ (Minor) ជាដេទែមីណង់រង

ឧទាហរណ៍: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ មីន័រនៃធាតុរបស់ម៉ាទ្រីស A

កំនត់ដោយ M_{jj} ដែល $\begin{cases} i \text{ ជាជួរដេក} \\ j \text{ ជាជួរឈរ} \end{cases}$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}0 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=0-12=-12$$
$$M_{12}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-2+15=13$$
$$M_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 5 & -4\end{vmatrix}=8-0=8$$
$$M_{21}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -4 & 1\end{vmatrix}=3+16=19$$
$$M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=2-20=-18$$
$$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$$
$$M_{31}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-9$$
$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=\ -6+8=2$$
$$M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+6=6$$

ឧទាហរណ៍: គេអោយ $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$

គេបាន $M_{11}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{vmatrix}=2-12=-10$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}5 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=5+0=5$$
$$M_{13}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-20-0=-20$$
$$M_{21}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-2+16=14$$
$$M_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3-0=3$$
$$M_{23}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-12+0=-12$$
$$M_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=6-8=-2$$
$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-20=-29$$
$$M_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=6+10=16$$

ខ. កូហ្វាក់ទ័រ

កំណត់ដោយ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ចំពោះម៉ាទ្រីស $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ ខាងលើគេបាន

$A_{11} = (-1)^2 M_{11} = -1$

$A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -5$

$A_{13} = (-1)^3 M_{13} = -20$

$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = -14$

$A_{22} = (-1)^4 M_{22} = 3$

$A_{23} = (-1)^5 M_{23} = 12$

$A_{31} = (-1)^4 M_{31} = -2$

$A_{32} = (-1)^5 M_{32} = -(-29) = 29$

$A_{33} = (-1)^6 M_{33} = 16$

*សញ្ញានៃ Cofactor

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

សំគាល់

ក. ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ត្រីកោណក្រោម ម៉ាទ្រីសស្កាលែស្មើនឹងផលគុណធាតុនៃអង្កត់ទ្រូង។

ឧទាហរណ៍: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to detA = 2 \times 3 \times 2 = 12$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to detB = 2 \times 4 \times 6 = 48$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to detC = 2 \times 5 \times 1 = 10$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to detD = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

ខ. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ហើយជួរដេក ឬ ជួរឈរណាមួយជាតុសុទ្ធតែសូន្យ នោះ detA = 0

ឧទាហរណ៍: $A=\begin{pmatrix}4&3&2\\0&0&0\\5&7&9\end{pmatrix}\to detA=0$

$$B=\begin{pmatrix}2&4&6&0\\0&-4&2&0\\7&0&5&0\\1&2&3&0\end{pmatrix}\to detB=0$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$detA=\left|\begin{matrix}4&3&2\\0&0&0\\5&7&9\end{matrix}\right|\begin{matrix}4&3\\0&0\\5&7\end{matrix}=(0+0+0)-(0+0+0)=0$$

គ. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ហើយមានជួរដេកឬជួរឈរពីរស្មើគ្នានោះ detA = 0

ឧទាហរណ៍: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$$detA=\left|\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&2\\1&2\\-1&0\end{matrix}$$

$$=(2-6+0)-(-6+0+2)$$

$$=2-6+6-2$$

$$\boxed{detA=0}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&3\\-3&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$detB=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&3\\-3&-3&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&2\\-3&-3\end{matrix}$$

$$=(2-9-6)-(-6-9-2)$$

$$=-17+17$$

$$detB=0$$

៤.អាត់សង់នៃម៉ាទ្រីស (Adjoint of Matrix)

កំណត់ដោយ adj ជាត្រង់ស្ប៉ូសេនៃកូហ្វាក់ទ័រម៉ាទ្រីស។

ឧទាហរណ៍: $B=\begin{pmatrix}-10&-14&-2\\-5&3&29\\-20&12&16\end{pmatrix}$

ចំណាំ: $A_{IJ}=(-1)^{i+j}\times M_{ij}$

• លក្ខណៈសម្គាល់:

ក. គេអាចគណនាដេទែមីណង់

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{31}A_{31} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

ឧទាហរណ៍: គណនា $\det B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2-4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{matrix}$$

$$= (6 + 0 - 80) - (0 + 36 - 10) = -74 - 26 = -100$$

$$A_{11} = -10\,,\ A_{12} = -5\,, A_{13} = -20$$

$$A_{11} = -10\,,\ A_{21} = -14\,, A_{31} = -2$$

$$\begin{aligned} \det B &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 3(-10) - 2(-5) + 4(-20) = -30 + 10 - 80 = -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det B &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= 3(-10) + 5(-14) + 0(-2) = -30 - 70 = -100 \end{aligned}$$

ខ. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n

គេបាន:

$$A.(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A).A = \det A.I_n$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{adj}B = \begin{pmatrix} -10 & -14 & -2 \\ -5 & 3 & 29 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B \times (\mathrm{adj}B) = \begin{pmatrix} 3 & 2-2 & 4 \\ 5 & 2 & 2-3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & -14 & -2 \\ -5 & 3 & 29 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -30+10-80 & -42-6+48 & -6-58+64 \\ -50-10+60 & -70+6-36 & -10+58-48 \\ 0+20-20 & 0-12+12 & 0-116+16 \end{pmatrix}$$

$$B \times (\mathrm{adj}B) = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} (1)$$

$$\det A \times I_3 = -100\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} (2)$$

តាម (1)និង (2) គេបាន $\boxed{B(\mathrm{adj}B) = (\mathrm{adj}B).B = \det B.I_3}$

បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ហើយ $\det A \neq 0$ នោះ:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\mathrm{adj}A$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{adj}B = \begin{pmatrix} -10 & -14 & -2 \\ -5 & 3 & 29 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -100$$

$$\rightarrow \mathrm{B}^{-1} = \frac{-1}{100}\begin{pmatrix} -10 & -14 & -2 \\ -5 & 3 & 29 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{14}{100} & \frac{2}{100} \\ \frac{5}{100} & -\frac{3}{100} & -\frac{29}{100} \\ \frac{20}{100} & -\frac{12}{100} & -\frac{16}{100} \end{pmatrix}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathrm{B} \times \mathrm{B}^{-1} = \mathrm{I}_3$

$$\mathrm{B} \times \mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & -14 & -2 \\ -5 & 3 & 29 \\ -20 & 12 & 16 \end{pmatrix}\frac{-1}{100}$$

$$= \begin{pmatrix} 30-10+80 & 42+6-48 & 6+58-64 \\ 50+10-60 & 70-6+36 & 10-58+48 \\ 0-20+20 & 0+12-12 & 0+116-16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

ពិនិត្យ: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - ad - bc$

$$\rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathrm{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

$$\rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $A \times A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ពិត)}$$

ឃ. ការប្រើទម្រង់អិចឈីឡុនៃម៉ាទ្រីសជួយក្នុងការគណនា detA បើ A ជាម៉ាទ្រី
ការេលំដាប់ n

ឧទាហរណ៍: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$= (6 - 12 + 60) - (60 - 6 + 12) = 54 - 66 = -12$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -4R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -22 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det A = \begin{vmatrix} -6 & -22 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} 3 = 54 - 66 = -12$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_1 + R_3 \to R_3 \\ 2R_1 + R_4 \to R_4 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= (18 - 48 - 3) - (4 - 18 - 36) = -33 + 50 = 17$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3R_1 + R_2 \to R_2 \\ -9R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ -14 & -44 \end{vmatrix} = -165 + 182 = 17$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 6R_1 + R_3 \to R_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -18 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -18 & -19 & -30 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 18R_3 + R_2 \to R_2 \\ -R_3 + R_1 \to R_1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 17 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 17 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 17 & 24 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (72 - 6 + 0) - 12 - 51) = 66 + +39 = 105$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

តាមប្រមាណវិធីជួរដេកយើងបាន

$$-3R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 + 8$$

$$\boxed{\Rightarrow \det B = 18}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ដោយMa.C មានជួរឈរទី 2 ជាជួរឈរនាំមុខនោះ $\det C=\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}$

$\boxed{\det C=2}$

$$D=\begin{pmatrix}1&1&3&0\\3&0&2&1\\-2&2&-1&2\\1&-1&0&3\end{pmatrix}$$

ជួរឈរទី 2 & 4 មានលក្ខណៈប្រសើរជាងគេ។ ព្រោះមានលេខសូន្យ & លេខ 1 ហើយស្រេច។ ដូចនេះយើងគួររក្សាជួរណាមួយក្នុងចំណោមជួរទាំងពីរទុកជាជួរឈរនាំមុខ។ ពោលគឺគណនាតែពីរដងអាចទទួលបានចម្លើយដូចគ្នា។

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&3&0\\3&0&2&1\\-2&2&-1&2\\1&-1&0&3\end{pmatrix}$$

$-2R_1+R_3\to R_3$

$R_1+R_4\to R_4$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} -R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -7 & -9 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det D = \begin{vmatrix} -7 & -9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 21 - 63$$

$$\boxed{\det D = -42}$$

***ជាទូទៅ:** ការកំណត់ដេទែមីណង់តាមទម្រង់ជួរឈរនាំមុខត្រង់ធាតុនៃ a_{ij} កំណត់ដោយ៖

$$\boxed{\det A = a_{ij}(-1)^{i+j} \cdot \det a_{ij}}$$

EX: គេអោយ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

+របៀប 1: $\det A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{matrix}$

$$\det A = (-8 + 24 + 45) - (-80 + 12 + 9)$$
$$\det A = 61 + 59 = 120$$

+របៀប 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}R_2 \to R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{17}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 4R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{17}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & \frac{25}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det_{a_{21}} = \begin{vmatrix} \frac{17}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{25}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{-85}{9} - \frac{275}{9}$$

$$\det_{a_{21}} = -\frac{360}{9} = -40\ ;\ a_{21} = 3\ ;\ (-1)^{2+1} = -1$$

នោះ $\det A = 3 \times (-1) \times (-40)$

$$\boxed{\det A = 120}$$

ការអនុវត្តម៉ាទ្រីសក្នុងដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

សាស្ត្រាចារ្យៈ **ថៃ ថាល់**

ការអនុវត្តម៉ាទ្រីសក្នុងដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. ការសរសេរជាម៉ាទ្រីស

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

គេអាចបង្កើតម៉ាទ្រីស ៣ បានគឺៈ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad \& \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

ជាម៉ាទ្រីសមេគុណ　　ជាម៉ាទ្រីសចម្លើយ　　ជាម៉ាទ្រីសអថេរ

ឧទាហរណ៍៖

គេមានប្រព័ន្ធសមីការ៖ $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-1 \end{cases}$

គេបានម៉ាទ្រីស៖

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \& \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ខ. ដោះស្រាយដោយប្រើប្រាស់ហ្គោសៀន (Gaussian)

លំហាត់១៖ គេមានប្រព័ន្ធសមីការ៖ $\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x+2y-z=4 \\ -x-y+z=-3 \end{cases}$

$$A/B \mapsto I/X$$

គេមាន៖

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \& \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- រក A/B

គេបាន៖

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&1&5\\1&2&-1&4\\-1&-1&1&-3\end{array}\right]\quad R_1\leftrightarrow R_2$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&4\\2&1&-1&5\\-1&-1&1&-3\end{array}\right]\quad \begin{array}{r}-2R_1+R_2\to R_2\\ R_1+R_2\to R_3\end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&4\\0&-3&3&-3\\0&1&0&1\end{array}\right]\quad R_2\leftrightarrow R_3$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&4\\0&1&0&1\\0&-3&3&-3\end{array}\right]\quad 3R_2+R_3\to R_3$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&4\\0&1&0&1\\0&0&3&0\end{array}\right]\quad \frac{1}{3}R_3\to R_3$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&4\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right]\quad R_3+R_1\to R_1$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right]\quad -2R_2+R_1\to R_1$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

គេបាន៖ $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(x = 2 \ , \ y = 1 \ , \ z = 0 \right)$ ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

• **ផ្ទៀងផ្ទាត់៖**

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 & (1) & \Rightarrow & (1) : 2(2) + 1 + 0 = 5 \\ x + 2y - z = 4 & (2) & \Rightarrow & (2) : 2 + 2(1) - 0 = 4 \\ -x - y + z = -3 & (3) & \Rightarrow & (3) : -2 - 1 + 0 = -3 \end{cases}$$

ពិត
ពិត
ពិត

លំហាត់២៖ គេមានប្រព័ន្ធសមីការ៖ $\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \ \& \ X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

តាម៖ $A / B \mapsto I / X$

• រក A / B

គេបាន៖
$$A / B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad -3R_1 + R_2 \to R_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & -5 & \vdots & -15 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{5}R_2 \to R_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \quad -R_3 + R_1 \to R_1$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

នោះ $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(a = 2 \ , \ b = 3 \right)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

លំហាត់៣៖ គេមានប្រព័ន្ធសមីការ៖ $I = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

គេបាន៖ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ & $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

តាម៖ $A/B \mapsto I/X$

- រក A/B

$$A/B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_2 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -10 \\ -2 & 2 & -1 & \vdots & 9 \end{bmatrix} -\frac{1}{2}R_2 \to R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 9 \end{bmatrix} -3R_2 + R_3 \to R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{2}R_3 \to R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_3 + R_2 \to R_2 \\ -R_3 + R_1 \to R_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \quad -R_2 + R_1 \to R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

គេបាន៖ $\left(x_1 = 1 \,,\, x_2 = 2 \,,\, x_3 = 3\right)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

គ. ការប្រើប្រាស់ទម្រង់អកម៉ែន (Augmented Matrix)

ពិនិត្យ៖

$$I = \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a - b + c = -1 \\ 2a - 3b + c = 5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} , \; X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$A / B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 + R_2 \to R_2 \\ -2R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -5 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{5}R_2 \to R_2 \\ \frac{1}{3}R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{5}R_3 + R_2 \to R_2 \\ -R_3 + R_1 \to R_1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad -R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 0 + b + \frac{1}{5}c = \frac{1}{5} \\ 0 + 0 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad b = 0 \ , \ a + 0 + 1 = 3 \ , \ a = 2$$

ដូចនេះ $\left(a = 2 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1\right)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

ឧទាហរណ៍៖

$$J = \begin{cases} x + 2y + 3x = 5 \\ -x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A / B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 3 & 5 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_2 \to R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{5} & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_3 + R_2 \to R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad z = 0 \ , \ \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + \frac{5}{3}z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

ប្រតិបត្តិ៖ ប្រើហ្គោស៊ានដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$I = \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ -x + 2y - z = 2 \\ -2x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

តាម $A / B \mapsto I / X$

គេមាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$A / B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ -2 & 2 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 8 \\ 0 & 6 & -1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{4}R_2 \to R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 6 & -1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \quad -6R_2 + R_3 \to R_3$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -R_3 \to R_3 \\ -2R_2 + R_1 \to R_1 \end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad -R_3 + R_1 \to R_1$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad (1\,,2\,,1)$$

ប្រតិបត្តិ៖ ប្រើអកមែនដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$I=\begin{cases} 2x+2y+z=9 \\ -x+3y-z=3 \\ -2x+2y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

គេបាន៖

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}R_1 \to R_1$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 4 & \frac{-1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right] \quad \frac{1}{4}R_2 \to R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{8} & \vdots & \frac{15}{8} \\ 0 & 4 & 4 & \vdots & 12 \end{array}\right] \quad -4R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{8} & \vdots & \frac{15}{8} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \end{array}\right] \quad \frac{2}{9}R_3 \rightarrow R_3$$

Homework

១. ប្រើវិធីសាស្ត្រ Augmented ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$I = \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -3x + y = -1 \end{cases} , \qquad J = \begin{cases} a + b + c = 5 \\ 2z - b + c = 7 \\ -a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} , \qquad L = \begin{cases} 2x + y + 3z = 10 \\ 3x - y + z = 2 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

២. ចូរប្រើម៉ាទ្រីស Gaussian ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ៖

៣. ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ពិនិត្យ៖ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ដែល det A ខុសពី 0 ដែល A ជាម៉ាទ្រីសមេគុណ ។

$AX = B$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង A^{-1}

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B$ តែ $A \cdot A^{-1} = I_n$ (n លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស A)

$I_n X = A^{-1}B$, I_n ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលំដាប់ n

នាំឱ្យ $X = A^{-1}B$

ឧទាហរណ៍១៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I = \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} , X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

គេបាន៖

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7} \\ \frac{15}{7} - \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{7} \\ \frac{14}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\left(x = 1 , y = 2 \right)$ ជាគូចម្លើយ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I = \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

គេបាន៖ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ & $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} + \frac{24}{13} \\ \frac{-3}{13} + \frac{16}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\left(a = 2 \ , \ b = 1 \right)$ ជាគូចម្លើយ ។

ប្រតិបត្តិ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I = \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

គេបាន៖ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ & $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{16} & \frac{-2}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{23}{16} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{16} & \frac{-2}{16} \\ \frac{2}{16} & \frac{23}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{16} + \frac{-8}{16} \\ \frac{20}{16} + \frac{12}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\left(x = 2 \ , \ y = 2 \right)$ ជាគូចម្លើយ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I=\begin{cases}x+y+z=5\\2x+y-z=7\\x-y+z=-1\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$$

$$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-3&0&3\\-3&2&-1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\det A=\left|\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&1&1\\2&1&-1&2&1\\1&-1&1&1&1\end{array}\right.=(1-1-2)-(1+1+2)=-6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times \operatorname{adj}A=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-3&0&3\\-3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{6}&\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}&0&-\frac{3}{6}\\\frac{3}{6}&-\frac{2}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$A^{-1}B=X$

$$\begin{pmatrix}0&\frac{2}{6}&\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}&0&-\frac{3}{6}\\\frac{3}{6}&-\frac{2}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0+\frac{14}{6}-\frac{2}{6}\\\frac{15}{6}+0+\frac{3}{6}\\\frac{15}{6}-\frac{14}{6}-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

ប្រតិបត្តិ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសប្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$J=\begin{cases}2a+3b+2c=7\\-a+2b-c=0\\3a-2b+4c=5\end{cases}\quad,\quad K=\begin{cases}x+2y-z=2\\3x-y+2z=4\\-x+2y-z=0\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍២៖ ប្រើម៉ាទ្រីសប្រាសដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I=\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=5\\-2x_1+x_2+3x_3=0\\3x_1+3x_2-x_3=9\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&3\\3&3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\0\\9\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-2&1&3\\3&3&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\-2&1\\3&3\end{matrix}=(-1+18+6)-(-3+9+4)=23-10=13$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times \operatorname{adj}A$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&3\\3&-1\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Rightarrow \text{adj}A = \begin{pmatrix} -10 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -50+0+63 \\ 35+0-9 \\ -45+0+45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $(1\ ,\ 2\ ,\ 0)$ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

$$J = \begin{cases} a+b+c+d = 7 \\ 2a-b-c+d = -4 \\ a+2b-3c+4d = -2 \\ -a+b+c-2d = 5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \\ R_1 + R_4 \to R_4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} -3 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -3 & -3 \\ 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{array} = (-12-18-2)-(8-18+3) = -25$$

$$A_{11} = (-1)^2 \left|\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} = (-6-4+2)-(-3-4+4) = -8+3 = -5$$

$$A_{12} = (-1)^3 \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{array} = -(12+4+1)+(3+8+2) = -17+13 = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{array} = (-8+4+1)-(-2+8+2) = -3-8 = -11$$

$$A_{14} = (-1)^5 \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{array} = -(4-3-1)+(2-6-1) = -5$$

$$A_{21} = (-1)^3 \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} = -(6+4+2)+(-3+4-4) = -12-3 = -15$$

$$A_{22} = (-1)^4 \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{array} = (6-4+1)-(3+4-2) = 3-5 = -2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{array} = -(2+3+1)+(-2-3+1) = 10$$

$$A_{24} = (-1)^6 \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{array} = (2+3+1)-(-2-3+1) = 10$$

$$A_{31} = (-1)^4 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right| = (2+1-1)-(-1+1+2) = 2-2 = 0$$

$$A_{32} = (-1)^5 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = -(2-1+2)+(1+1-4) = -3-2 = -5$$

$$A_{33} = (-1)^6 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = (2-1+2)-(1+1-4) = 3+2 = 5$$

$$A_{34} = (-1)^7 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -(-1+1+2)+(-1+1+2) = 2-2 = 0$$

៤. វិធីសាស្ត្រក្រាមែរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ពិនិត្យៈ

$$I = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \quad , \quad a_i, b_i, c_i, k_i \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D_A$$

$$D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

ដែល $\left(x = \frac{D_x}{D_A}\ ,\ y = \frac{D_y}{D_A}\ ,\ z = \frac{D_z}{D_A}\right)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

ឧទាហរណ៍៖ ប្រើក្រាម័រដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I = \begin{cases} 2a + 3b + c = 5 \\ -a - 2b + 3c = 1 \\ 2a - 3b - 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \ ,\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{matrix} = (8+18+3) - (-4-18+6) = 29 + 16 = 45$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{matrix} = (20+18-3) - (-4-45-6) = 35 + 55 = 90$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = (-4+30-2) - (2+12+10) = 24 - 240$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{matrix} = (-8+6+15) - (-20-6-6) = 13 + 32 = 45$$

$$\Rightarrow a = \frac{D_a}{D_A} = \frac{90}{45} = 2$$

$$\Rightarrow b = \frac{D_b}{D_A} = \frac{0}{45} = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{D_c}{D_A} = \frac{45}{45} = 1$$

ដូចនេះ $(a = 2\ ,\ b = 0\ ,\ c = 1)$ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

Homework

ប្រើម៉ាទ្រីសប្រាស រួចប្រើវិធីក្រាម៉េរ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$I = \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases} \qquad J = \begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ -2a + 2b - 3c = -2 \\ 3a - 2b + c = 4 \end{cases}$$

មេរៀនទី

3 ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ

វត្ថុបំណង

1. បកស្រាយបំប្លែងលីនេអ៊ែរជាម៉ាទ្រីស
2. កំណត់រូបភាពតាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ
3. កំណត់រូបភាពតាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់
4. កំណត់រូបភាពតាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់ក្នុងត្រីកោណមាត្រ ។

1. ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ

1.1. សញ្ញាណ

យើងធ្លាប់បានរៀនរួចមកហើយនូវបំប្លែងចំណុច មួយចំនួននៅក្នុងប្លង់ ។

ឧទាហរណ៍ : បើគេបំប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅជា $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែង H ដែលមានផ្ចិត O និងផលធៀប 4 នោះគេបានសមីការ $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \end{cases}$

សមីការនៃការបំប្លែងខាំងដែលសរសេរបែបនេះ ហៅថាសមីការដឺក្រេទី 1 ឬហៅថា សមីការលីនេអ៊ែរ ។

ក្នុងករណីនេះ គេថាបំប្លែងខាំងជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ។

ជាទូទៅ	ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរដែលបំប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ កំណត់ដោយសមីការ $x' = ax+cy$, $y' = bx+dy$

ដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាទៅមុខ គេអាចបកស្រាយបំប្លែងលីនេអ៊ែរឱ្យមានទម្រង់ជាម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។ ក្នុងករណីនេះគេថា $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ។

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ A ។

គេអាចគណនា x', y' បានដោយគេគុណម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ រួចផ្ទឹមតួម៉ាទ្រីសនៃអង្គទី 1 និងតួម៉ាទ្រីសនៃអង្គទី 2 ។

សម្គាល់ : ដើម្បីសម្រួលក្នុងសំណេរ គេអាចប្រើអក្សរ A ដដែលនេះសម្រាប់សម្គាល់ថាជាម៉ាទ្រីសផង និងជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរផង ។

ឧទាហរណ៍ 1 : រូបភាពនៃចំណុច $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ តាមការបំប្លែង $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ គឺ

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\times 2+1\times\frac{1}{2}\\ 4\times 2+3\times\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{19}{2}\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ រូបភាពនៃ $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ គឺ $\left(-\frac{1}{2},\frac{19}{2}\right)$ ។

ចំពោះបំប្លែងលីនេអ៊ែរដែលមានម៉ាទ្រីស $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

រូបភាពវាគឺ

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+0\\ 0+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\text{ ។}$$

គេសង្កេតឃើញថា រូបភាពនៃ $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ ត្រួតលើភាពដើម $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ។

គេថា I ជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរដដែល ។ មានន័យថាចំណុចដែលប្លែងដោយ I នៅតែជាចំណុចនោះដដែល ។

ឧទាហរណ៍ 2 : រូបភាពនៃចំណុច $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ តាម $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ គឺ

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 3\end{bmatrix}\text{ ។}$$

ដូច្នេះ $x'=-\frac{1}{2}$, $y'=3$ ។

លំហាត់គំរូ 1 បង្ហាញថា បើម៉ាទ្រីស A បំប្លែងចំណុច $M\neq 0$ នៅតែជាចំណុច M ដដែល នោះម៉ាទ្រីស $A=I$ ។

ដំណោះស្រាយ តាង $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសដែលបំប្លែង $M(x,y)$ ទៅ $M(x,y)$ ដដែល

យើងបាន $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ឬ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+cy\\ bx+dy\end{bmatrix}$

យើងបាន $\begin{cases} x = ax + cy \\ y = bx + dy \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1, c = 0 \\ b = 0, d = 1 \end{cases}$

ដូច្នេះ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់ម៉ាទ្រីស A ដែលបំប្លែងពីចំណុច $(1, 2)$ ទៅចំណុច $(8, 1)$ និងបំប្លែងពីចំណុច $(-1, 1)$ ទៅ $(1, 2)$ ។

ដំណោះស្រាយ តាង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសបំប្លែងពីចំណុច $(1, 2)$ ទៅចំណុច $(8, 1)$

នោះយើងបាន $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

យើងបានសមីការ $\begin{cases} a + 2c = 8 & (1) \\ b + 2d = 1 & (2) \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

យើងបានសមីការ $\begin{cases} -a + c = 1 & (3) \\ -b + d = 2 & (4) \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (1) និង (3) យើងបាន $a = 2$, $c = 3$ ។

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (2) និង (4) យើងបាន $b = -1$, $d = 1$ ។

ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសដែលត្រូវរកគឺ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមម៉ាទ្រីស A ដែល $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ ។ កំណត់ម៉ាទ្រីស A ។
2. កំណត់ α ដើម្បីឱ្យចំណុច M' ត្រួតលើ M ។

ចម្លើយ

1. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
2. $\alpha = 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

1.2. ចំណុចឥតប្រែប្រួល

ឧទាហរណ៍ ៖ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $P(3,2)$ និង $Q(5,2)$ ដែលបំប្លែងដោយបំប្លែងលីនេអ៊ែរ $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ។

តាមបម្រាប់រូបភាពនៃ P កំណត់ដោយ ៖

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 3-5\times 2 \\ 2\times 3-4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ដូច្នេះ $P'(-1,-2)$ ។

រូបភាពនៃ Q កំណត់ដោយ ៖

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 3-5\times 2 \\ 2\times 3-4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ដូច្នេះ $Q'(5,2)$ ។

តាមបំប្លែង A រូបភាពនៃ $P(3,2)$ គឺ $P'(-1,-2)$ ហើយ $Q(5,2)$ គឺ $Q'(5,2)$

នោះគេសង្កេតឃើញថា ចំណុច Q មិនផ្លាស់ប្តូរទីតាំងទៅតាម A នោះទេ

ព្រោះរូបភាពរបស់វា Q' នៅតែជាចំណុច Q ដដែល។

ក្នុងករណីនេះ គេថា Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមការបំប្លែង A ។

ជាទូទៅ	Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមការបំប្លែង A កាលណា $A(Q) = Q$ ។

- ចំពោះបំប្លែងថាំង $H(0,k)$ កំណត់ដោយ $x' = kx$, $y' = ky$ ។
- គល់ O គឺជាចំណុចឥតប្រែប្រួល ។ ព្រោះ $O(0,0)$ ផ្តល់រូបភាព $O(0,0)$ ដដែល ។
- ចំពោះបំប្លែងដែលមានម៉ាទ្រីសឯកតា I គឺ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។
- គ្រប់ចំណុចនៃប្លង់ដែលប្លែងតាម I នៅតែជាចំណុចខ្លួនឯងដដែល

  ព្រោះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ កំណត់ដោយ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ ។

កំណត់ចំណុចឥតប្រែប្រួល ។

ដំណោះស្រាយ បើ $M(x,y)$ ជាចំណុចឥតប្រែប្រួល លុះត្រាតែ $x' = x$, $y' = y$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y+3 \\ 3x+4y-3 \end{bmatrix}$$

យើងបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 2x-y+3 = x \\ 3x+4y-3 = y \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x-y = -3 \\ 3x+3y = 3 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ យើងបាន $x = -1$, $y = 2$ ។

ដូច្នេះ ចំណុចឥតប្រែប្រួលគឺ $(-1, 2)$

លំហាត់គំរូ 2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 2x-1$ ប្លែងតាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពខ្លួនឯងដដែល ។

ដំណោះស្រាយ យក $M(x, y)$ ប្លែងទៅ $M'(x', y')$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ នោះយើងបាន

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បើ M ជាចំណុចមួយនៃបន្ទាត់ $y = 2x-1$ នោះ M មានកូអរដោនេ $(a, 2a-1)$ ។

ដូច្នេះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 2a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-2a+1 \\ 4a-2a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 \\ 2a+1 \end{bmatrix}$ ។

នោះយើងបាន $x' = a+1$, $y' = 2a+1$ ។

ដោយបំបាត់ a យើងបាន $y' = 2x'-1$ ដែលជារូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x-1$ ។

បន្ទាត់ដើម និងរូបភាពវាមានសមីការដូចគ្នាគឺ $y = 2x-1$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ កំណត់ដោយ

   ក. $x' = 2y-3$, $y' = x+1$

   ខ. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ កំណត់ចំណុចឥតប្រែប្រួល ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 2x-3$ ប្លែងតាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពខ្លួនឯងដដែល ។

3. រកចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមការបំប្លែង $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ។

4. រកចំណុចឥតប្រែប្រួលតាមការបំប្លែង $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ

1. ក. $\begin{bmatrix} 2y & -3y \\ x & y \end{bmatrix}$, $y = \frac{-2}{3}x$ ខ. $M(-1, 2)$ ។

2. $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$ 3. $y = -x$ 4. $y = -x$ ។

1.3. ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរច្រាស

ឧទាហរណ៍ : គេបំប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែងថាំងដែលមាន ម៉ាទ្រីស $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ដែល $k \neq 0$ ។

គេបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ នាំឱ្យគេបាន $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

គេថា M' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែង H ។

ឥឡូវនេះ គេយក M ជារូបភាពនៃ M' វិញ ហើយក្នុងករណីនេះគេត្រូវ គណនា x, y ជាអនុគមន៍នៃ x' និង y' ។

គេបាន $x = \frac{1}{k}x'$ និង $y = \frac{1}{k}y'$ បកស្រាយសមីការនេះជាម៉ាទ្រីសគឺ

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ នោះគេថា M ជារូបភាពនៃ M' តាមការបំប្លែងថាំង H ។

គេកំណត់បំប្លែងថាំងនៃ H ដោយ H^{-1} ដែលមានម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$ ។

ដូច្នេះ $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ គេប្លែង $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ នោះ

$M' = A(M)$ ឬ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $\begin{matrix} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{matrix}$ ។

ដើម្បីកំណត់បំប្លែងច្រាស A^{-1} ដែលប្លែង $M'(x',y')$ ទៅ $M(x,y)$ វិញនោះ គេត្រូវ គណនា (x,y) ជាអនុគមន៍នៃ (x',y') ។

$\begin{cases} ax + cy = x' \\ bx + dy = y' \end{cases}$ ឬ $\begin{matrix} adx + cdy = dx' \\ -bcx - cdy = -cy' \end{matrix}$ សមមូល $(ad - bc)x = dx' - cy'$

ក្នុងករណី $ad - bc \neq 0$ នាំឱ្យគេបាន

$$x = \frac{1}{ad - bc}(dx' - cy')\ ,\ \ y = \frac{1}{ad - bc}(-bx' + ay')$$

បកស្រាយជាម៉ាទ្រីស គេបាន

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$ ឬ $M=A^{-1}(M')$ ។

គេថា A^{-1} ជាបំប្លែងច្រាសដែលមានម៉ាទ្រីសច្រាស $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}$

ដែល $ad-bc\neq 0$

> ដូច្នេះ ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc\neq 0$ ។

លំហាត់គំរូ 1 L ជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x+3y-3=0$ ។

រកបំលាស់ទីនៃ L តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ តាង L' ជាបំលាស់ទីនៃ $L: x+3y-3=0$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ ។

ដើម្បីកំណត់ L' គេត្រូវរកចំណុច A',B' ដែលជារូបភាពរៀងគ្នារបស់ចំណុច A,B នៃបន្ទាត់ L ហើយបំលាស់ទីនៃ L គឺជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច A',B' ។

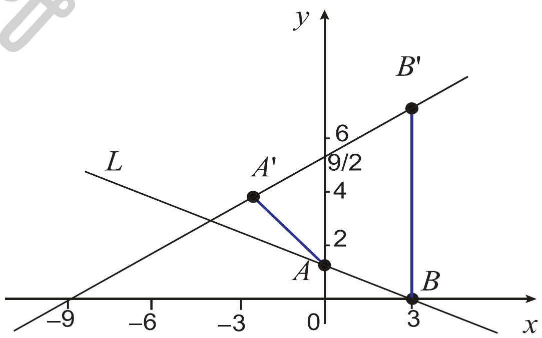
គេយក $A(0,1)$ និង $B(3,0)$ ជាចំណុចនៃ L នោះគេបានរូបភាពនៃ A'

កំណត់ដោយ $\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

នាំឱ្យ $A'(-1,4)$ ។

រូបភាពនៃ B' គឺ $\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$

នាំឱ្យ $B'(3,6)$ ។



ដូច្នេះ បន្ទាត់ L' កាត់តាមពីរ

ចំណុច A' និង B' កំណត់ដោយសមីការ : $L': x-2y+9=0$ ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីកំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ L គេត្រូវគណនា x,y ជាអនុគមន៍នៃ x',y' រួចយកទៅជំនួសក្នុងសមីការ $L: x+3y-3=0$ ។

បើ $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ នោះ $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&1\\-2&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4x'+y'\\-2x'+y'\end{bmatrix}$$

យើងបាន $x = \frac{4x'+y'}{6}, y = \frac{-2x'+y'}{6}$

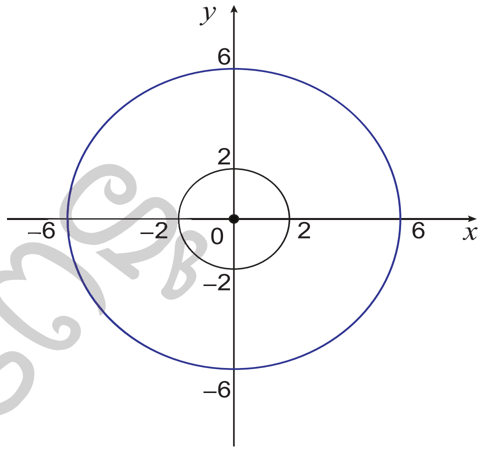
ជំនួសក្នុងសមីការបន្ទាត់ $L: \frac{4x'+y'}{6} + 3\left(\frac{-2x'+y'}{6}\right) - 3 = 0$ ឬ

$x' - 2y' + 9 = 0$ ។

ដូច្នេះ បន្ទាត់ $L: x+3y-3=0$ ផ្លាស់ទីបន្ទាត់ $L: x-2y+9=0$ ។

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់រូបភាពនៃរង្វង់ $C: x^2+y^2=4$ តាម $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ នោះ $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x' \\ \frac{1}{3}y' \end{bmatrix}$$

ជំនួស x, y ក្នុងសមីការរង្វង់

$$\left[\frac{1}{3}x'\right]^2 + \left[\frac{1}{3}y'\right]^2 = 4$$

$$\left[\frac{1}{9}x'^2\right] + \left[\frac{1}{9}y'^2\right] = 4$$

$x'^2 + y'^2 = 36$ ។

ដូច្នេះ រូបភាពនៃរង្វង់ $x^2+y^2=4$ គឺជារង្វង់ដែលមានសមីការ

$x'^2 + y'^2 = 36$ ។

លំហាត់គំរូ 3 កំណត់រូបភាពនៃសមីការវិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ដែលបំប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ ដោយវិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ប្លែងទៅ $\vec{r} = \vec{a}' + \lambda\vec{b}'$ ។

ក្នុងករណីនេះកូអរដោនេនៃវិចទ័រ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ និង $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\vec{a}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ និង $\vec{b}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ។

ដូច្នេះរូបភាពនៃសមីការវិចទ័រគឺ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ។

ប្រតិបត្តិ

1. កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ក. $y = 2x + 1$ ខ. អ័ក្សអាប់ស៊ីស គ. $2x + y + 1 = 0$ ។

2. កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 3$ ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ។

3. កំណត់រូបភាពនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ដែលប្លែងដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ

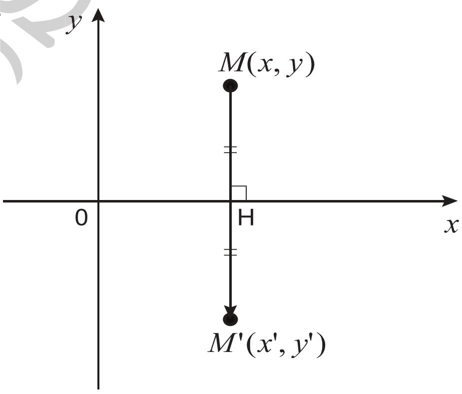
1. ក. $y' = \frac{11}{5}x' + \frac{2}{5}$ ខ. $y' = 2x'$ គ. $3x' - 3y' - 2 = 0$ ។

2. $y' = \frac{1}{4}(x' + 15)$

3. $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ។

2. ការបំប្លែងឆ្លុះ

2.1. ការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$



បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ នោះគេបាន $HM' = HM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = x$, $y' = -y$ ។

M' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $M \xrightarrow{S_{x'x}} M'$ ។

ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x', y') ជាអនុគមន៍នៃ (x, y) ។

តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គេបាន : $\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$

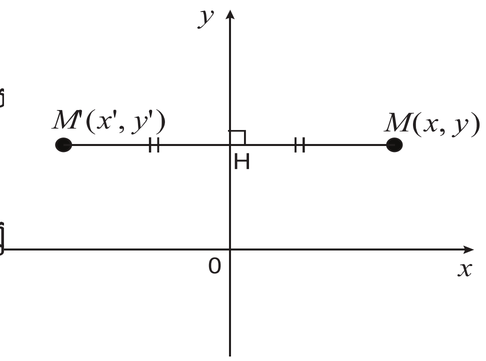
ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំប្លែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ ។

ជាទូទៅ	ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

2.2. ការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$



បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ ។ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ នោះគេបាន $HM' = HM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = -x$, $y' = y$ ។

M' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $M \xrightarrow{S_{y'y}} M'$ ។ ដូច្នេះគេបានបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + y \end{cases}$ ។

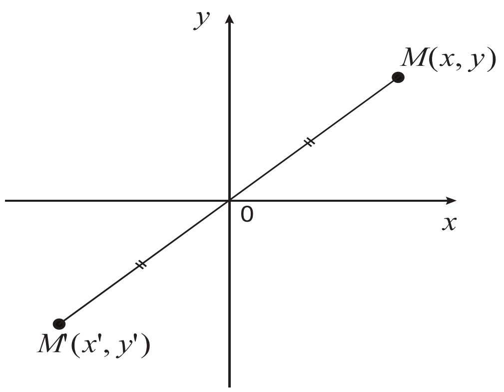
ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំប្លែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ។$$

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ ។

ជាទូទៅ	ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

2.3. ការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O



បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។ នោះគេបាន $OM' = OM$ ហើយកូអរដោនេនៃចំណុច $x' = -x$, $y' = -y$ ។

M' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $M \xrightarrow{S_o} M'$ ។ ដូច្នេះគេបានបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $\begin{cases} x' = (-1)\cdot x + 0\cdot y \\ y' = 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{cases}$ ។

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំប្លែងឆ្លុះនេះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម ៖

$$S_0 : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ។$$

ចំណុច $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ជារូបភាពនៃ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។

ជាទូទៅ ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $S_0 : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ

ក. បំប្លែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ ។

ខ. បំប្លែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយ $ax + by + c = 0$ នាំឱ្យ $by = -(ax + c)$ នោះ $y = -\left(\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$

តាងកូអរដោនេ $\left(k, -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b}\right)$ នៅលើបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ នោះគេបាន

បំប្លែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ គឺ

$$S_{y'y} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

នាំឱ្យ $x' = -k$, $y' = -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b}$ នោះ $y' = \frac{a}{b}x' - \frac{c}{b}$ គេបាន $-ax + by - c = 0$ ។

ខ. ដោយ $y = (x+1)^2$ នោះ $y = x^2 + 2x + 1$

តាងកូអរដោនេ $(m, m^2 + 2m + 1)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ នោះ

គេបានបំប្លែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x+1)^2$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ គឺ ៖

$$S_{x'x} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ m^2 + 2m + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ -m^2 - 2m - 1 \end{bmatrix}$$ នាំឱ្យ

$x' = m$, $y' = -m^2 - 2m - 1$ នោះ $y' = -x'^2 - 2x' - 1 = -(x'+1)^2$ នាំឱ្យ

$y = -(x+1)^2$ ។

ប្រតិបត្តិ

ក. បំប្លែងបន្ទាត់ $2x + 3y - 6 = 0$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ និង $S_{x'x}$ ។

ខ. បំប្លែងប៉ារ៉ាបូល $y = (x-1)^2$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{x'x}$ និង $S_{y'y}$ ។

គ. កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $A(2, 3)$ និង $B(-2, -5)$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{x'x}$, $S_{y'y}$ និង S_o ។

ចម្លើយ

ក. $2x - 3y + 6 = 0$ ជារូបភាពដែលប្លែងតាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀប $y'y$ ។

$2x - 3y - 6 = 0$ ជារូបភាពដែលប្លែងតាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀប $x'x$ ។

ខ. $y = -(x-1)^2$ ជារូបភាពដែលប្លែងតាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀប $x'x$ ។

$y = -(-x-1)^2$ ជារូបភាពដែលប្លែងតាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀប $y'y$ ។

គ.

3. ការបំប្លែងចាំង

បើ $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x, y)$ តាមការបំប្លែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k ដែល $k \neq 0$ នោះគេបានកូអរដោនេ $x' = kx$, $y' = ky$ អាចសរសេរជា $\begin{cases} x' = kx + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + ky \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលសិក្សា គេអាចបកស្រាយបំប្លែងចាំង H នោះជាទម្រង់ម៉ាទ្រីសដូច្នេះ

$$H(O, k) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

បើ $k = 1$ នោះ $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ បើ $k = -1$ នោះ $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ	ការបំប្លែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ $H(O, k) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $A(2, 4)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, 2)$ និង $H(O, -1)$ ។

ដំណោះស្រាយ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, k)$ គឺ $H(O, k) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

- ចំណុច $A(2, 4)$ គឺ $H(O, 2) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ ។

  $H(O, -1) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ។

- ចំណុច $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ គឺ $H(O, 2) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ។

  $H(O, -1) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ។

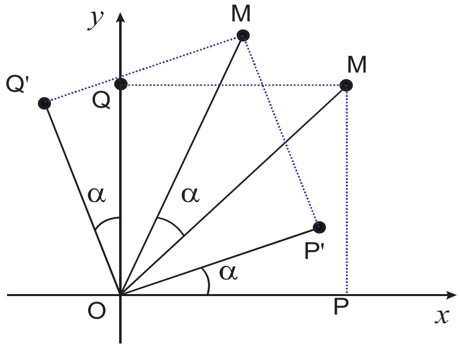
ប្រតិបត្តិ ក. បំប្លែងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, 1)$ និង $H(O, -1)$ ។

ខ. បំប្លែងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, 1)$ និង $H(O, -1)$ ។

ចម្លើយ ក. $\begin{bmatrix} k \\ -\frac{a}{b}k - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -k \\ \frac{a}{b}k + \frac{c}{b} \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} m \\ m^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -m \\ m^2 \end{bmatrix}$ ។

4. ការបំប្លែងវិល

បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមការបំប្លែងវិល $\Re(O,\alpha)$ នោះគេបាន $OM' = OM$, $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \alpha$ ។



គេនឹងបកស្រាយបំប្លែងវិលជាសមីការ ។

ដើម្បីគណនា x', y' ជាអនុគមន៍នៃ x, y គេត្រូវ ដៅ P និង Q ជាចំណោលកែងរៀងគ្នានៃ M មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{ox}$ និង $\overrightarrow{oy}$ ។

បើ M ផ្លាស់ទីមក M' តាមមុំ α នោះ P និង Q ក៏ផ្លាស់ទីរៀងគ្នាមក P' និង Q' តាមមុំ α ដែរ ។ ឥឡូវគេគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច P' និង Q'

តាមរូបបើគេយកកូអរដោនេ

$P'(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$, $Q'(-y\sin\alpha, y\cos\alpha)$

ចំពោះចតុកោណ $OP'M'Q'$ គេមាន $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'}$

$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ និង $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} = (x\cos\alpha\vec{i} + x\sin\alpha\vec{j}) + (-y\sin\alpha\vec{i} + y\cos\alpha\vec{j})$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x\cos\alpha\vec{i} + x\sin\alpha\vec{j}) + (-y\sin\alpha\vec{i} + y\cos\alpha\vec{j})$$

$$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\vec{i} + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\vec{j}$$ ។

គេទាញបាន : $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

ក្នុងករណី $\alpha = 60^\circ$ សមីការទៅជា

$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ ។

បំប្លែងវិលបកស្រាយដោយសមីការដឺក្រេទី 1 ជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ។

គេអាចបកស្រាយបំប្លែងវិលពីសមីការទៅជាម៉ាទ្រីស

$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ ។

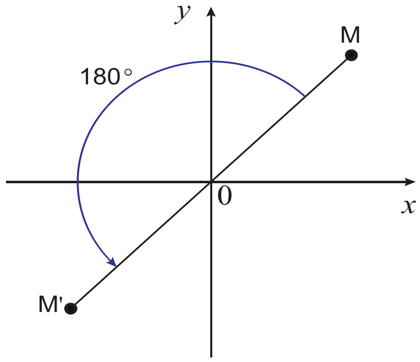
គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ ការបំប្លែងវិលនៃមុំ α កំណត់ដោយ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ រូបភាពនៃចំណុច $(-1, 3)$ តាមការបំប្លែងរិល $\Re(O, 60^\circ)$ កំណត់ដោយ

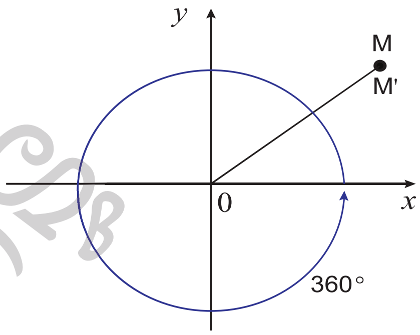
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} ។$$



- ករណី $\alpha = 180^\circ$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_o$

កាលណាមុំនៃការបំប្លែងរិលស្មើនឹង 180° នោះ បំប្លែងរិលជាបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។



- ករណី $\alpha = 360^\circ$ នោះ $\Re = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

កាលណាមុំនៃការបំប្លែងរិលស្មើនឹង 360° នោះបំប្លែងរិលជាបំប្លែងដដែលក្នុងករណីនេះរូបភាព M' ត្រួតលើធាតុ M ។

- បំប្លែងរិលមានម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\Re^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ ព្រោះដេទែមីណង់វា $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $(2, \sqrt{3})$ តាមការបំប្លែងរិល $\Re(O, 30^\circ)$ ។

ដំណោះស្រាយ ម៉ាទ្រីសនៃការបំប្លែងរិលតាមមុំ 30°

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃចំណុច $(2, \sqrt{3})$ តាម $\Re$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} ។$$

លំហាត់គំរូ 2 កំណត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $D: y = 2x - 1$ តាមការបំប្លែង $\Re(O, 45^\circ)$ ។

ដំណោះស្រាយ ម៉ាទ្រីសនៃការបំប្លែងវិលតាមមុំ 45°

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

រូបភាពនៃ D តាម $\Re$ តាងដោយ D' ដើម្បីកំណត់ D' គេត្រូវជ្រើសរើសយក A និង B នៃបន្ទាត់ D រួចកំណត់រក A' និង B' ។ បន្ទាត់ដែលកាត់តាម A' និង B' គឺជារូបភាពនៃ D ។

ចំណុច $A(1, 1)$ និង $B(2, 3)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ $y = 2x - 1$

នោះរូបភាពនៃ A' និង B' កំណត់ដោយ

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} ។$$

សមីការបន្ទាត់ D' កំណត់ដោយសមីការ

$\dfrac{x - 0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} = \dfrac{y - \sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}$ យើងបានរូបភាពនៃ D គឺ $D': y = -3x + \sqrt{2}$ ។

ជាទូទៅ	គេគណនា x, y ជាអនុគមន៍នៃ x', y' រួចជំនួស x, y ក្នុងសមីការ $y = 2x - 1$ ។ គេនឹងបានសមីការ D' ដែលជារូបភាពនៃ D ។

បើ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \Re \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នោះ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Re^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ដែល $\Re^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{bmatrix} ។$$

ជំនួស $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$ និង $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y')$ ទៅក្នុងសមីការ $y = 2x-1$ យើងបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y') = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')-1$ យើងបាន $y = -3x'+\sqrt{2}$ ។

ដូច្នេះរូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x-1$ តាមការបំប្លែងវិល គឺបន្ទាត់ $y = -3x+\sqrt{2}$ ។

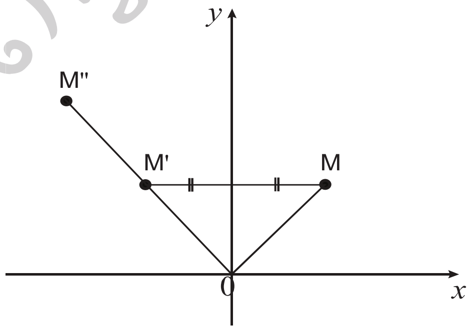
ប្រតិបត្តិ
1. កំណត់ចំណុចដែលមានរូបភាព $(-2, 2)$ តាមការបំប្លែងវិលនៃមុំ $120°$ ។
2. កំណត់រូបភាពនៃ $y = x$ ដែលវិលជុំវិញគល់ O តាមមុំ $130°$ ។

ចម្លើយ
1. $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$
2. $y = \frac{\cos 130° + \sin 130°}{\cos 130° - \sin 130°}\cdot x$ ។

5. ការបំប្លែងលីនេអ៊ែរបណ្ដាក់

5.1. បណ្ដាក់នៃការបំប្លែងលីនេអ៊ែរពីរ

ឧទាហរណ៍ ៖ គេប្លែងចំណុច $M(x, y)$ ទៅ $M'(x', y')$ តាមការបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ រួចគេបន្តប្លែងចំណុច $M'(x', y')$ ទៅ $M''(x'', y'')$ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, 2)$ ។ តើចំណុច M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងអ្វី? M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងបន្តបន្ទាប់ $M \xrightarrow{S} M' \xrightarrow{H} M''$ ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x'', y'') ជាអនុគមន៍នៃ (x, y) តាមសមីការបណ្ដាក់ដូចខាងក្រោម ៖



តាមការបំប្លែងឆ្លុះ $S_{y'y}$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x' = -x$, $y' = y$ ។

តាមការបំប្លែងចាំង $H(O, 2)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x'' = 2x'$, $y'' = 2y'$ ។

ជាសរុប យើងបាន $x'' = (-2x)$, $y'' = 2y$

បកស្រាយសមីការជាម៉ាទ្រីស យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ដូច្នេះ M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងដែលមានម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ។

បំប្លែងដែលប្លែងចំណុច M ទៅ M'' កកើតដោយបំប្លែងពីរ ហៅថា បំប្លែងបណ្ដាក់ ។

ជាទូទៅ បើ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ ជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងចំណុចរៀងគ្នាពី

M ទៅ M' និងពី M' ទៅ M'' យើងបាន

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ ដែល $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ។

បំប្លែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់ដែលប្លែងពី $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ទៅ $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ម៉ាទ្រីសបំប្លែងបណ្តាក់ដែលប្លែងពី M ទៅ M' ស្មើនឹងផលគុណនៃម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ។

ដើម្បីកំណត់វិធានគណនាផលគុណម៉ាទ្រីស គេត្រូវគណនា x'', y'' ជាអនុគមន៍នៃ x, y តាមសមីការបណ្តាក់ដូចខាងក្រោម ៖

$$x' = ax + cy \qquad x'' = a'x' + c'y'$$
$$y' = bx + dy \qquad y'' = b'x' + d'y'$$

នោះ $x'' = (aa' + bc')x + (a'c + c'd)y$

$y'' = (ab' + bd')x + (c'b + d'd)y$ ។

បកស្រាយជាម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & c'b + d'd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

យើងបានវិធានផលគុណនៃម៉ាទ្រីសគឺ ៖ $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & c'b + d'd \end{bmatrix}$ ។

ជាទូទៅ	បើគេប្លែងចំណុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីសបន្តបន្ទាប់ A និង B នោះ $M'' = BA(M)$ ។

លំហាត់គំរូ 1 កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $(2, -1)$ តាមម៉ាទ្រីស BA ដែល

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $(2, -1)$ នោះ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 2 + 2\cdot 1 & -\frac{1}{2}(-1) + 2\cdot 0 \\ 4(2) + (-5) & 4(-1) + (-5)\cdot 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 10 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $M'\left(\frac{3}{2}, 10\right)$ ជារូបភាពនៃចំណុច $(2, -1)$ តាម BA ។

លំហាត់គំរូ 2 គេឱ្យបំប្លែងពីរ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

កំណត់រូបភាពនៃចំណុច $M'(2,3)$ តាម AB និង BA ។

ដំណោះស្រាយ រូបភាពនៃ $(2,3)$ តាម AB គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = AB\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 29 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

រូបភាពនៃ $(2,3)$ តាម BA គឺ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 38 \end{bmatrix} \text{ ។}$$

យើងឃើញថារូបភាពនៃ $(2,3)$ តាម AB មិនស្មើគ្នានឹងរូបភាពតាម BA នោះទេ ។

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពនៃចំណុច (x,y) តាមការបំប្លែង AA ដែល $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ $\begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}$ ។

5.2. បណ្តាក់រវាង $\Re$ និង H

បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមការបំប្លែងវិល $\Re(O,\alpha)$ ហើយ $M''(x'',y'')$ ជារូបភាពនៃ $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែងវិល $\Re(O,\alpha)$ នោះ M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងបណ្តាក់ដែលគេកំណត់ខាងក្រោម ៖

M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងបន្តបន្ទាប់ $M \xrightarrow{H} M' \xrightarrow{\Re} M''$

ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនា (x'',y'') ជាអនុគមន៍នៃ (x,y) តាមសមីការបណ្តាក់ដូចខាងក្រោម ៖

តាមការបំប្លែងចាំង $H(O,k)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ នាំឱ្យ $x' = kx$, $y' = ky$ ។

តាមការបំប្លែងវិល $\Re(O,\alpha)$ យើងបាន $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ។

នាំឱ្យ $x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

ជាសរុប យើងបាន $x'' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$, $y'' = k(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

បកស្រាយសមីការជាម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

ដូចគ្នាដែរបណ្តាក់រវាង H និង $\Re$ ។

ជាទូទៅ	បើគេប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែងចាំង $H(O,k)$ រួចគេបន្តប្លែងចំណុច $M'(x',y')$ ទៅ $M''(x'',y'')$ តាមការបំប្លែងរិល $\Re(O,\alpha)$ នោះគេបាន M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងបណ្ដាក់ដែលគេកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖ • $\left.\begin{array}{l} H(O,k):\quad M\to M' \\ \Re(O,\alpha):\quad M'\to M''\end{array}\right\}$ នាំឱ្យ $M''=\Re H(M)$ បាននិយថា $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\cos\alpha & -k\sin\alpha\\ k\sin\alpha & k\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ។

លំហាត់គំរូ គេមានចំណុច $M(2,1)$ ដែលចំណុច M នេះប្លែងតាមការបំប្លែងរិល $\Re(O,30°)$ និងបន្តប្លែងតាមការបំប្លែងចាំង $H(O,2)$ ។ ចូរកំណត់រូបភាព M តាម $\Re H$ ។

ដំណោះស្រាយ រូបភាពនៃ M តាម $\Re H$ គឺ $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\cos\alpha & -k\sin\alpha\\ k\sin\alpha & k\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos30° & -\sin30°\\ \sin30° & \cos30°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}-1\\ 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$ ។

ប្រតិបត្តិ

ក. គេឱ្យចំណុច $P(2,5)$, $Q(-3,4)$ ដែលចំណុច P និង Q នេះប្លែងតាមការបំប្លែងរិល $\Re(O,60°)$ រួចបន្តប្លែងតាមការបំប្លែងចាំង $H(O,2)$ ។ រករូបភាពរបស់ P និង Q តាម $\Re H$ ។

ខ. គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ដែលកំពូល $A(4,3)$, $B(2,1)$ និង $C(6,3)$ ដែលកំពូល A, B និង C ប្លែងតាមការបំប្លែងរិល $\Re(O,60°)$ រួចបន្តប្លែងតាមការបំប្លែងចាំង $H(O,3)$ ។ ចូររករូបភាពនៃកំពូល A, B និង C តាមការបំប្លែង $H\Re$ ។

ចម្លើយ

ក. រូបភាព P : $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-5\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}+5\end{bmatrix}$, រូបភាពរបស់ Q : $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-4\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3}+4\end{bmatrix}$

ខ. A : $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-\frac{9\sqrt{3}}{2}\\ 6\sqrt{3}+\frac{9}{2}\end{bmatrix}$, B : $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ 6\sqrt{3}+\frac{9}{2}\end{bmatrix}$, C : $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-\frac{9\sqrt{3}}{2}\\ 9\sqrt{3}+\frac{9}{2}\end{bmatrix}$ ។

5.3. ការអនុវត្តក្នុងត្រីកោណមាត្រ

នៅមេរៀនត្រីកោណមាត្រ យើងបានបកស្រាយនូវរូបមន្តវិធីបូកកូស៊ីនុសនិងស៊ីនុស

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

ឥឡូវនេះ យើងនឹងបកស្រាយរូបមន្តនេះឡើងវិញដោយប្រើបំប្លែងបណ្តាក់នៃការបំប្លែងវិលពីរ ។

គេប្លែង M ទៅ M' តាមការបំប្លែងវិលនៃមុំ a គឺ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

គេបន្តប្លែង M' ទៅ M'' តាមការបំប្លែងវិលនៃមុំ b គឺ $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

យើងបាន M'' ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងបណ្តាក់នៃការបំប្លែងវិលទាំងពីរ

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\sin a\cos b - \sin b\cos a \\ \sin b\cos a + \sin a\cos b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត M'' ក៏ជារូបភាពនៃ M តាមការបំប្លែងវិលនៃមុំ $a+b$ ដែរ គឺ ៖

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ផ្ទឹមជួរទី 1 នៃម៉ាទ្រីសទាំងពីរ យើងបាន ៖

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

លំហាត់គំរូ 1 គេប្លែងចំណុច $(2, 1)$ តាមការបំប្លែងវិល $\Re(O, 30°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\Re(O, 45°)$ ។ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ តាង a និង b ជាមុំដែលងាយរករបស់កូស៊ីនុសនិងស៊ីនុស នោះគេបាន

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\sin a\cos b - \sin b\cos a \\ \sin b\cos a + \sin a\cos b & \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° & -\sin 30°\cos 45° - \sin 45°\cos 30° \\ \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45° & \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \text{។}$$

លំហាត់គំរូ 2 គេប្លែងចំណុច $(3, 2)$ តាមការបំប្លែងរិល $\Re(O, 12°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\Re(O, 18°)$ ។ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ តាង a និង b ជាមុំដែលលំបាករករបស់កូស៊ីនុសនិងស៊ីនុស នោះគេបាន

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{។}$$

ប្រតិបត្តិ កំណត់រូបភាពចុងក្រោយនៃចំណុច $(3, 0)$ ដោយដឹងថា គេប្លែងវាតាមការបំប្លែងរិល $\Re(O, 60°)$ រួចបន្តប្លែងតាម $\Re(O, -45°)$ ។

ចម្លើយ $$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \\ \frac{3}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \text{។}$$

លំហាត់

1. តើបំប្លែងនីមួយៗដែលប្លែងចំណុច $P(x, y)$ ទៅចំណុច $P'(x', y')$ នៅលើប្លង់មួយដែល បញ្ជាក់ បំប្លែងលីនេអ៊ែរ ឬមិនបំប្លែងលីនេអ៊ែរខាងក្រោម ៖

   ក. ចំណុច P' គឺជាចំណុចឆ្លុះទៅនឹងចំណុច P ធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ $x = 1$ ។

   ខ. ចំណុច P' ជាចំណុចកែងទៅនឹងបន្ទាត់គូសពីចំណុច P ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   គ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបានដោយការបំប្លែងចំណុច P តាមវ៉ិចទ័រ $(1, -2)$ ។

   ឃ. ចំណុច P' ជាចំណុចដែលបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស 2 ហើយប្រសព្វទៅនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

2. យក f ជាបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងពីរចំណុច $(1, 0)$ និង $(0, 1)$ ទៅចំណុច $(-1, 2)$ និង $(3, 1)$ ។

   ក. រកម៉ាទ្រីសនៃ f ។

   ខ. រកភាពនៃចំណុច $(-3, 2)$ តាម f ។

   គ. រករូបភាពនៃចំណុច $(5, -3)$ តាមបំប្លែងច្រាសនៃ f ។

3. គេឱ្យបំប្លែងលីនេអ៊ែរ f ។ រក $f(3\vec{u} - 2\vec{v})$ ចំពោះ $f(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ និង $f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ។

4. តើរូបអ្វី ដែលប្លង់មួយប្លែងតាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ដែលបង្ហាញដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម ៖

   ក. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ។

5. រករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x - y + 3 = 0$ ប្លែងតាមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ $(x, y) \to (3x - y, -2x + y)$ ។

6. រកម៉ាទ្រីសនៃការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ ដែលប្លែងដោយពីរចំណុច $(2, 1)$ និង $(-1, 3)$ ទៅចំណុច $(8, -5)$ និង $(-11, 6)$ រៀងគ្នា ។

7. រករូបភាពនៃចំណុច $(-6, 7)$ តាមការបំប្លែងបណ្តាក់ $g \circ f^{-1}$ ដែលឱ្យដោយម៉ាទ្រីសនៃការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ f និង g គឺ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ រៀងគ្នា ។

មេរៀនសង្ខេប

1. បំប្លែងលីនេអ៊ែរ

បំប្លែងលីនេអ៊ែរដែលប្លែងចំណុច $M(x,y)$ ទៅ $M(x',y')$ កំណត់ដោយសមីការ

$x' = ax + cy$, $y' = bx + dy$

2. ចំណុចឥតប្រែប្រួល

បើ Q ជាចំណុចឥតប្រែប្រួលទៅតាមការបំប្លែង A កាលណា $A(Q) = Q$ ។

- ចំពោះបំប្លែងចាំង $H(O,k)$ កំណត់ដោយ $x' = kx$, $y' = ky$ ។
  គល់ O គឺជាចំណុចឥតប្រែប្រួល ព្រោះ $O(0,0)$ ផ្តល់រូបភាព $O(0,0)$ ដដែល ។
- ចំពោះបំប្លែងដែលមានម៉ាទ្រីសឯកតា I គឺ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។
- គ្រប់ចំណុចនៃប្លង់ដែលប្លែងតាម I នៅតែជាចំណុចខ្លួនឯងដដែល ។
  ព្រោះ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

3. បំប្លែងលីនេអ៊ែរច្រាស

គេប្លែង $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ តាមការបំប្លែង $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ នោះ

$M' = A(M)$, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{matrix}$ ។

ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ។

4. បំប្លែងលីនេអ៊ែរ

បំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $S_{x'x}$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

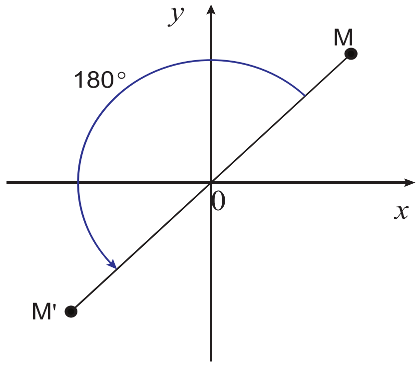
បំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_{y'y}$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំប្លែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ S_O : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

បំប្លែងវិលនៃមុំ α កំណត់ដោយ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ ។

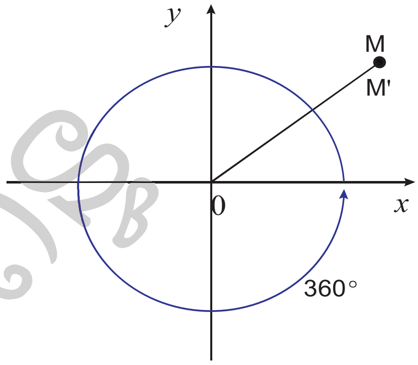


- ករណី $\alpha = 180°$ នោះ $\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_o$

  កាលណាមុំនៃការបំប្លែងវិលស្មើនឹង $180°$ នោះ បំប្លែងវិលជាបំប្លែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O ។

- ករណី $\alpha = 360°$ នោះ $\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

  កាលណាមុំនៃការបំប្លែងវិលស្មើនឹង $360°$ នោះ បំប្លែងវិលជាបំប្លែងដដែល ក្នុងករណីនេះ រូបភាព M' ត្រួតលើធាតុ M ។



- បំប្លែងវិលមានម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\mathfrak{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  ព្រោះដេទែមីណង់វា $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ។

5. បំប្លែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់

   បើគេប្លែងចំណុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីសបន្តបន្ទាប់ A និង B នោះ $M'' = BA(M)$

6. បណ្តាក់រវាង R និង H

- $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{R}(O,\alpha) : (M \to M') \\ H(O,k) : (M' \to M'') \end{array}\right\} \Rightarrow M'' = H\mathfrak{R}(M)$ ។

  បានន័យថា $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។

- $\left.\begin{array}{l} H(O,k) : (M \to M') \\ \mathfrak{R}(O,\alpha) : (M' \to M'') \end{array}\right\}$ នាំឱ្យ $M'' = \mathfrak{R}H(M)$ ។

  បានន័យថា $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ។