ផ្នែក I: ធរណីមាត្រអឺគ្លីដ

ជំពូក១: ធរណីមាត្រមាត្រប្លង់

មេរៀនទី១. រំលឹករូបធរណីមាត្រ

ធរណីមាត្រដែលដាក់អោយសិក្សានៅកម្រិតមធ្យមសិក្សា គឺជាធរណីមាត្រអឺគ្លីដរបស់អ្នកប្រាជ្ញក្រិក Euclid រស់នៅក្នុងទីក្រុង Alexandria ក្នុងសតវត្សទី 3 មុន គ.ស។ គាត់បានបង្កើត postulats (ស្វ័យសត្យ) ជាច្រើនរបស់ធរណីមាត្រអោយយើងសិក្សា។
ឧទាហរណ៍៖ - តាមចំណុចពីរ គេបង្កើតបានបន្ទាត់ត្រង់តែមួយគត់។
- បន្ទាត់ពីរមិនស្របគ្នា ប្រសព្វនៅត្រង់ចំណុចតែមួយគត់។
- មានបន្ទាត់តែមួយគត់កាត់តាមចំណុចមួយ និងស្របទៅនឹងបន្ទាត់មួយទៀត។

ពាក្យ "Geometry" មកពីភាសាក្រិក "geo" (= earth) និង "metron" (= ការវាស់វែង) ។

1. ភាពស្របគ្នា និង កែងគ្នា

1.1 ចំណុច (point)

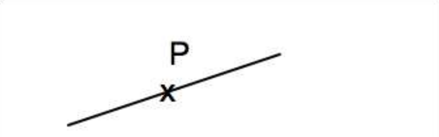
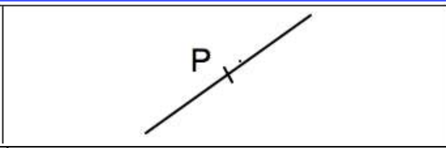
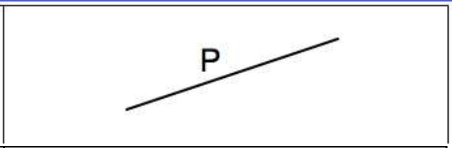
1) ការសន្មតគូសចំណុចមួយ

P x	P x	P •	x P	+ P	P
ត្រឹមត្រូវ	មិនត្រឹមត្រូវ	មិនត្រឹមត្រូវ	ត្រឹមត្រូវ	ត្រឹមត្រូវ	មិនត្រឹមត្រូវ

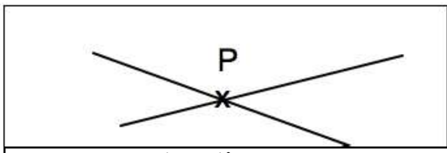
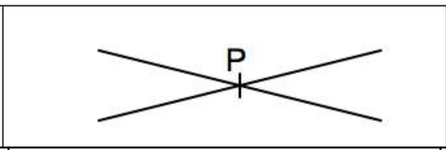
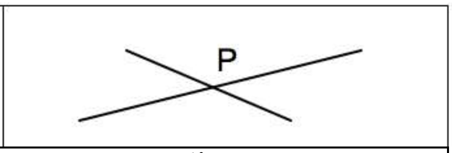
ចំណាំ: គេប្រើសញ្ញា • ឬសញ្ញា × តាងអោយការដៅចំណុចមួយ។

2) ការដៅចំណុចមួយនៅលើរូបធរណីមាត្រ

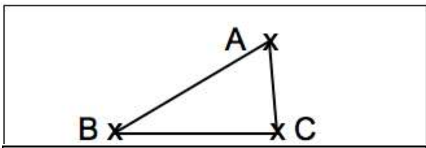
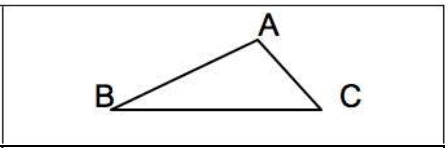
a) ការដៅនៅលើបន្ទាត់

		
មិនត្រឹមត្រូវ	ត្រឹមត្រូវ	មិនត្រឹមត្រូវ

b) ការដៅនៅលើបន្ទាត់ច្រើនកាត់គ្នា

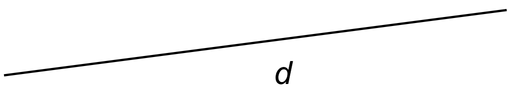
		
មិនត្រឹមត្រូវ	មិនត្រឹមត្រូវ	ត្រឹមត្រូវ

c) ការដៅកំពូលនៃពហុកោណ

	
មិនត្រឹមត្រូវ	ត្រឹមត្រូវ

1.2 បន្ទាត់ (straight line)

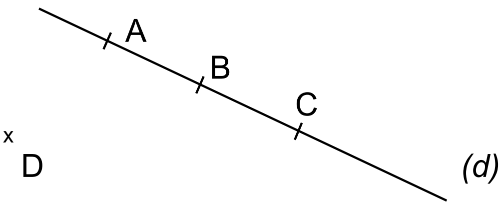
1) ការគូសបន្ទាត់មួយ



បន្ទាត់គឺជារូបធរណីមាត្រមួយ ដែលគ្មានដែនកំណត់។ ដូច្នេះ គេមិនអាចគូសតំណាងវាទាំងស្រុងបានទេ។ បន្ទាត់ខាងលើត្រូវបានកំណត់ឈ្មោះដោយ *d* ឬ *(d)* ឬ *(D)*

2) ចំណុចទាំងឡាយនៅលើបន្ទាត់

- **ការហៅឈ្មោះបន្ទាត់ :**



បន្ទាត់ *(d)* អាចហៅឈ្មោះបានច្រើនរបៀបគឺ : (AB), (BA), (AC), (CA), (BC) ou (CB)

- **ចំណុចរត់ត្រង់គ្នា ឬចំណុចនៅលើបន្ទាត់តែមួយ :**
  បើចំណុច A, B និង C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ នោះគេហៅថាវា **ចំណុចរត់ត្រង់គ្នា**។

- **ភាពជាកម្មសិទ្ធិ :**
  - បើចំណុច A ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) នោះគេសរសេរ $A \in (BC)$
    « $\in$ » read « belong to »
  - បើចំណុច D មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) នោះគេសរសេរ $D \notin (BC)$
    « $\notin$ » read « not belong to »

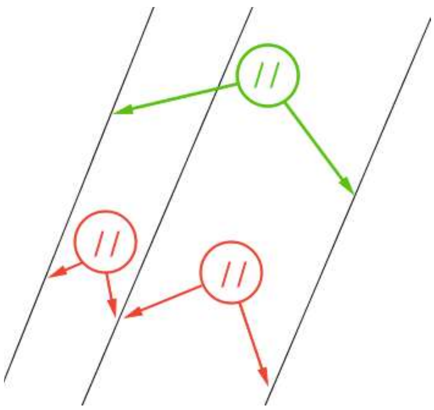
1.3 ទីតាំងបន្ទាត់ពីរ

ទីតាំង	បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា	បន្ទាត់ពីរកាត់គ្នា	បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា
រូប	(d) (d')	(d) O (d')	(d) កែង (d')
និយមន័យ	វាមិនប្រសព្វគ្នាដាច់ខាត	វាប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច	វាប្រសព្វគ្នាដោយបង្កើតបានមុំកែងមួយ
ការតាង	(d) // (d')		$(d) \perp (d')$

លំហាត់៖ ចូររៀបរាប់អំពីការសង់បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា និង ស្របគ្នា។

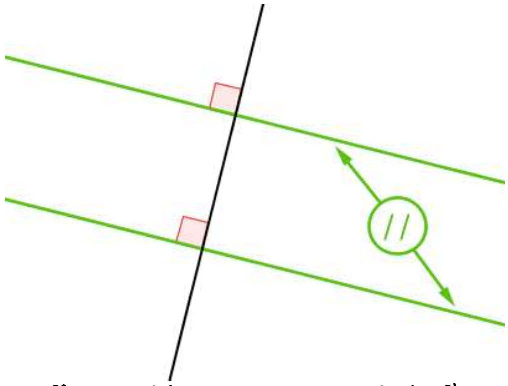
1.3 លក្ខណៈបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា

a) លក្ខណៈទី១



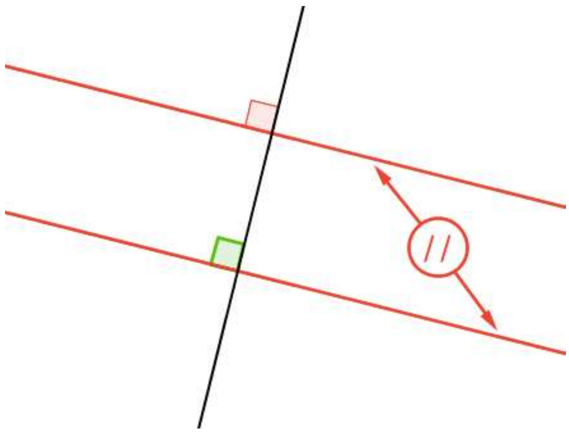
ប្រសិនបើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាទៅនឹងបន្ទាត់តែមួយ នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះត្រូវតែស្របគ្នា។

b) លក្ខណៈទី២



ប្រសិនបើបន្ទាត់ពីរកែងគ្នាទៅនឹងបន្ទាត់តែមួយ នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះត្រូវតែស្របគ្នា។

c) លក្ខណៈទី៣



ប្រសិនបើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់ទាំងអស់ដែលកែងនឹងបន្ទាត់ទី១ ត្រូវតែកែងនឹងបន្ទាត់ទី២។

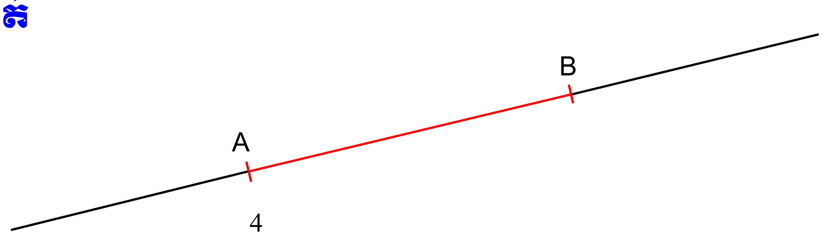
<u>អនុវត្តទី១:</u> ដោយប្រើលក្ខណៈបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាខាងលើ

1) សង់ត្រីកោណមួយ ABC និងដៅចំណុច M នៅលើជ្រុង [BC]
   - ចូរសង់បន្ទាត់មួយកែងនឹង (AB) កាត់តាមចំណុច C និងកាត់ (AB) ត្រង់ H
   - ចូរសង់បន្ទាត់មួយកែងនឹង (CH) កាត់តាមចំណុច M និងកាត់ (CH) ត្រង់ K

2) ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (AB) និង (MK) ស្របគ្នា?

2. ប្រវែង

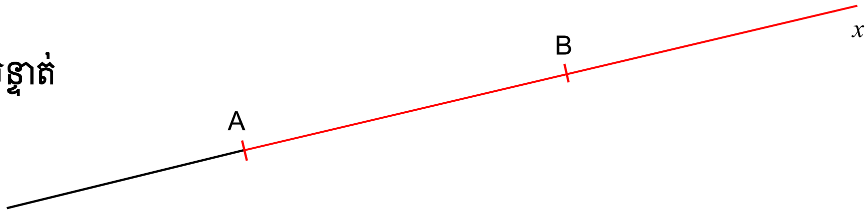
2.1 អង្កត់ និង កន្លះបន្ទាត់



1) និយមន័យ

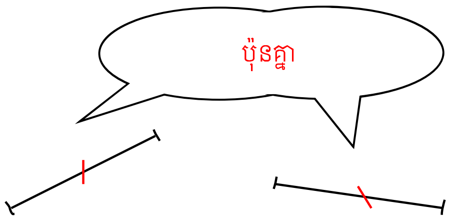
- ផ្នែកមួយនៃបន្ទាត់កំណត់ដោយចំណុចពីរត្រូវបានគេហៅថា អង្កត់ ។
- ចំណុចទាំងនេះត្រូវបានគេហៅថា ចំណុចចុង នៃអង្កត់។
- អង្កត់ខាងលើ តាងដោយ : [AB]
- បើអង្កត់ [AB] មានរង្វាស់ 8,6 cm ត្រូវតាងសរសេរ AB = 8,6 cm (កុំសរសេរ [AB] = 8,6 cm)

2) កន្លះបន្ទាត់

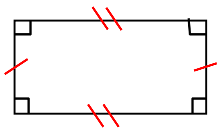


- ផ្នែកមួយនៃបន្ទាត់ដែលកំណត់ចំណុចត្រឹមតែចុងផ្នែកម្ខាង ហៅថា កន្លះបន្ទាត់ ។
- កន្លះបន្ទាត់ខាងលើ តាងដោយ: [Ax) ឬអាចសរសេរដោយ : [AB)

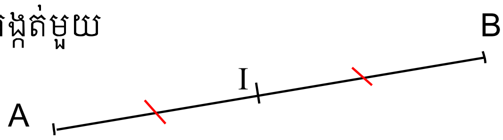
3) អង្កត់មានប្រវែងស្មើគ្នា



អង្កត់ពីរមានប្រវែងស្មើគ្នា ពេលណាពួកវាអាចដាក់ពីលើគ្នាបាន ឃើញ ប៉ុនគ្នា ឬហៅថា អង្កត់ពីរប៉ុនគ្នា (congruence) ។



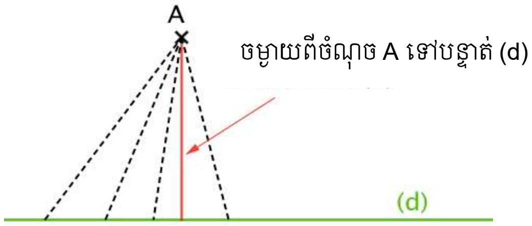
4) ចំណុចកណ្តាលអង្កត់មួយ



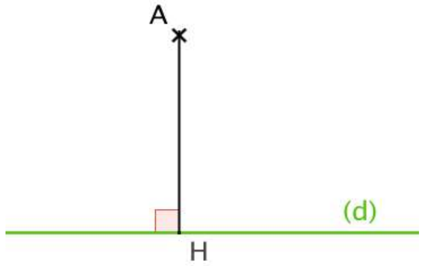
ចំណុច I កណ្តាល [AB] ត្រូវស្ថិតនៅលើ [AB] ដែលចែកអង្កត់ [AI] និង [BI] ជាពីរអង្កត់ប៉ុនគ្នា។ i.e., ចំណុចកណ្តាលត្រូវមានចំងាយស្មើគ្នាទៅនឹងចំណុចអង្កត់ទាំងពីរ។

2.1 ចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់

<u>និយមន័យ:</u> ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយ គឺជាប្រវែងខ្លីបំផុតនៃអង្កត់មួយដែលភ្ជាប់ចំណុចនេះទៅចំណុចមួយទៀតនៅលើបន្ទាត់។



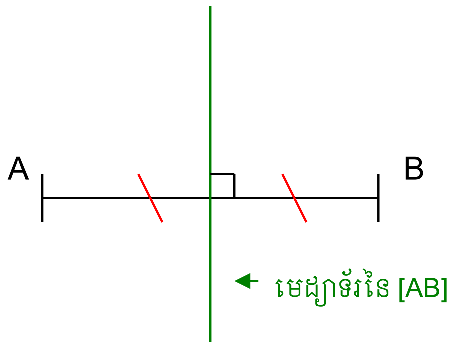
លក្ខណ: ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (d) គឺជាប្រវែងអង្កត់ដែលភ្ជាប់ចំណុច A ទៅចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងនឹង (d) កាត់តាមចំណុច A ។



<u>សម្គាល់:</u> ក្នុងរូបខាងលើ ចំណុច H ហៅថា ជើងនៃបន្ទាត់កែង ។ AH គឺជារង្វាស់ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅ (d) ។

2.2 មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់មួយ

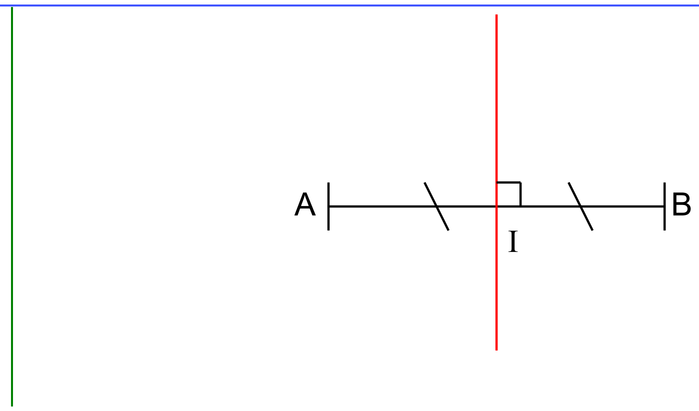
1) និយមន័យ



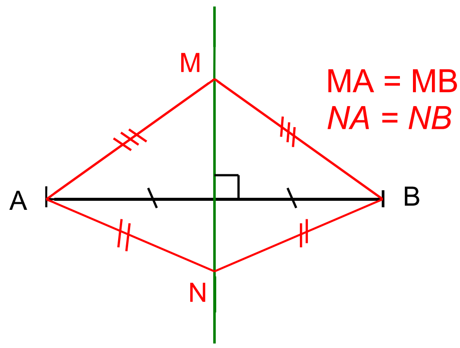
មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ [AB] គឺជាបន្ទាត់កែងទៅនឹងអង្កត់ [AB] និងកាត់តាមចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ [AB]

ពាក្យ មេដ្យាទ័រ នេះបានរកឃើញដោយលោក Euclid ក្នុងសតវត្សទី 3 មុន គ.ស។ ពាក្យនេះនៅតែថ្មីស្រឡាងនៅក្នុងភាសាគណិតវិទ្យា។ នៅឆ្នាំ 1923 មានសមាគមគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យា បានបំផុសគំនិតពាក្យនេះមកពីពាក្យ "មេដ្យាន" និងពាក្យ "កាត់គ្នា" ។

លំហាត់. ចូររៀបរាប់ពីការសង់មេដ្យាទ័រអង្កត់មួយ ដោយប្រើកុំប៉ា ដូចរូបខាងក្រោម៖



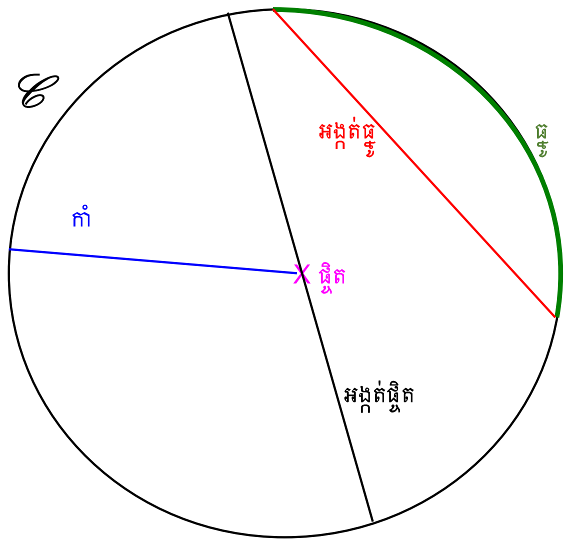
2) លក្ខណៈរបស់មេដ្យាទ័រ



<u>លក្ខណៈ</u> គ្រប់ចំណុចនៅលើមេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់មួយ មានចម្ងាយស្មើគ្នាទៅនឹងចំណុចចុងទាំងពីររបស់អង្កត់នេះ។

3. រង្វង់

3.1 បច្ចេកសព្ទ

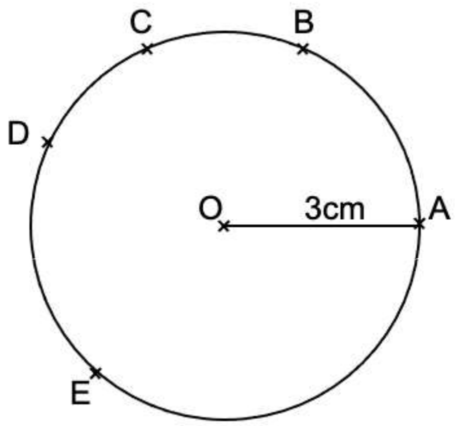


<u>លក្ខណៈ១.</u> អង្កត់ផ្ចិត = 2 x កាំ

<u>លក្ខណៈ២.</u> ចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់មួយ គឺជា ផ្ចិត ។

3.2 ចំណុចនៅលើរង្វង់មួយ

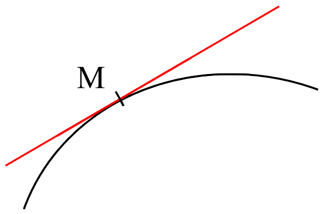
1) ដៅចំណុចមួយ O.
2) ដៅចំណុចមួយ A នៅចម្ងាយ 3 cm ពីចំណុច O
3) ដូច 2) ដៅចំណុច B និងចំណុចបន្តបន្ទាប់ C, D, E, …
4) តើយើងសង្កេតបានដូចម្តេច?



លក្ខណៈ៣. គ្រប់ចំណុចទាំងអស់ ដែលមានចម្ងាយ r ពីចំណុច O ត្រូវស្ថិតនៅលើរង្វង់ ផ្ចិត O និងមានកាំប្រវែង r ។

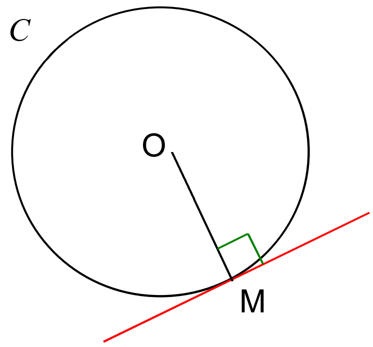
3.3 បន្ទាត់ប៉ះនៅនឹងរង្វង់មួយ

1) និយមន័យ



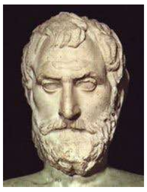
បន្ទាត់ប៉ះ គឺជាបន្ទាត់មួយដែល «ប៉ះ» ទៅនឹងរង្វង់មួយ នៅត្រង់តែមួយចំណុចគត់។

2) សំណង់បន្ទាត់ប៉ះ (វិធីនេះរកឃើញដោយលោក *Euclid)*



បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M ទៅនឹងរង្វង់ *C* គឺជាបន្ទាត់កែងទៅនឹងកាំរង្វង់ត្រង់ចំណុចនេះ។

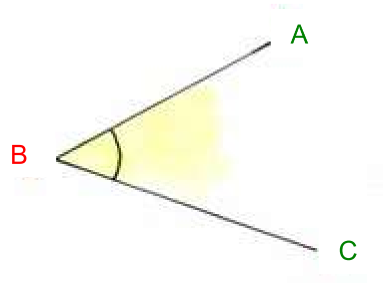
4. មុំ



- ពាក្យ « angle » មកពីពាក្យភាសាក្រិច « agkon » (ប្រែថា កែងដៃ) ។
- លោក *Thalès de Milet* (624 – 548 មុន គ.ស) ចាត់ទុក មុំ ជារង្វាស់ធរណីមាត្រទី៤ បន្ទាប់ពី ប្រវែង ផ្ទៃ និងមាឌ
- ឫសគល់ពាក្យ ឥណ្ឌូ - អឺរ៉ុប "ang" មានន័យថា "តឹង" ។
- ក្រោយមកនៅក្នុងភាសាឡាតាំង "angulus" តាមអត្ថន័យគណិតវិទ្យា ដែលបច្ចុប្បន្ន ប្រែថា « angle » ។

4.1 និយមន័យ និងបច្ចេកសព្ទ

1) និយមន័យ



និយមន័យ. មុំ គឺជា opening (លំហបើក) ដែលកំណត់ដោយកន្លះបន្ទាត់ពីរ ដែលមានចំណុចគល់រួម។ ចំណុចដែលកន្លះបន្ទាត់ទាំងពីរនេះប្រសព្វគ្នា ហៅថា កំពូល ។ ជ្រុងនៃមុំ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ទាំងនេះ។ មុំមួយអាចតាងដោយប្រើអក្សរបី ឧទាហរណ៍ BAC ដែលអក្សរកណ្ដាលតំណាងឱ្យកំពូលនៃមុំ។ ឯកតារង្វាស់របស់មុំ គឺតាងដោយ ដឺក្រេ "°" ឬ រ៉ាដ្យង់។

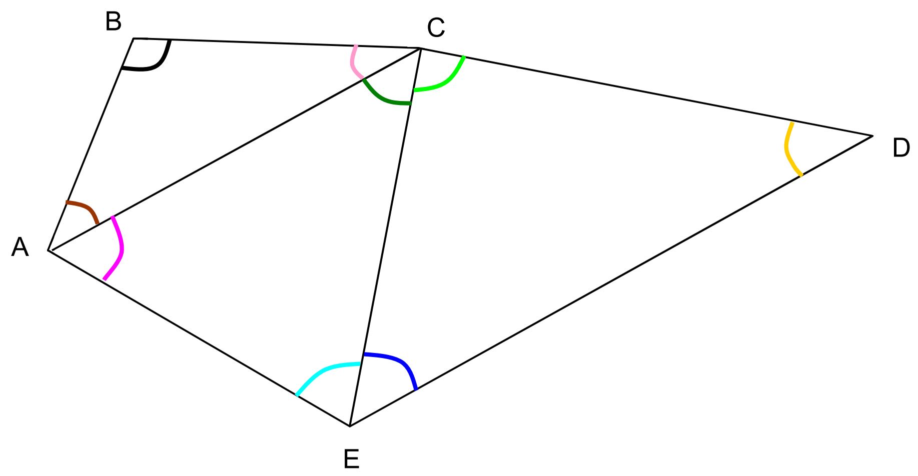
ក្នុងរូបខាងលើ កំពូលរបស់មុំ គឺចំណុច B ។

ព្រំដែននៃមុំនេះ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ [BA) និង [BC) ។

មុំនេះតាងដោយ : $\widehat{ABC}$

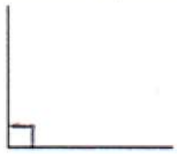
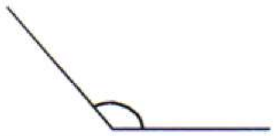
(កំពូលរបស់មុំត្រូវសរសេរនៅទីតាំងកណ្ដាល)

អនុវត្តន៍. ចូរដាក់ឈ្មោះមុំក្នុងរូបខាងក្រោម៖

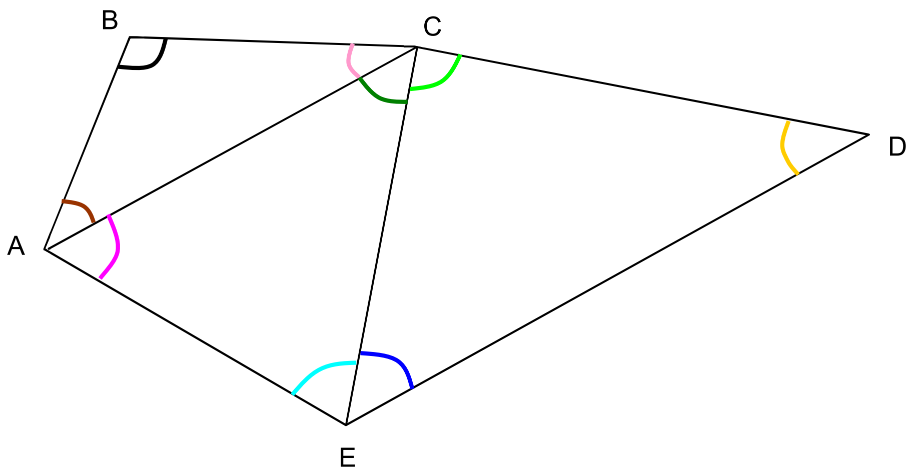


ANGLES									
ឈ្មោះ									

2) បច្ចេកសព្ទ

ប្រភេទ	រូប	ខ្នាត
មុំស្រួច Acute angle		$\leq 90^\circ$
មុំកែង Right angle		$= 90^\circ$
មុំទាល Obtuse angle		$> 90^\circ$ $< 180^\circ$
មុំរាប Straight angle		$= 180^\circ$

អនុវត្តន៍. ចូរកំណត់ប្រភេទមុំ ក្នុងរូបខាងក្រោម៖



$\widehat{ABC}$	$\widehat{BAC}$	$\widehat{BCA}$	$\widehat{CAE}$	$\widehat{ACE}$	$\widehat{AEC}$	$\widehat{CED}$	$\widehat{ECD}$	$\widehat{CDE}$

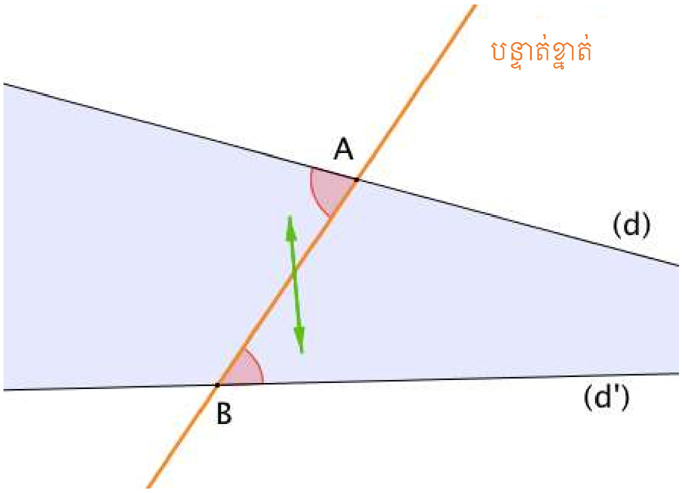
លំហាត់. ចូររៀបរាប់ការសង់មុំ $\widehat{ABC}$ = 38°

4.1 មុំឆ្លាស់ក្នុង

1) <u>និយមន័យ</u>

គេហៅមុំពីរពណ៌ក្រហមដូចក្នុងរូបខាងក្រោម ថាជាមុំឆ្លាស់ក្នុង ព្រោះ :

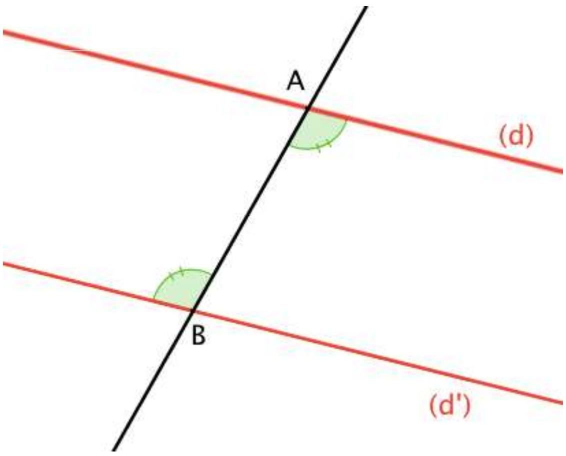
- វាស្ថិតនៅខាងក្នុងផ្នែកដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ (d) និង (d’)
- វាស្ថិតនៅផ្នែកម្ខាង និងផ្នែកម្ខាងទៀត (ឆ្លាស់គ្នា) នៃបន្ទាត់ខ្វាត់។



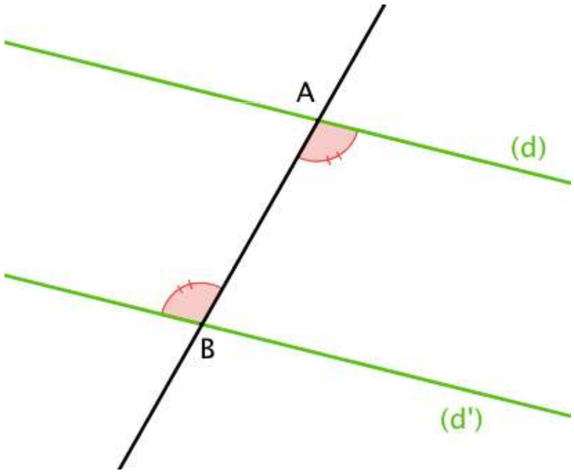
<u>និយមន័យ.</u> គេអោយបន្ទាត់ពីរ *(d)* និង *(d’)* កាត់ដោយខ្វាត់មួយ។ គេហៅមុំពីរដែលបង្កើតដោយបន្ទាត់ទាំងបីនេះ ថា មុំឆ្លាស់ក្នុង ។ មានន័យថា:

- មុំទាំងពីរគ្មានកំពូលរួម
- មុំទាំងពីរស្ថិតនៅផ្នែកម្ខាងម្នាក់នៃខ្វាត់
- មុំទាំងពីរនៅផ្នែកខាងក្នុង ដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ពីរ *(d)* និង *(d’)* ។

2) **លក្ខណៈ**



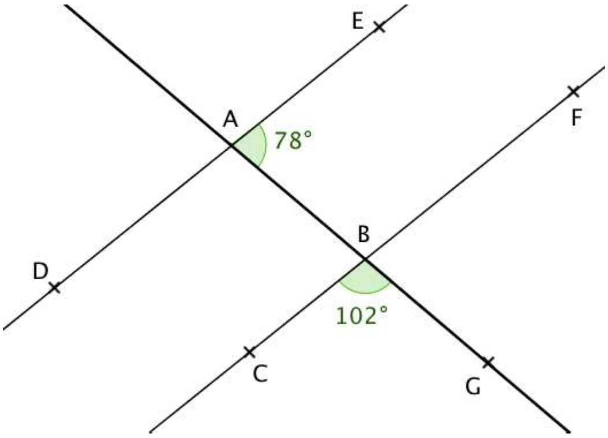
បើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា នោះមុំឆ្លាស់ក្នុងនៅលើបន្ទាត់ទាំងពីរនេះ ជាមុំស្មើគ្នា។



បើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ដែលបង្កើតមុំទាំងពីរនេះ គឺជាបន្ទាត់ស្របគ្នា។

<u>អនុវត្តន៍.</u> ប្រើលក្ខណៈស្របគ្នាចំពោះមុំឆ្លាស់ក្នុង

តាមរូប តើបន្ទាត់ (DE) និង (CF) ស្របគ្នាឬទេ?



____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

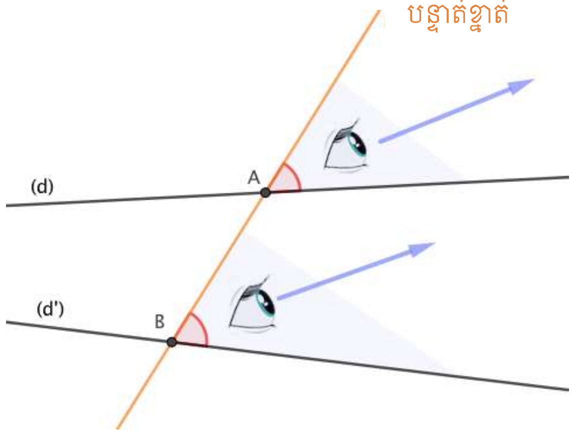
____

____

4.2 មុំត្រូវគ្នា

1) <u>និយមន័យ</u>

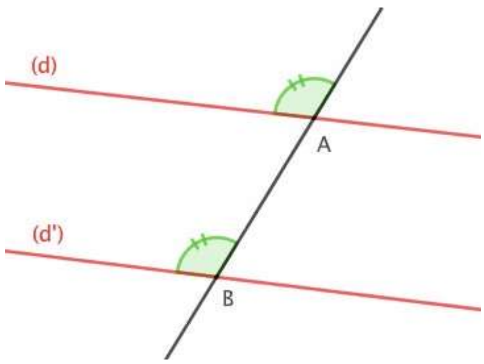
គេថាមុំទាំងពីរដូចក្នុងរូបមានពណ៌ក្រហម ជាមុំមានជ្រុងត្រូវគ្នា ព្រោះបើតាម "ការមើលឃើញ" វាស្ថិតក្នុងទិសដៅដូចគ្នា។



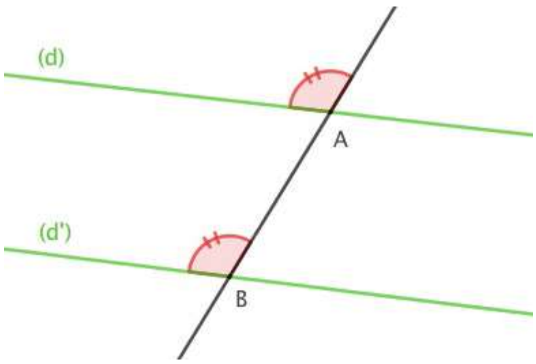
<u>និយមន័យ.</u> គេអោយបន្ទាត់ពីរ (d) និង (d') កាត់ដោយខ្ទាត់មួយ។ គេថា មុំពីរដែលបង្កើតដោយបន្ទាត់ទាំងបីនេះ ជា មុំមានជ្រុងត្រូវគ្នា ឬ មុំត្រូវគ្នា ។ មានន័យថា ៖

- មុំទាំងពីរមិនមានកំពូលរួមគ្នា
- មុំទាំងពីរមានបន្ទាត់ខ្ទាត់ ជាជ្រុងរួមគ្នា
- មុំមួយស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្នុងវ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ (d) និង (d') ហើយមុំមួយទៀតស្ថិតនៅខាងក្រៅ។

2) <u>លក្ខណៈ</u>



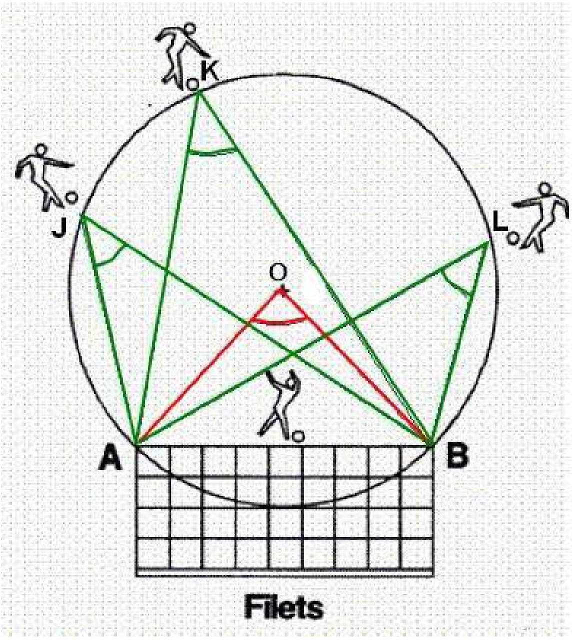
បើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា នោះមុំត្រូវគ្នា ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ទាំងនេះ គឺស្មើគ្នា។



បើមុំពីរត្រូវគ្នា ស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ដែលមុំទាំងពីរស្ថិតនៅ គឺជាបន្ទាត់ស្របគ្នា។

4.3 មុំចារឹកក្នុង មុំផ្ចិត

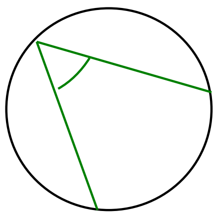
1) <u>និយមន័យ</u>



តាមរូបខាងលើ គេបាន: $\widehat{AJB} = \widehat{AKB} = \widehat{ALB} = 46°$ និង $\widehat{AOB} = 92°$

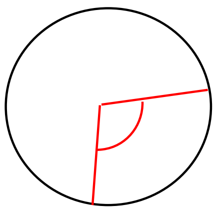
$\widehat{AJB}, \widehat{AKB}$ et $\widehat{ALB}$ គឺជាមុំចារឹកក្នុងរង្វង់។

មុំចារឹកក្នុង ជាមុំបង្កើតដោយអង្កត់ធ្នូពីរដែលគូស ចេញពីចំណុចតែមួយនៅលើរង្វង់។



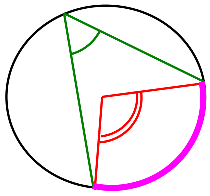
$\widehat{AOB}$ គឺជា មុំផ្ចិត ។

មុំផ្ចិត គឺជាមុំដែលមានកំពូលនៅត្រង់ផ្ចិតនៃរង្វង់។

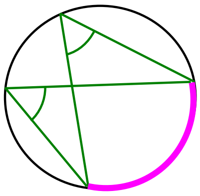


2) <u>លក្ខណៈ:</u>

លក្ខណៈ១.
មុំផ្ចិត មានរង្វាស់ពីរដងនៃរង្វាស់មុំចារឹកក្នុង ដែលមានធ្នូដូចគ្នា។



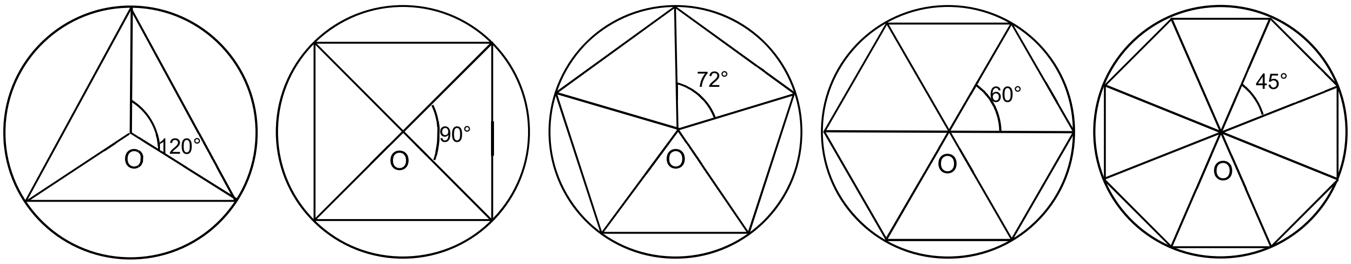
លក្ខណៈ២.
មុំចារឹកក្នុងពីរ ដែលមានធ្នូដូចគ្នា មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។



3) ពហុកោណនិយ័ត

ពាក្យថា « polygon » មកពីពាក្យ « poly » មានន័យថា «ពហុ» និងពាក្យ gonia មានន័យថា «មុំ, ជ្រុង » ។

និយមន័យ. ពហុកោណនិយ័ត គឺជាពហុកោណមួយដែលចារឹកក្នុងរង្វង់ ដែលគ្រប់ជ្រុងទាំងអស់មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

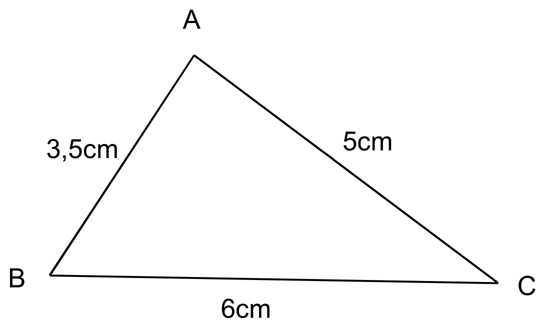


ត្រីកោណសម័ង្ស ការេ បញ្ចកោណនិយ័ត ឆកោណនិយ័ត អដ្ឋកោណនិយ័ត

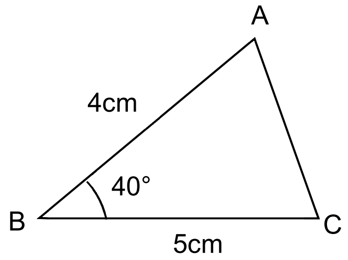
5. ត្រីកោណ

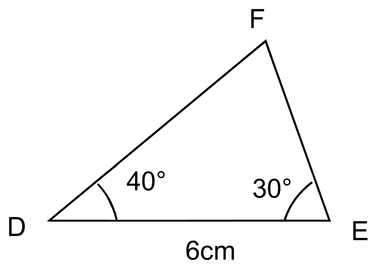
5.1 សំណង់ត្រីកោណ

លំហាត់ ១. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ត្រីកោណមួយដោយស្គាល់ជ្រុងទាំងបី។



លំហាត់ ២. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ត្រីកោណមួយដោយស្គាល់ជ្រុង និង មុំ ដូចរូបខាងក្រោម។

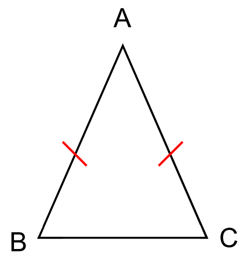




5.2 ត្រីកោណពិសេសៗ

1) <u>ត្រីកោណសមបាត</u>

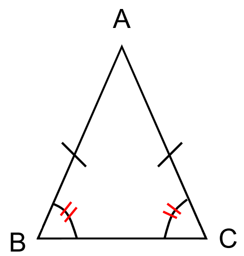
a) <u>និយមន័យ</u>



ត្រីកោណសមបាត ជាត្រីកោណមានជ្រុងពីរស្មើគ្នា។

ក្នុងរូប A ហៅថា **កំពូលសំខាន់** របស់ត្រីកោណ។ គេថា ABC គឺជាត្រីកោណសមបាតត្រង់ A ។ ជ្រុង [BC] ហៅថា បាត របស់ត្រីកោណ។

b) <u>លក្ខណៈ</u>

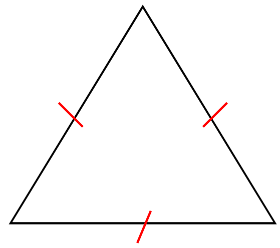


ក្នុងត្រីកោណសមបាត មុំទាំងពីរត្រង់បាតត្រីកោណ (មុំបាត) មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

លំហាត់ ៣. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ត្រីកោណសមបាតត្រង់ A ដោយស្គាល់ជ្រុង AC = 4cm និង BC = 6 cm ។

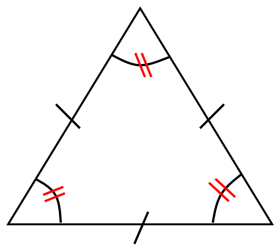
2) ត្រីកោណសម័ង្ស

a) និយមន័យ



ត្រីកោណសម័ង្ស គឺជាត្រីកោណមួយមានជ្រុងទាំងបីមានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

b) លក្ខណៈ

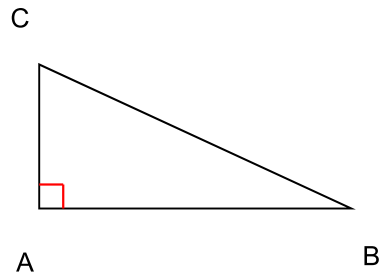


ក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស គ្រប់មុំទាំងអស់មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

លំហាត់ ៤. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ត្រីកោណសម័ង្ស DEF ដោយស្គាល់ជ្រុង EF = 5 cm ។

3) ត្រីកោណកែង

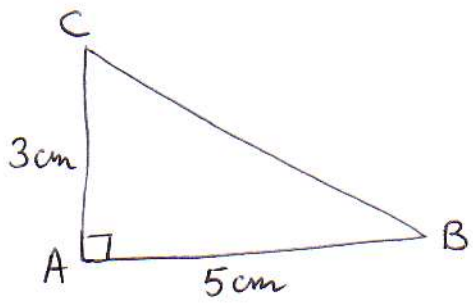
a) និយមន័យ



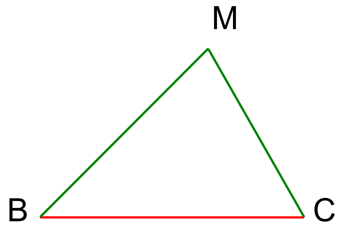
ត្រីកោណកែង គឺជាត្រីកោណមួយដែលមានជ្រុងពីរកែងគ្នា។

ក្នុងរូប គេថាត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។

លំហាត់ ៥. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ដោយស្គាល់ AB = 5 cm និង AC = 3 cm ។



5.3 វិសមភាពត្រីកោណ



លក្ខណៈ: គេបានវិសមភាពត្រីកោណ :

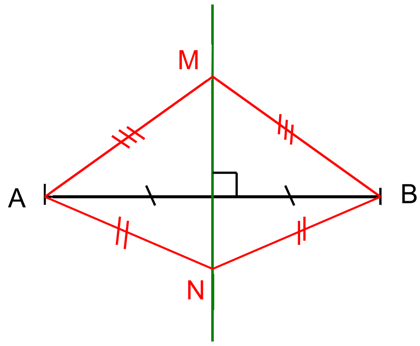
BC < BM + MC

សម្គាល់: បើចំណុច M ∈ [BC] តើមានអ្វីកើតឡើង?

BC = BM + MC

5.4 បន្ទាត់សំខាន់ៗចំពោះត្រីកោណ

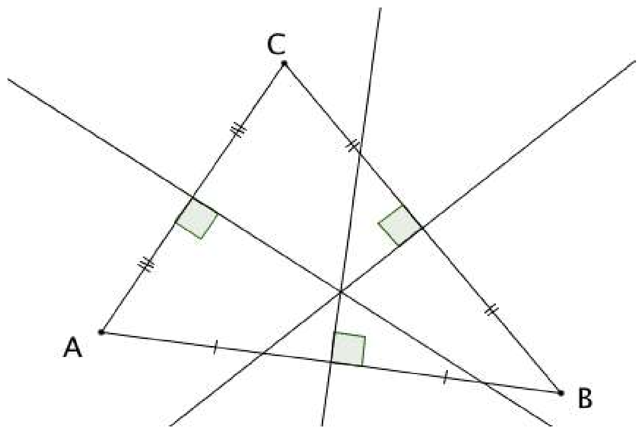
1) មេដ្យាទ័ររបស់ត្រីកោណ



MA = MB et NA = NB

លក្ខណៈ: គ្រប់ចំណុចដែលស្ថិតនៅលើមេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់ [AB] មានចម្ងាយស្មើគ្នាពីចំណុច A និងចំណុច B។ គេហៅថា សមចម្ងាយ ពី A និងពី B ។

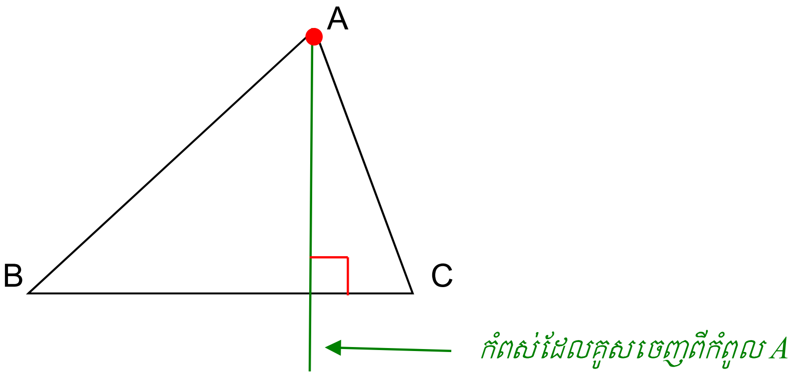
មេដ្យាទ័ររបស់ត្រីកោណមួយ គឺជាមេដ្យាទ័រនៃជ្រុងទាំងបីរបស់វា។ ដូច្នេះ ត្រីកោណមួយមានមេដ្យាទ័រចំនួនបី។



សម្គាល់: មេដ្យាទ័ររបស់ត្រីកោណមួយ ប្រសព្វគ្នានៅត្រង់ចំណុចតែមួយ។

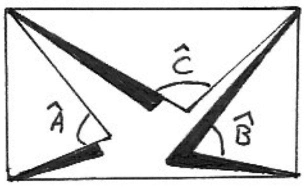
2) កំពស់របស់ត្រីកោណ

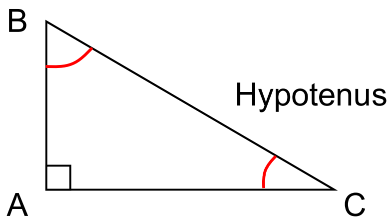
<u>និយមន័យ.</u> ក្នុងត្រីកោណមួយ កំពស់ គឺជាបន្ទាត់មួយដែលកាត់តាមកំពូលមួយហើយកែងទៅនឹងជ្រុងឈមនឹងកំពូលនោះ ហៅថា បាត។



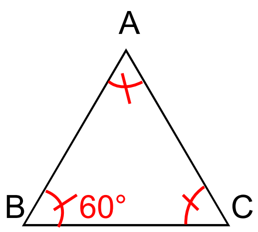
5.5 **វិធាន** 180°

<u>លក្ខណៈ១.</u> ផលបូកនៃរង្វាស់មុំរបស់ត្រីកោណមួយស្មើនឹង 180°។





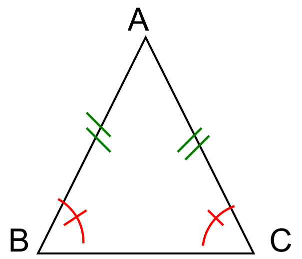
<u>លក្ខណៈ២.</u> ក្នុងត្រីកោណកែង ផលបូកនៃរង្វាស់មុំ ដែលជាប់នឹងអ៊ីប៉ូតេនុស ស្មើនឹង 90°។



<u>លក្ខណៈ៣ :</u> ក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស មុំទាំងបីមានរង្វាស់ស្មើ 60°។

5.6 មុំនៅក្នុងត្រីកោណសមបាត

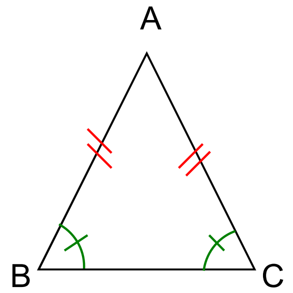
1)



<u>លក្ខណៈ៤.a :</u> បើក្នុងត្រីកោណមួយ មានមុំពីរមានរង្វាស់ស្មើគ្នា នោះគេត្រីកោណនេះជាត្រីកោណសមបាទ។

Thalès de Milet (-625 ; -547)

2)



<u>លក្ខណៈ៤.b :</u> បើត្រីកោណមួយជាត្រីកោណសមបាត នោះវាមានមុំបាតទាំងពីរមានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

Thalès de Milet (-625 ; -547)

5.7 ត្រីកោណដូច

1) <u>និយមន័យ</u>

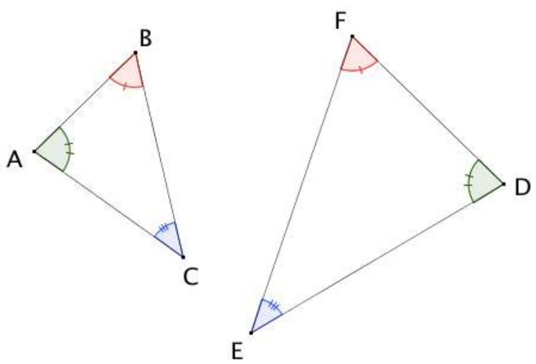
<u>និយមន័យ :</u> គេហៅត្រីកោណដូចគ្នា គឺជាត្រីកោណដែលមានមុំពីរៗ មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។

ត្រីកោណ ABC និង DEF ជាត្រីកោណដូចគ្នា ព្រោះ

$\widehat{ABC} = \widehat{DFE}$

$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

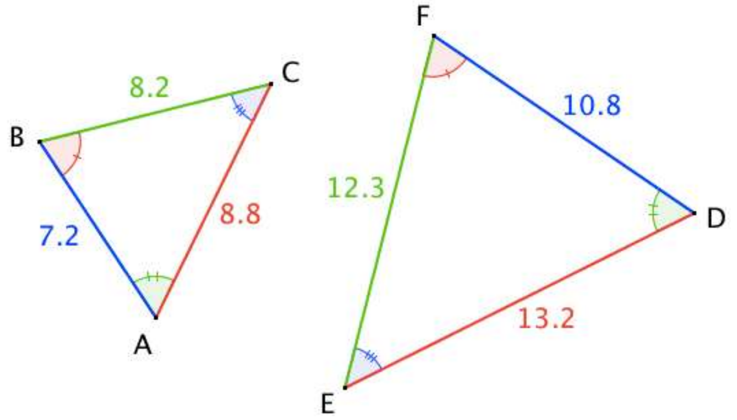
$\widehat{ACB} = \widehat{DEF}$



<u>ចំណាំ :</u> ដើម្បីបង្ហាញថាត្រីកោណពីរគឺដូចគ្នា គេគ្រាន់តែបង្ហាញថា មានគូមុំពីរៗ មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។ ជាការពិត តាមវិធាន 180° មុំគូចុងក្រោយ ក៏មានរង្វាស់ស្មើគ្នាដែរ។

2) <u>សមាមាត្រនៃរង្វាស់ជ្រុង</u>

ត្រីកោណ ABC និង DEF ជាត្រីកោណដូចគ្នា។ គេបាន ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC សមាមាត្រទៅនឹង ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ DEF ។



ជ្រុងរបស់ DEF	DF = 10,8	EF = 12,3	ED = 13,2
ជ្រុងរបស់ ABC	AB = 7,2	BC = 8,2	AC = 8,8
	ឈមទៅនឹងមុំខៀវ	ឈមទៅនឹងមុំបៃតង	ឈមទៅនឹងមុំក្រហម

គេបាន

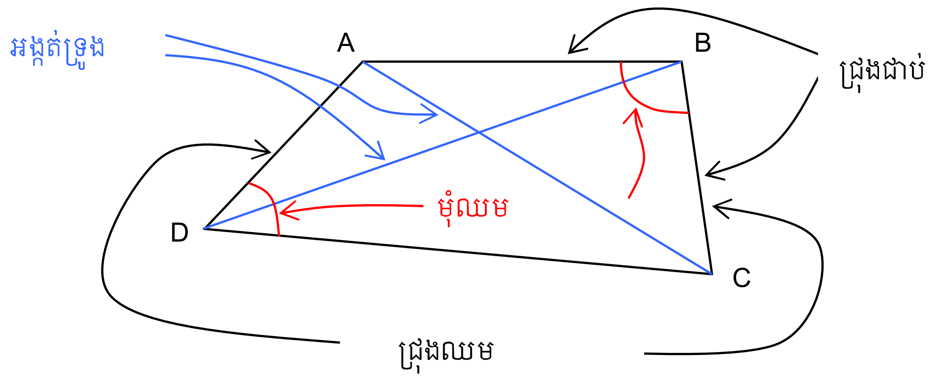
$$\frac{10,8}{7,2} = \frac{12,3}{8,2} = \frac{13,2}{8,8} = 1,5$$

<u>លក្ខណៈ</u> គេថាត្រីកោណពីរដូចគ្នា បើប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយសមាមាត្រទៅនឹងប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយទៀត។

6. **ចតុកោណ**

6.1 **បច្ចេកសព្ទ**

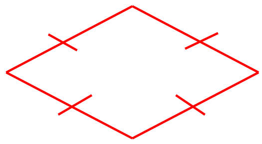
<u>និយមន័យ :</u> ពហុកោណមួយដែលមានជ្រុងបួន ហៅថា ចតុកោណ ។



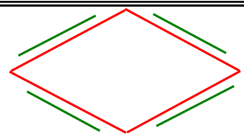
- ក្នុងរូបខាងលើ A, B, C និង D ហៅថាកំពូលរបស់ចតុកោណ។
- ដើម្បីកំណត់ឈ្មោះចតុកោណមួយ គេគ្រាន់តែស្រង់យកឈ្មោះកំពូលតាមលំដាប់លំដោយដែលមាន។ គេបានឈ្មោះផ្សេងៗរបស់ចតុកោណតែមួយគឺ៖ ABCD, BCDA, DCBA, ... ~~តែមិនមែន ABDC~~

6.2 ចតុកោណស្មើ

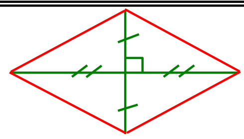
និយមន័យ: ចតុកោណស្មើ គឺជាចតុកោណមួយ ដែលមានជ្រុងទាំងបួន មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។



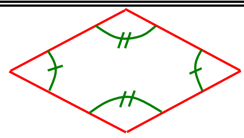
លក្ខណៈ១.
បើចតុកោណមួយជាចតុកោណស្មើ នោះជ្រុងឈមរបស់វាស្របគ្នា។



លក្ខណៈ២.
បើចតុកោណមួយជាចតុកោណស្មើ នោះអង្កត់ទ្រូងរបស់វាកែងគ្នា និងមានចំណុចកណ្ដាលរួមគ្នា។



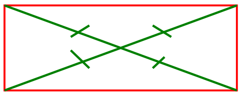
លក្ខណៈ៣.
បើចតុកោណមួយជាចតុកោណស្មើ នោះមុំឈមគ្នា មានរង្វាស់ស្មើគ្នា។



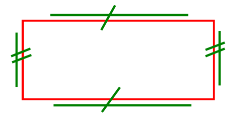
6.3 ចតុកោណកែង

និយមន័យ: ចតុកោណកែង គឺជាចតុកោណមួយដែលមានមុំទាំងបួន ជាមុំកែង។

លក្ខណៈ៤.
បើចតុកោណមួយជាចតុកោណកែង នោះអង្កត់ទ្រូងរបស់វាមានចំណុចកណ្ដាលរួម និង មានរង្វាស់ប្រវែងស្មើគ្នា។

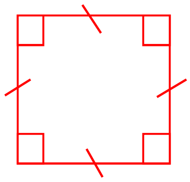


<u>លក្ខណៈ៥.</u>
បើចតុកោណមួយជាចតុកោណកែង នោះជ្រុងឈមរបស់វាស្របគ្នា និងមានរង្វាស់ប្រវែងស្មើគ្នា។



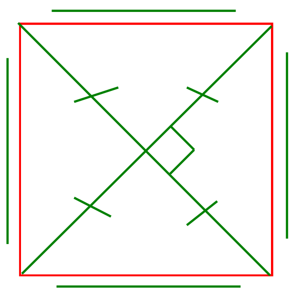
6.4 ការេ

<u>និយមន័យ:</u> ការេ គឺជាចតុកោណមួយ ដែលមានជ្រុងបួន មានរង្វាស់ប្រវែងស្មើគ្នា និងមានមុំកែងបួន។



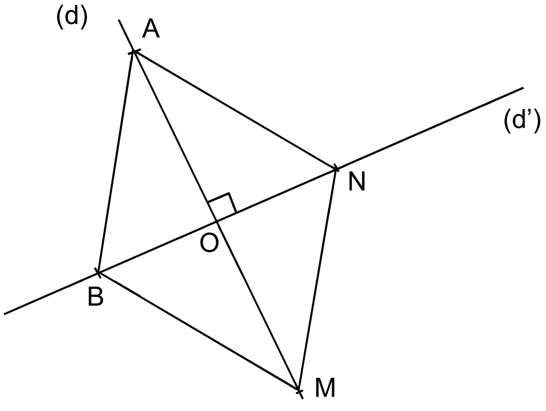
ជាវិបាក ការេគឺជាចតុកោណកែង និងជាចតុកោណស្មើ។

សង្ខេប៖ ការេ មានគ្រប់លក្ខណៈរបស់ចតុកោណកែង និងចតុកោណស្មើ។



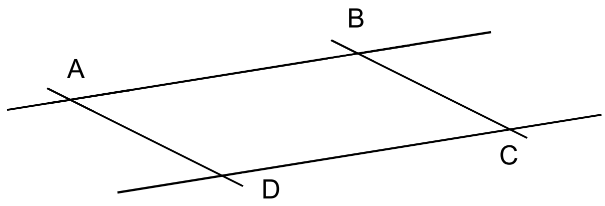
<u>អនុវត្តន៍.</u> យក (d) និង (d’) ជាបន្ទាត់ពីរកែងគ្នាត្រង់ O ។ កំណត់ចំណុច A ជាចំណុចមួយរបស់ (d) និង B ជាចំណុចមួយរបស់ (d’) ។ យកចំណុច M ឆ្លុះនឹងចំណុច A ធៀបនឹងចំណុច O ហើយ N ឆ្លុះនឹង B ធៀបនឹង O។

1) ចូរបង្ហាញថា ចតុកោណ ABMN មានជ្រុងពីរៗស្របគ្នា។
2) តើ ABMN ជាចតុកោណស្មើឬទេ?



6.5 ប្រលេឡូក្រាម

1) និយមន័យ

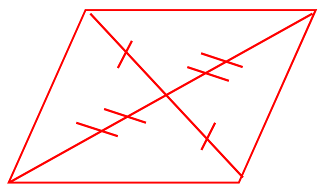


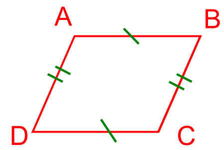
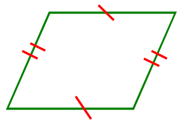
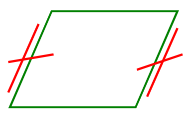
និយមន័យ : ប្រលេឡូក្រាមគឺជាចតុកោណមួយ ដែលមានជ្រុងឈម ស្របគ្នា។

លំហាត់ ៦. ចូររៀបរាប់អំពីសំណង់ប្រលេឡូក្រាម ABCD ដោយផ្ដើមចេញពីបីចំណុច A, B និង C ។

2) លក្ខណៈ

លក្ខណៈ១.
ប្រលេឡូក្រាម គឺជាចតុកោណមួយ ដែលមានអង្កត់ទ្រូងកាត់គ្នាត្រង់ចំណុចកណ្ដាល។



លក្ខណៈ២.	បើ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម នោះជ្រុងឈមរបស់វាមានរង្វាស់ប្រវែងស្មើគ្នា។	
លក្ខណៈ៣.	បើចតុកោណ ABCD មានជ្រុងឈមមានប្រវែងស្មើគ្នា នោះវាជាប្រលេឡូក្រាម។	
លក្ខណៈ៤.	បើចតុកោណ ABCD មានជ្រុងឈមពីរស្របគ្នា និងមានប្រវែងស្មើគ្នា នោះវាជាប្រលេឡូក្រាម។	

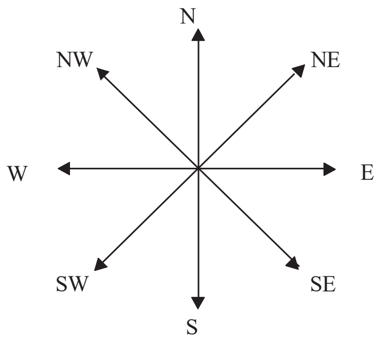
អនុវត្តន៍ ១.

មុំ រង្វង់ និងបន្ទាត់ប៉ះ

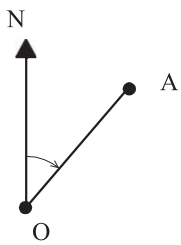
មាតិការ

1. ទិសដៅប្រើត្រីវិស័យ (Compass bearings)

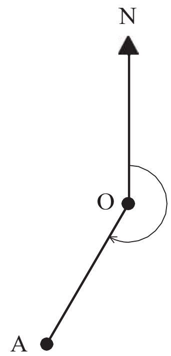
- នៅពេលពណ៌នាអំពីទិសដៅ ចំនុចទាំងឡាយនៃត្រីវិស័យពិតជាមានសារៈប្រយោជន៍ ឧ. S (ខាងត្បូង) ឬ SW (ភាគនិរតី) ។



- គេគិតទិសដៅរបស់ចំណុចណាមួយ តាមទិសដៅទ្រនិចនាឡិកា គិតចាប់ពីទិសខាងជើងទៅ ហើយគេប្រើលេខ 3 ខ្ទង់ ។



ទិសដៅរបស់ចំណុច A ធៀប O គឺ 050°



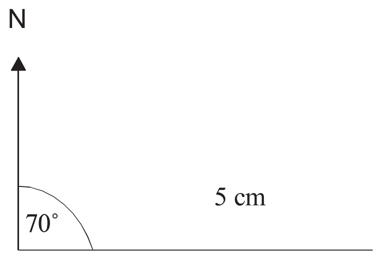
ទិសដៅរបស់ចំណុច A ធៀប O គឺ 210°

ឧទាហរណ៍.

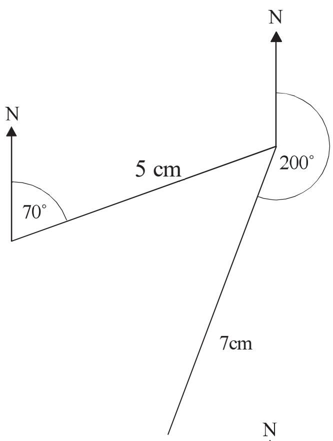
ទូកមួយបើកបានចម្ងាយ 500 km តាមទិសដៅ 070° ហើយបន្ទាប់មកចរបានចម្ងាយ 700 km តាមទិសដៅ 200°។ ចូររកចំងាយរបស់ទូកពីចំណុចចាប់ផ្តើមរបស់វា និងទិសដៅដែលទូកនោះស្ថិតនៅ ។

ចម្លើយ.

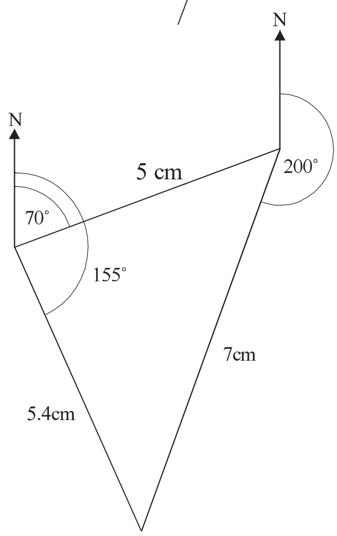
1. គូសព្រួញទៅទិសខាងជើង ត្រង់ចំណុចផ្តើម
2. វាស់មុំ 70° ចេញពីទិសខាងជើង
3. គូសអង្កត់ប្រវែង 5 cm
   (1 cm តាង 100 km)



4. គូសព្រួញទី២ ទៅទិសខាងជើង រួចវាស់មុំ
   ចំនួន 200°
5. គូសអង្កត់ប្រវែង 7 cm



6. គូសភ្ជាប់ចំណុចចុងក្រោយ និងចំណុចផ្តើម
   រួចវាស់ចម្ងាយរបស់វា គឺ 5.4 cm ដែលស្មើ
   540 គម ។
7. ទិសដៅចុងក្រោយរបស់ទូកគឺ 155°



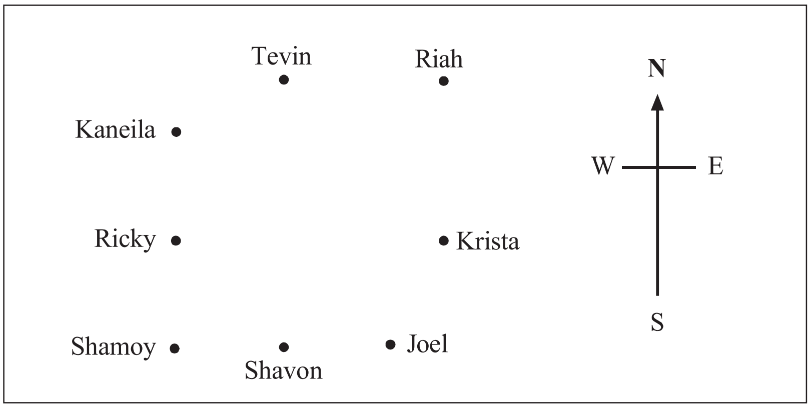
Practice No. 1

#G1 កប៉ាល់មួយចាកចេញពីកំពង់ផែ P ហើយបើកសំដៅទៅកាន់កំពង់ផែ Q តាមទិសដៅ 124° ។ ពីកំពង់ផែ Q កប៉ាល់នេះធ្វើដំណើរទៅកាន់កំពង់ផែ R តាមទិសដៅ 320° ។ ដោយដឹងថា ទិសដៅរបស់ R ធៀបនឹង P គឺ 025°:

(ក) ចូរគូរដ្យាក្រាម ដោយដាក់ស្លាកចំណុចនីមួយៗ ដើម្បីតាងឱ្យការធ្វើដំណើររបស់កប៉ាល់ ។

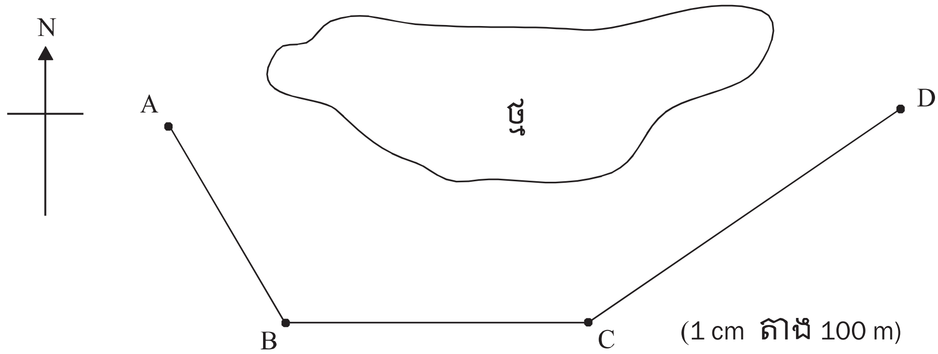
(b) កំណត់ទិសដៅរបស់ចំណុច P ធៀបនឹង R ។

#G2 ដ្យាក្រាមខាងក្រោមបង្ហាញទីតាំងមិត្តភ័ក្តិទាំង៨។



(a) តើអ្នកណានៅភាគខាងត្បូង Riah?
(b) បើ Kaneila ដើរទៅទិស SE តើនាងនឹងជួបអ្នកណា?
(c) ប្រសិនបើ Riah ដើរទៅទិស SW តើនាងនឹងជួបអ្នកណា?
(d) តើអ្នកណាស្ថិតនៅភាគខាងលិច Krista?
(e) តើនៅទិស NW របស់ Krista ជានរណា?
(f) តើ Shavon នឹងជួបអ្នកណា ប្រសិនបើគាត់ដើរទៅទិស NW?
(g) តើ Shamoy គួរដើរទៅរក Riah ក្នុងទិសដៅណា?

#G3 ដើម្បីជៀសវាងតំបន់ថ្មដ៏គ្រោះថ្នាក់ ទូកមួយបានចរដូចបង្ហាញក្នុងដ្យាក្រាម។

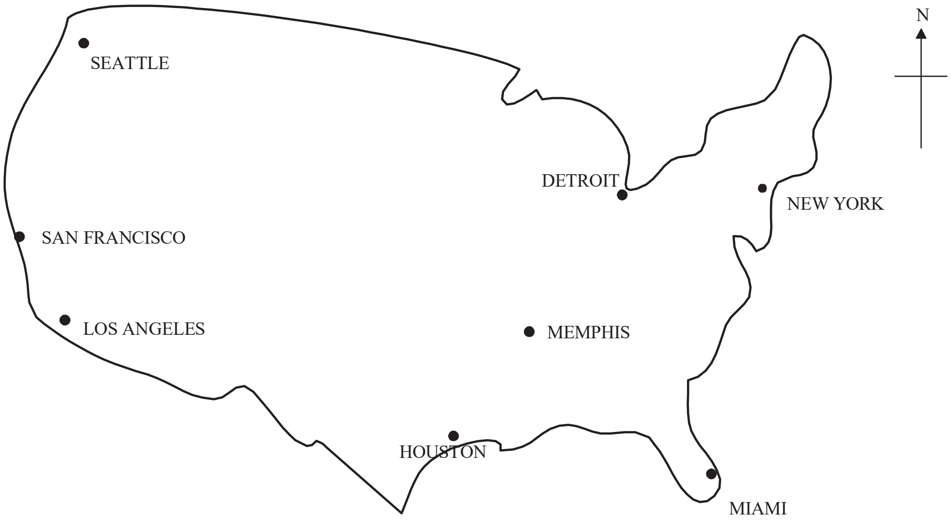


(a) ចូររកទិសដៅរបស់ទូក នៅពេលវាចរពីចំណុច

(i) A ទៅ B (ii) B ទៅ C (iii) C ទៅ D

(b) តើទូកត្រូវធ្វើដំណើរទៅឆ្ងាយប៉ុន្មានទៀត ដើម្បីគេចពីថ្ម?

#G4 គំនូសព្រាងផែនទីរបស់សហរដ្ឋអាមេរិកបង្ហាញដូចរូបខាងក្រោម៖



ចូររកទិសដៅរបស់រដ្ឋ :

(a) Miami គិតពី Memphis.

(b) Detroit គិតពី New York

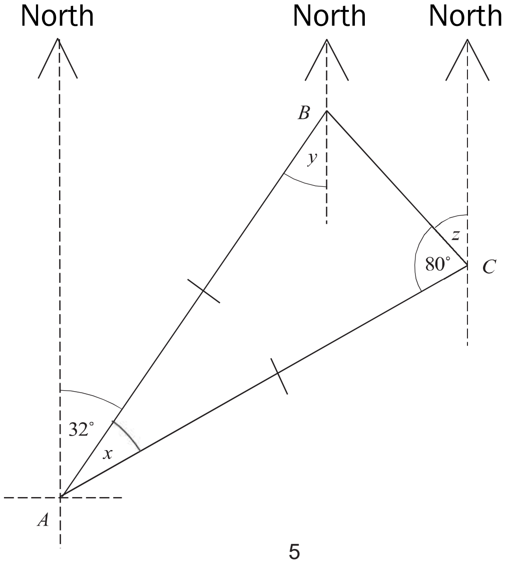
(c) Los Angeles គិតពី Detroit.

(d) Seattle គិតពី Houston

(e) Memphis គិតពី San Francisco.

#G5 កប៉ាល់មួយបើកពីចំណុច A ទៅចំណុច B ចម្ងាយ 8000 m ខាងកើត A។ បន្ទាប់មកវាបើកក្នុងទិសដៅផ្សេងទៀត ហើយមកដល់ចំណុច C ចម្ងាយ 10 000 m ក្នុងទិស SE នៃ A។ តើកប៉ាល់នេះបើកនៅដំណាក់កាលទីពីរក្នុងទិសដៅណា? ហើយតើវាបានធ្វើដំណើរទៅឆ្ងាយប៉ុណ្ណា?

#G6



ដ្យាក្រាមខាងលើ បង្ហាញទីតាំងរបស់ចំណុចបី A, B និង C។ យក AB = AC ។

(a) (i) គណនារង្វាស់មុំ x

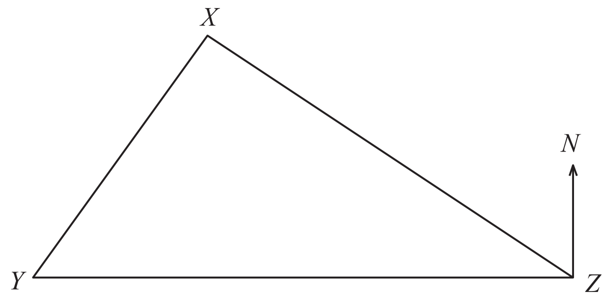
(ii) ពន្យល់តើហេតុអ្វីមុំ y មានរង្វាស់ស្មើ 32° ?

(iii) ចូរគណនារង្វាស់មុំ z?

(b) ដោយប្រើចម្លើយក្នុងសំណួរ (a) ចូរគណនាទិសដៅរបស់ចំណុច

(i) C ធៀបនឹង A (ii) A ធៀបនឹង B (iii) B ធៀបនឹង C

#G6 រូបខាងក្រោម តំណាងឱ្យការធ្វើដំណើររបស់យន្តហោះដែលហោះចេញពីទីក្រុង Y ទៅទីក្រុង X ហើយបន្ទាប់មកពីទីក្រុង X ទៅទីក្រុង Z ។ គេដឹងថា៖



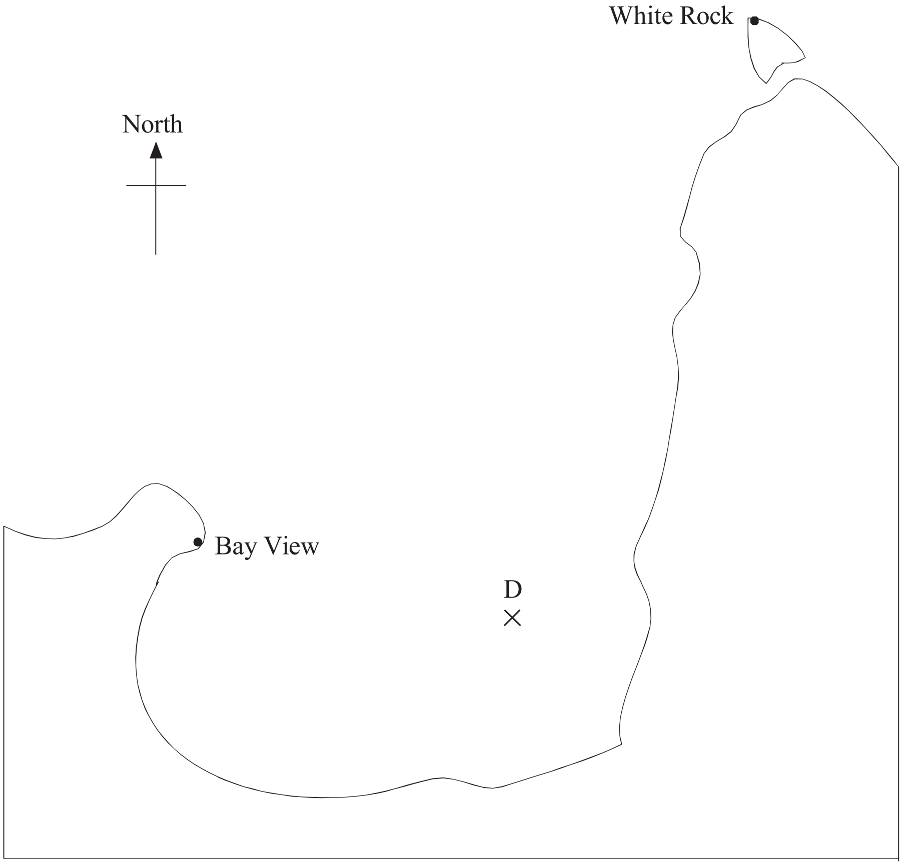
- ទិសដៅរបស់ចំណុច X ធៀបនឹង Y គឺ 035°
- ទិសដៅរបស់ចំណុច Z ធៀបនឹង X គឺ 125°
- ទីតាំង Z គឺនៅខាងកើត Y

(a) ចូរបំពេញតារាងឱ្យបានត្រឹមត្រូវ ដោយបង្ហាញទិសដៅ 035° និង 125°

(b) ចូរកំណត់រង្វាស់មុំ YXZ ?

(c) ចូរកំណត់រង្វាស់មុំ XZY ?

#G7 ដ្យាក្រាមខាងក្រោម បង្ហាញពីច្រកមួយ ដែលទូកកប៉ាល់ត្រូវបានចត។ ដ្យាក្រាមនេះ មានមាត្រដ្ឋាន 5 cm តំណាង 1 km ។



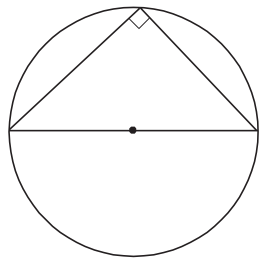
(a) កប៉ាល់របស់ពូសំ បានចតនៅទីតាំង D។ ចូរកំណត់ទិសដៅរបស់កប៉ាល់នេះ ធៀបនឹងទីតាំង Bay View ?

(b) កប៉ាល់របស់មីងស៊ីនួន បានចតចម្ងាយ 1.2 km ពីទីតាំង White Rock ក្នុងទិសដៅ 210° ។ ចូរគូសដ្យាក្រាម និងដៅទីតាំងរបស់កប៉ាល់នេះ?

2. មុំ និង រង្វង់ : ផ្នែកទី1

ចំពោះរង្វង់ទូទៅ គេមានលទ្ធផលៈ

- បើត្រីកោណមួយត្រូវបានគូសលើពាក់កណ្ដាលរង្វង់ ដូចក្នុងរូប នោះមុំនៅលើរង្វង់ គឺជាមុំកែង ។



សម្រាយបញ្ជាក់.

គូសអង្កត់ភ្ជាប់ផ្ចិត O ទៅចំណុច P នៅលើរង្វង់

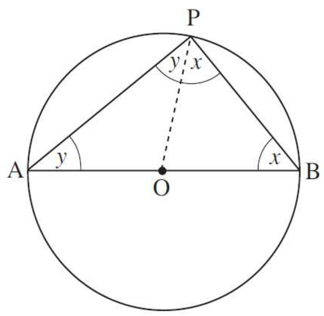
ដោយ OB = OP គេបាន

មុំ OBP = មុំ OPB (តាង x)

ម្យ៉ាងទៀត ត្រីកោណ AOP ជាត្រីកោណសមបាត នោះ

មុំ OAP = មុំ APO (តាងដោយ y)

ក្នុងត្រីកោណ ABP គេបាន



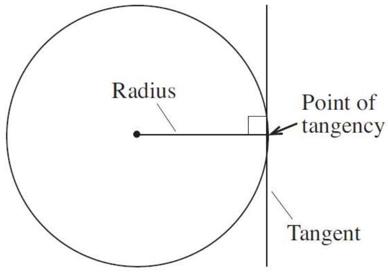
$$y + x + (x + y) = 180°$$

$$2x + 2y = 180°$$

$$x + y = 90°$$

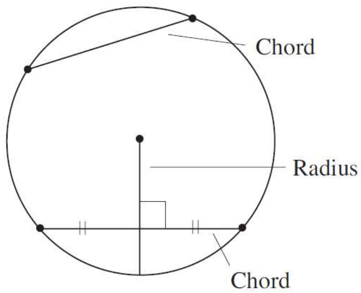
តែ មុំ APB = x + y ដូច្នេះវាជាមុំកែង។

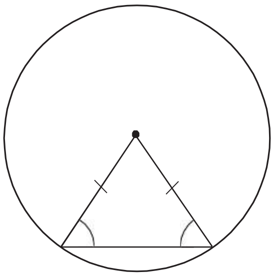
- បន្ទាត់ប៉ះ (*tangent*) ជាបន្ទាត់មួយប៉ះរង្វង់ ត្រង់មួយចំណុច ហើយកែងទៅនឹងកាំរង្វង់ត្រង់ចំណុចនោះ ។ ចំណុចនេះ ហៅថា ចំណុចប៉ះ ។



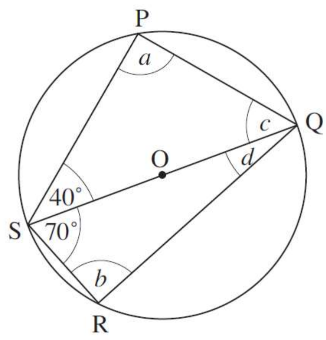
- អង្កត់ធ្នូ (chord) គឺជាអង្កត់មួយភ្ជាប់ពីរចំណុចនៅលើរង្វង់ ។

- មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់មួយ គឺជាបន្ទាត់ដែលចែកអង្កត់នោះជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា និងកែងទៅនឹងអង្កត់នោះ ។ *មេដ្យាទ័ររបស់អង្កត់ធ្នូ*មួយ គឺជាកាំរបស់រង្វង់នេះ ។





- នៅពេលចំណុចចុងនៃអង្កត់ធ្នូ ត្រូវគូសភ្ជាប់ទៅផ្ចិតរបស់រង្វង់ នោះគេសង់បានត្រីកោណសមបាតមួយ។ ដូច្នេះ មុំទាំងពីរ ដូចក្នុងរូប ជាមុំស្មើគ្នា។



Example 1. ចូរគណនាមុំ a, b, c និង d ក្នុងរូប O គឺជាផ្ចិតរបស់រង្វង់នេះ?

ចម្លើយ. គេបានមុំ a និង មុំ b ស្មើ 90°

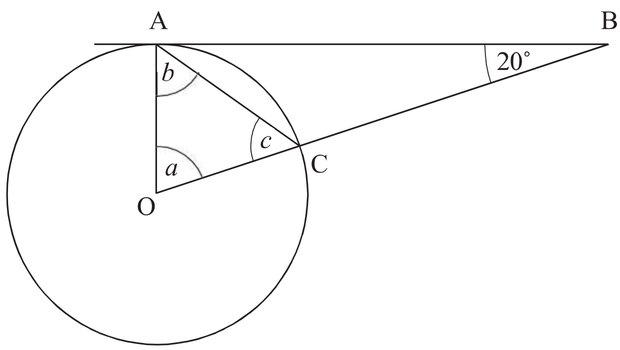
- ក្នុងត្រីកោណ PQS :

$$\begin{aligned} 40^\circ + 90^\circ + c &= 180^\circ \\ c &= 180^\circ < 130^\circ \\ &= 50^\circ \end{aligned}$$

- ក្នុងត្រីកោណ QRS :

$$\begin{aligned} 70^\circ + 90^\circ + d &= 180^\circ \\ d &= 180^\circ < 160^\circ \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

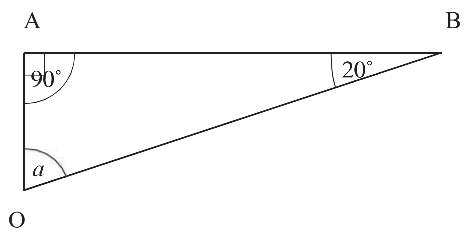
Example 2. ចូរគណនាមុំ *a*, *b* និង *c* បើ AB គឺជាបន្ទាត់ប៉ះ ហើយ O គឺជាផ្ចិតរបស់រង្វង់។



ចម្លើយ.

ពិនិត្យត្រីកោណ OAB។ ដោយ OA គឺជាកាំ ហើយ AB គឺជាបន្ទាត់ប៉ះ នោះគេបាន មុំ OAB = 90°។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} 90^\circ + 20^\circ + a &= 180^\circ \\ a &= 180^\circ < 110^\circ \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

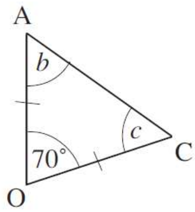


ក្នុងត្រីកោណ OAC ដោយ OA និង OC ជាកាំរបស់រង្វង់ នោះវាជាត្រីកោណសមបាត ដែល $b = c$

ដូច្នេះ $2b + 70° = 180°$

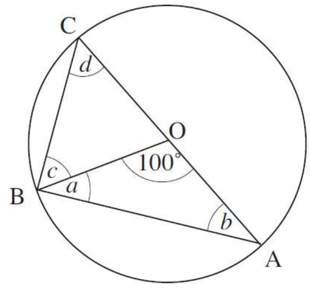
$2b = 110°$

$b = 55°$



ហើយ $c = 55°$

ឧទាហរណ៍ 2. ចូរគណនាមុំមានស្លាកដូចក្នុងរូប ដោយ O គឺជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។



ចម្លើយ.

- ពិនិត្យត្រីកោណ OAB៖

ដោយជ្រុង OA និង OB ជាកាំរង្វង់ នោះវាជាត្រីកោណសមបាត ដែល $a = b$

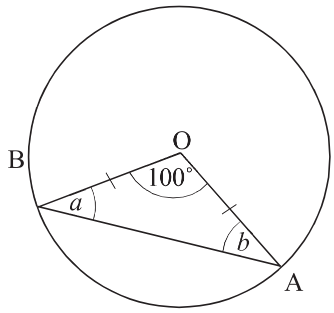
ដូច្នេះ

$$a + b + 100° = 180°$$

តែដោយ $a = b$,

$$2a + 100° = 180°$$
$$2a = 80°$$
$$a = 40°$$

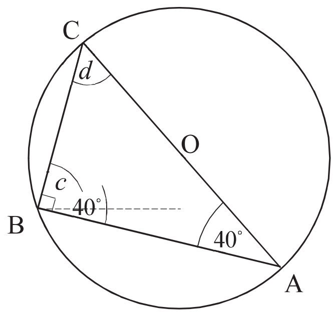
និង $b = 40°$



- ពិនិត្យត្រីកោណ ABC៖

ដោយបន្ទាត់ AC គឺជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់ នោះមុំ ABC ស្មើ 90° ។ ដូច្នេះ

$$a + c = 90°$$
$$40° + c = 90°$$
$$c = 50°$$



ដូច្នេះ

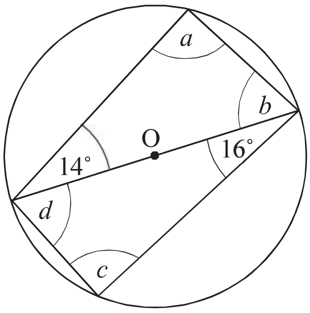
$$40° + 90° + d = 180°$$

គេបាន $d = 50°$

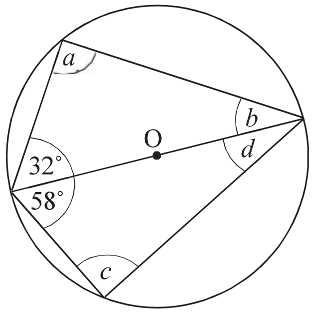
Practice No. 2

#G1. ចូររកមុំតាងដោយអក្សរ ដូចក្នុងរូបខាងក្រោម។ ក្នុងករណីនីមួយៗ យក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់។

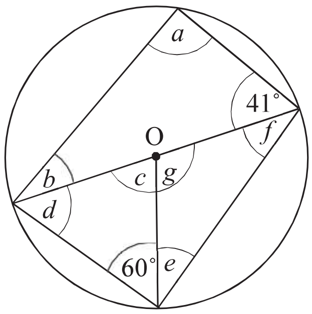
(a)



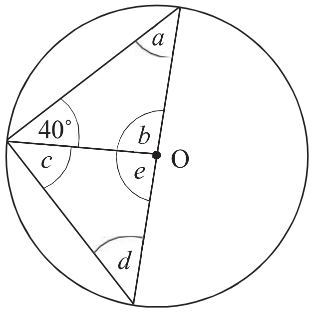
(b)



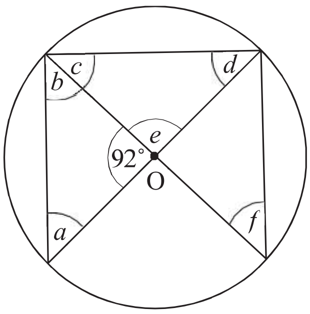
(c)



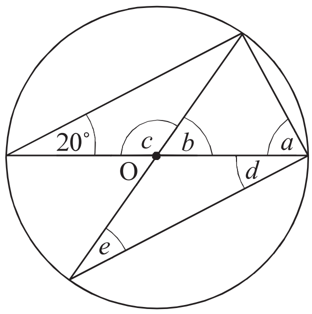
(d)



(e)

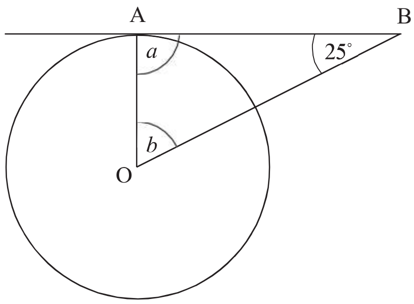


(f)



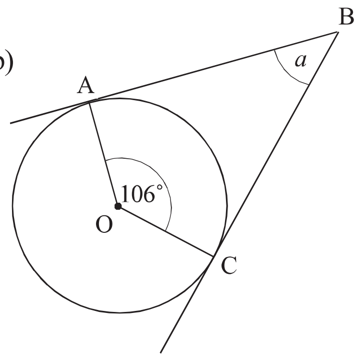
#G2. ចូររកមុំតាងដោយអក្សរ ដូចក្នុងរូបខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់។

(a)



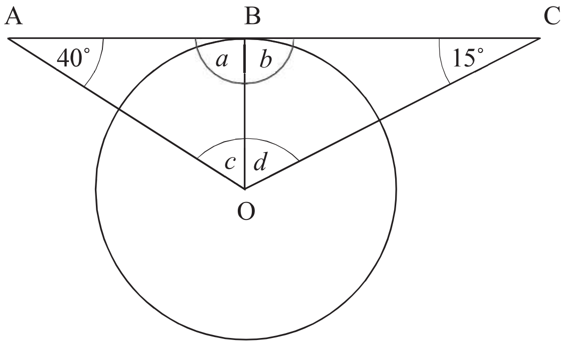
AB ជាបន្ទាត់ប៉ះ

(b)



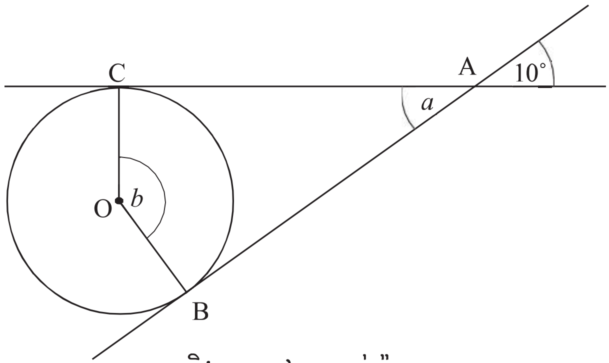
AB និង BC ជាបន្ទាត់ប៉ះ

(c)



AC ជាបន្ទាត់ប៉ះ

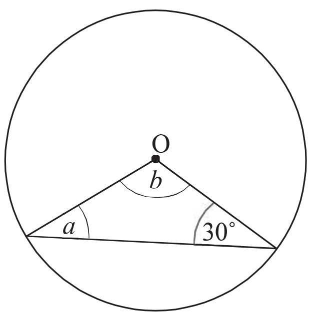
(d)



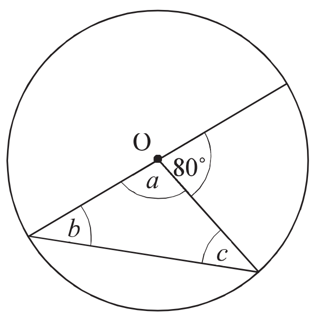
AB និង AC ជាបន្ទាត់ប៉ះ

#G3. ចូររកមុំតាងដោយអក្សរ ដូចក្នុងរូបខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។

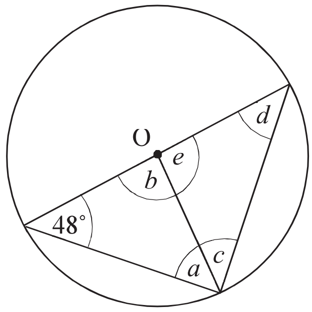
(a)



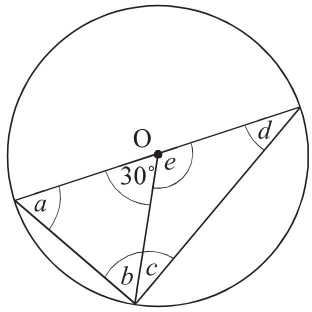
(b)



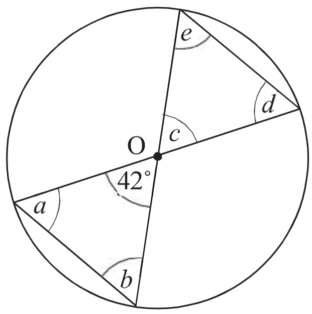
(c)



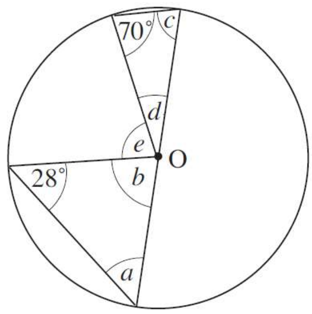
(d)



(e)

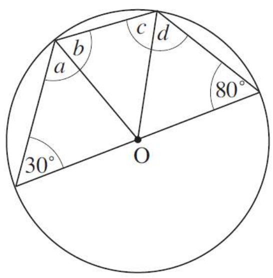


(f)

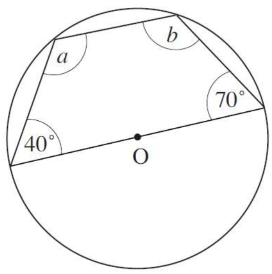


#G4. ចូររកមុំដែលតាងដោយអក្សរដូចក្នុងរូបខាងក្រោម បើ O គឺជាផ្ចិតរបស់រង្វង់៖

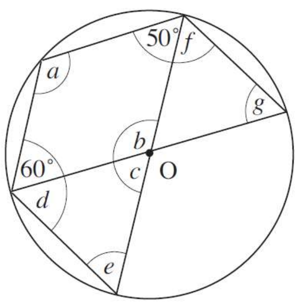
(a)



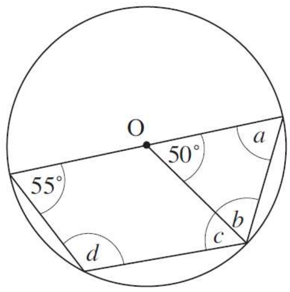
(b)



(c)

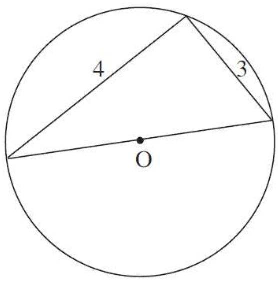


(d)

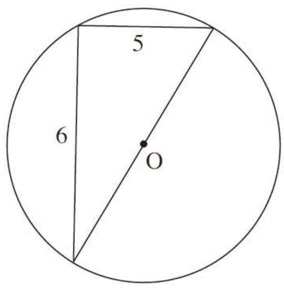


#G5. ចូររកអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់នីមួយៗខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់

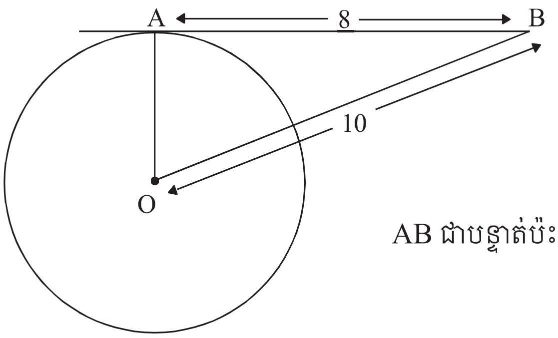
(a)



(b)

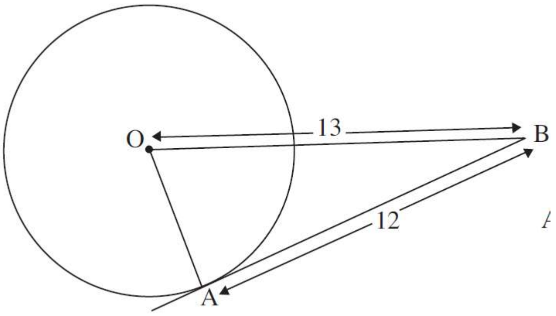


(c)



AB ជាបន្ទាត់ប៉ះ

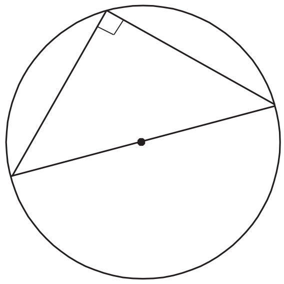
(d)



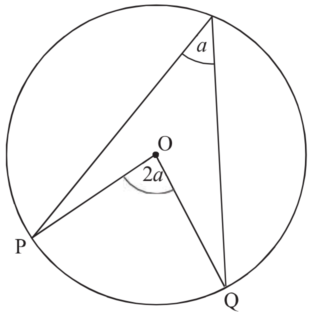
AB ជាបន្ទាត់ប៉ះ

3. មុំ និង រង្វង់ : ផ្នែកទី2

មុំដែលមានកំពូលស្ថិតនៅលើរង្វង់ ស្កាត់ដោយអង្កត់ធ្នូ ជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់ គឺជាមុំកែង ។



មុំពីរស្កាត់ដោយធ្នូតែមួយ ។ មុំដែលមានកំពូលស្ថិតនៅត្រង់ផ្ចិត ត្រូវធំជាង២ដង មុំដែលមានកំពូលស្ថិតនៅលើរង្វង់ ។



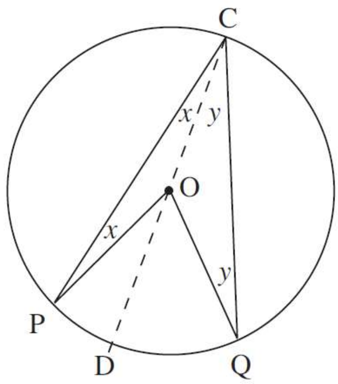
សម្រាយ. គេមាន

OP = OC ដូច្នេះ

មុំ CPO = មុំ PCO (តាងដោយ x)

ដូចគ្នា

មុំ CQO = មុំ QCO (តាង y).



ដោយបន្លាយអង្កត់ CO កាត់រង្វង់ត្រង់ D គេបាន

$$\text{មុំ POD} = x + x = 2x$$

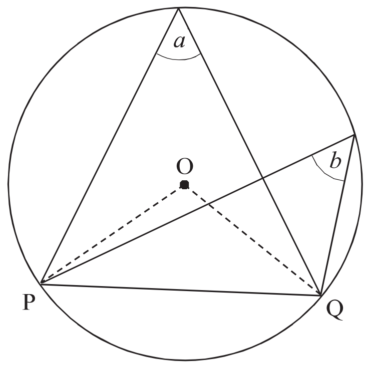
ដូចគ្នាដែរ

$$\text{មុំ QOD} = y + y = 2y$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\text{មុំ POQ} &= 2x + 2y \\ &= 2(x+y) \\ &= 2 \times \text{មុំ PCQ}\end{aligned}$$

មុំពីរមានកំពូលនៅលើរង្វង់មួយ ស្កាត់ដោយអង្កត់ធ្នូតែមួយ គឺជាមុំស្មើគ្នា។



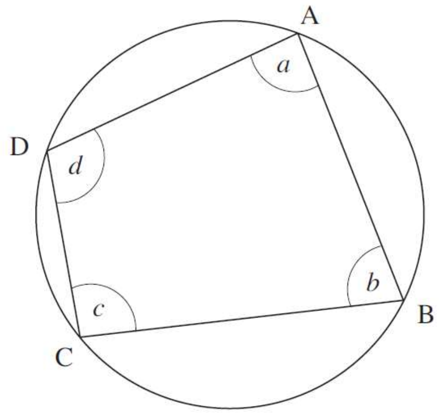
សម្រាយ.

មុំដែលមានកំពូលនៅត្រង់ផ្ចិត ស្មើ $2a$ ឬ $2b$ ។ ដូច្នេះ

$2a = 2b$ ឬ $a = b$ ។

ចំពោះចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ (*cyclic quadrilaterals*) គេបាន មុំឈមគ្នា មានផលបូកស្មើ 180° មានន័យថា

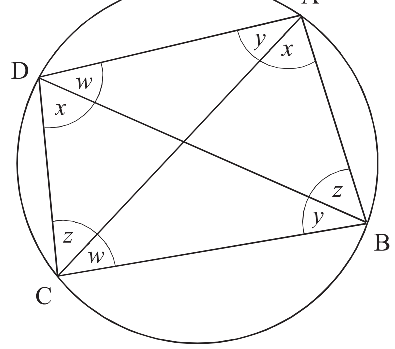
$$a + c = 180^\circ$$
និង
$$b + d = 180^\circ$$



សម្រាយ.

សង់អង្កត់ទ្រូង AC និង BD ។ តាងមុំ ដែលស្កាត់ដោយធ្នូ AB ដោយ w ។ ដូច្នេះ មុំ ADB = មុំ ACB $(= w)$

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះអង្កត់ធ្នូផ្សេងទៀត តាងមុំដោយ x, y និង z ។



ក្នុងត្រីកោណ ABD គេបាន

$$w + z + (x + y) = 180^\circ$$

សមមូល

$$(x + w) + (y + z) = 180^\circ$$

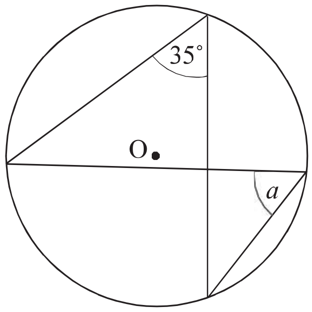
ដូច្នេះ

$$\text{មុំ CDA} + \text{មុំ CBA} = 180^\circ$$

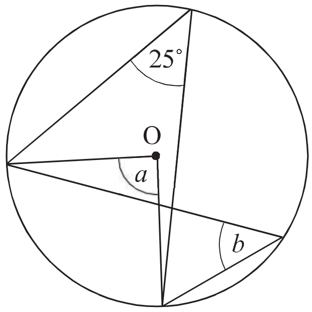
ឧទាហរណ៍ 1.

ចូររកមុំក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម និងយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។

(a)



(b)



ចម្លើយ.

(a) ដោយមុំទាំងពីរមានធ្នូស្កាត់តែមួយ ដូច្នេះមុំទាំងពីរត្រូវស្មើគ្នា។ គេបាន

$$a = 35°$$

(b) មុំ b និងមុំ $25°$ មានធ្នូស្កាត់ដូចគ្នា គេបាន

$$b = 25°$$

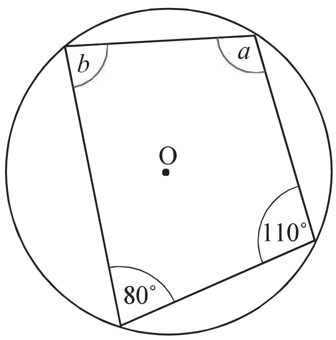
មុំ a មានកំពូលនៅត្រង់ផ្ចិត O ស្កាត់ដោយធ្នូដូចគ្នាជាមួយមុំ $25°$ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} a &= 2 \times 25° \\ &= 50° \end{aligned}$$

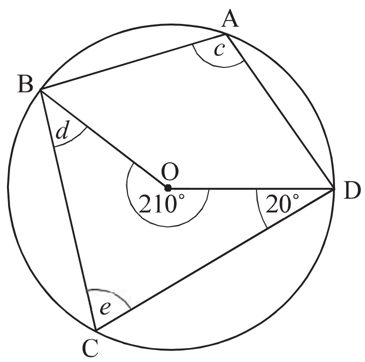
ឧទាហរណ៍ 2.

ចូររកមុំក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។

(a)



(b)



ចម្លើយ.

(a) ដោយមុំពីរឈមគ្នា នៅក្នុងចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ មានផលបូកស្មើ $180°$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned} a + 80° &= 180° \\ a &= 100° \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} b + 110° &= 180° \\ b &= 70° \end{aligned}$$

(b) ពិនិត្យមុំ c និងមុំ 210°៖ ដោយមុំមានកំពូលត្រង់ផ្ចិត មានរង្វាស់២ដងធំជាងមុំមានកំពូលលើរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូតែមួយ គេបាន

$$\begin{aligned} 2c &= 210^\circ \\ c &= 105^\circ \end{aligned}$$

មុំ c និងមុំ e មានផលបូកស្មើ 180° ព្រោះវាជាមុំឈមគ្នានៅក្នុងចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ គេបាន

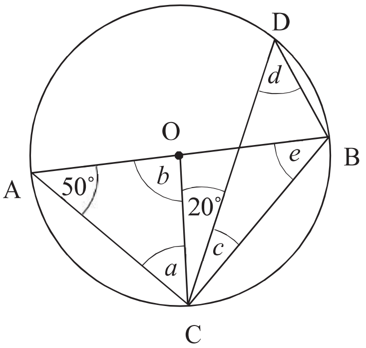
$$\begin{aligned} c + e &= 180^\circ \\ 105^\circ + e &= 180^\circ \\ e &= 180^\circ < 105^\circ \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

ពិនិត្យចតុកោណ BODC ៖ មុំក្នុងចតុកោណមានផលបូកស្មើ 360° គេបាន

$$\begin{aligned} d + e + 210^\circ + 20^\circ &= 360^\circ \\ d &= 360^\circ < 210^\circ < 20^\circ < e \\ &= 130^\circ < c \\ &= 130^\circ < 75^\circ \\ &= 55^\circ \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 3.

ក្នុងដ្យាក្រាម បន្ទាត់ AB គឺជាអង្កត់ផ្ចិត និងចំណុច O គឺជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។ ចូររកមុំតាងអក្សរដូចក្នុងរូប



ចម្លើយ.

ពិនិត្យត្រីកោណ OAC៖ ដោយ OA និង OC ជាកាំ នោះ OAC គឺជាត្រីកោណសមបាត។ ដូច្នេះ $a = 50^\circ$ ។

ដូច្នេះចំពោះត្រីកោណ OAC គេបាន

$$\begin{aligned} a + b + 50^\circ &= 180^\circ \\ b &= 180^\circ < 50^\circ < a \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

ដោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់ នោះ ACB ជាមុំកែង។ គេបាន

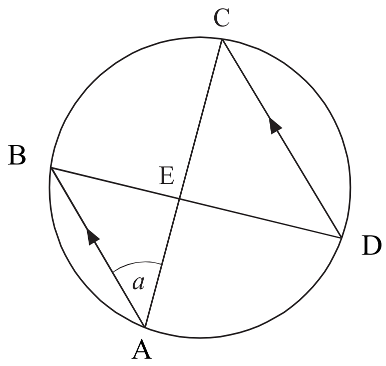
$$\begin{aligned} a + 20^\circ + c &= 90^\circ \\ c &= 90^\circ < 20^\circ < a \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

មុំ d និងមុំ OAC គឺជាមុំស្កាត់ដោយអង្កត់តែមួយ គេបាន d = មុំ OAC = 50° ។

ចំពោះមុំ e និងមុំ AOC គេបាន $b = 2e$ ។ ដូច្នេះ $e = 40°$ ។

ឧទាហរណ៍ 4.

ក្នុងដ្យាក្រាម អង្កត់ធ្នូ AB និង CD ស្របគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABE និងត្រីកោណ DEC ជាត្រីកោណសមបាត?



ចម្លើយ.

មុំ a និងមុំ BDC ស្កាត់ដោយអង្កត់តែមួយ គេបាន

មុំ BDC $= a$

ដោយ AB និង DC ស្របគ្នា នោះមុំ a និងមុំ ACD ស្មើគ្នា (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

មុំ ACD $= a =$ មុំ BDC

ដូច្នេះ ត្រីកោណ DEC មានមុំបាតត្រង់ C និង D ស្មើគ្នា។ ដូច្នេះ វាជាត្រីកោណសមបាត។

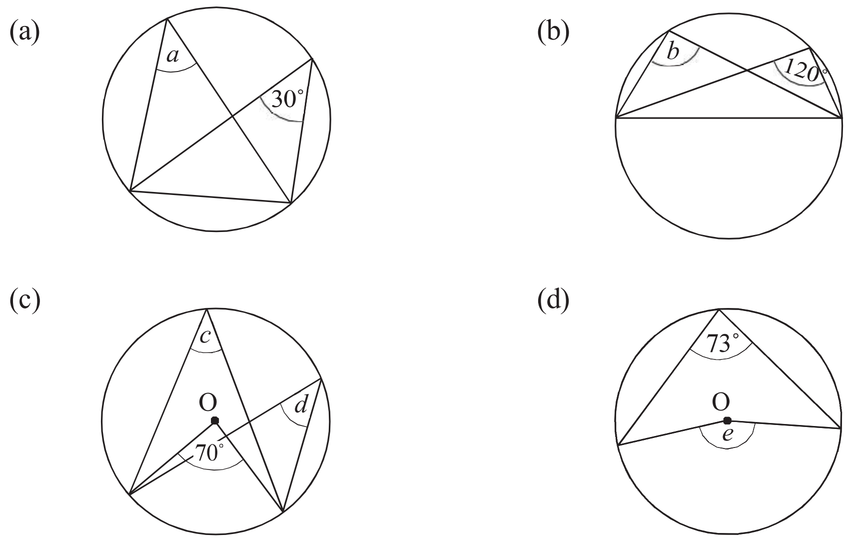
មុំ ABD ស្មើនឹងមុំ ACD ព្រោះវាស្កាត់ដោយអង្កត់តែមួយ គេបាន

មុំ ABD $=$ មុំ ACD $= a$

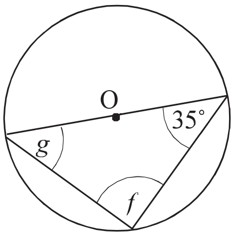
ដូច្នេះ ត្រីកោណ ABE ជាត្រីកោណសមបាត ព្រោះមុំបាតត្រង់ A និងត្រង់ B ស្មើគ្នា។

Practice No. 3

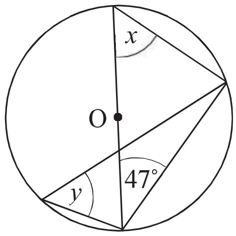
#G1. ចូរគណនាមុំតាងដោយអក្សរ ក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ។ ក្នុងករណីនីមួយៗ យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ ។ ចូរផ្តល់ហេតុផលឱ្យបានត្រឹមត្រូវ ។



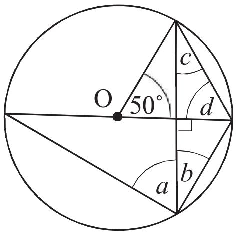
(e)



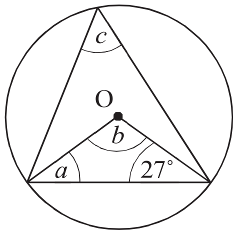
(f)



(g)



(h)

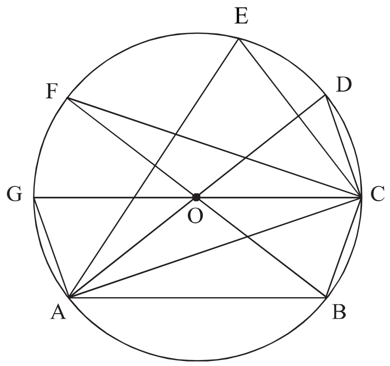


#G2. ក្នុងដ្យាក្រាម យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ និង AOD, BOF និង COG ជាអង្កត់ផ្ចិត។

(a) ចូររកមុំដែលស្មើគ្នា

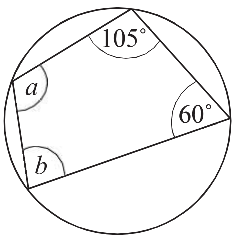
(b) ចូររកមុំកែង.

ដោយផ្ដល់ហេតុផលបានសមស្រប។

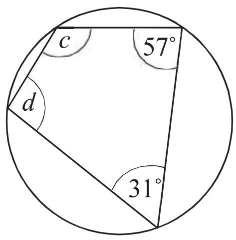


#G3. ចូររកមុំនៅក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ដោយផ្ដល់ហេតុផលបានត្រឹមត្រូវ។

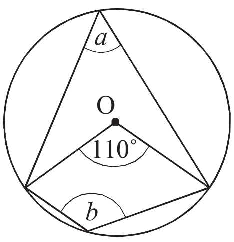
(a)



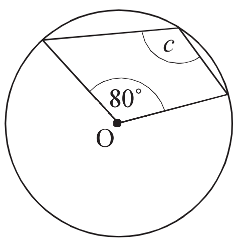
(b)



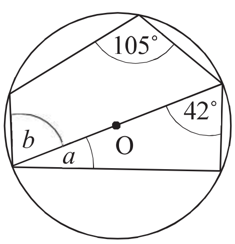
(c)



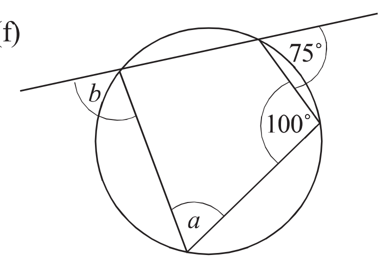
(d)



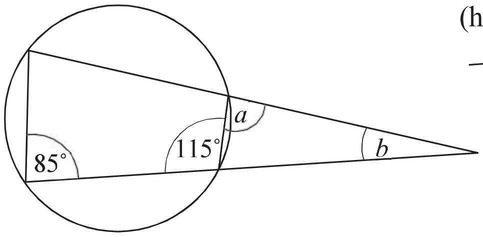
(e)



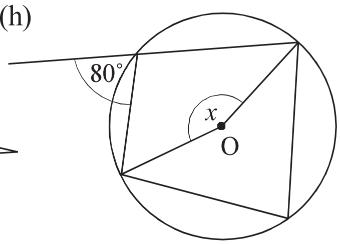
(f)



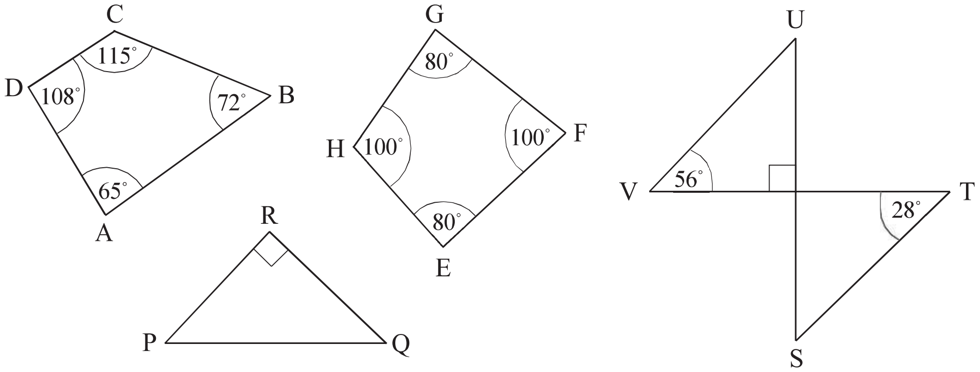
(g)



(h)

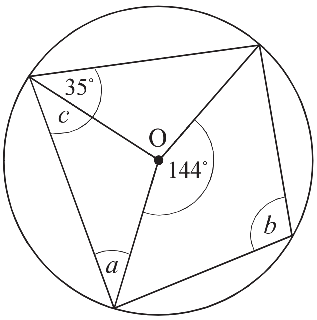


#G4. តើចំណុចណាខាងក្រោមដែលស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ?

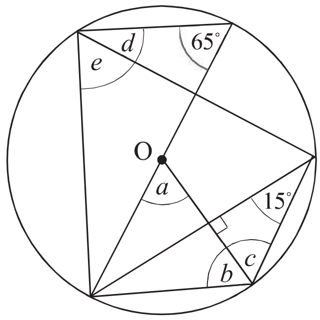


#G5. ចូររកមុំក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរង្វង់ ។

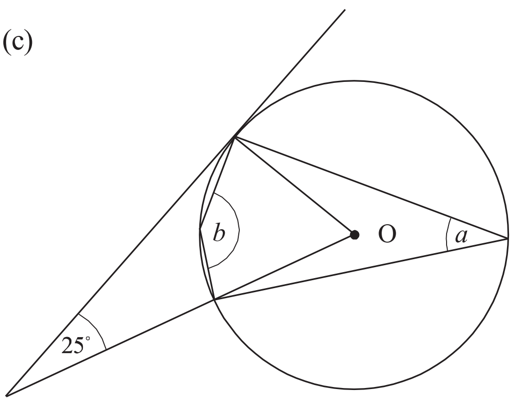
(a)



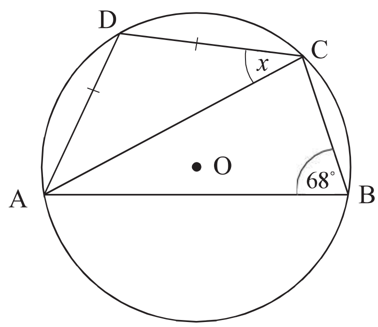
(b)



(c)



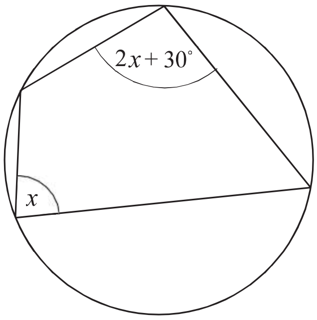
(d)



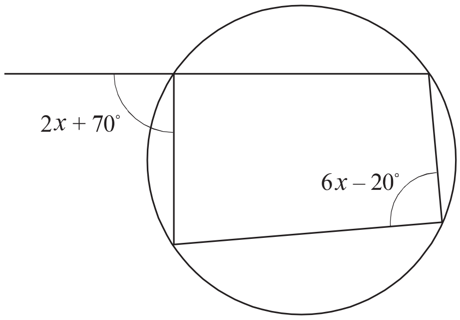
AD = DC

#G6. ចូររកតម្លៃ x ក្នុងដ្យាក្រាមនីមួយៗខាងក្រោម ។

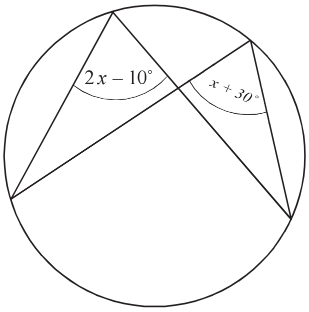
(a)



(b)

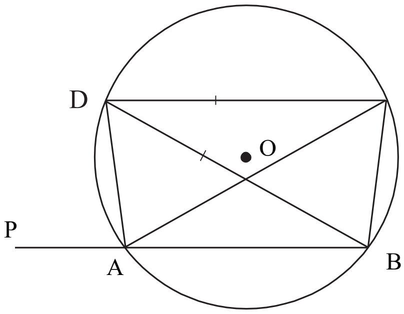


(c)

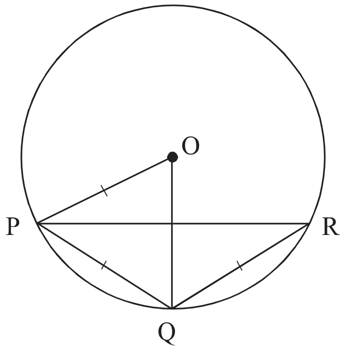


#G7. ក្នុងដ្យាក្រាម យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ ដែល $BD = DC$ និង PAB គឺជាបន្ទាត់ ។

ចូរបង្ហាញថា AD កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ CAP ?



#G8.



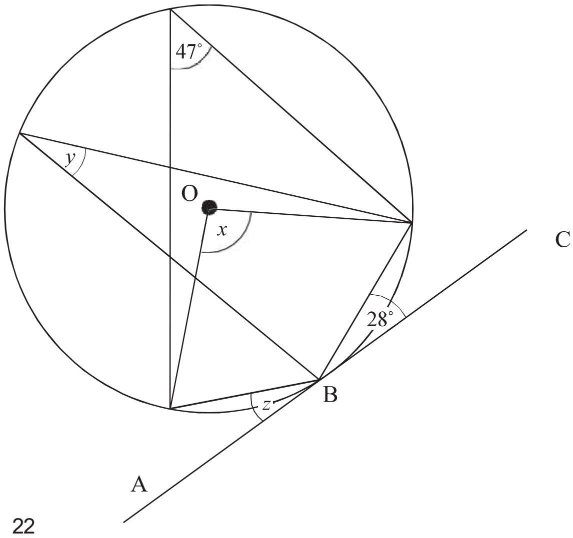
ក្នុងដ្យាក្រាម យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ ដែល

$OP = PQ = QR$

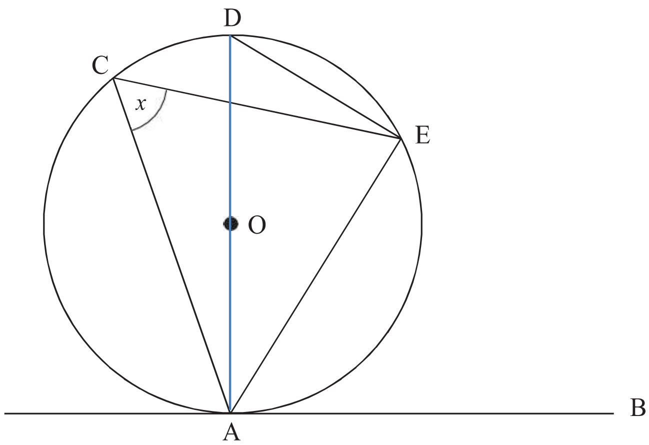
ចូរបង្ហាញថា OP និង QR ជាបន្ទាត់ស្របគ្នា ។

#G9. យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ ។ កំណាត់ ABC ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ B ។

ចូររកមុំ x, y និង z ។



#G10.

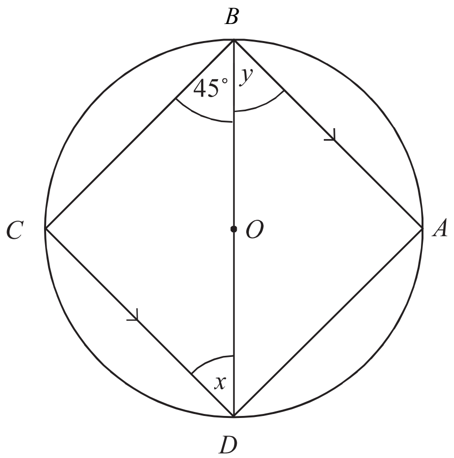


ក្នុងដ្យាក្រាម យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ AD អង្កត់ផ្ចិត និង AB ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ A និងកំណត់ មុំ ACE = $x°$។

ចូរគណនារង្វាស់មុំខាងក្រោម ជាអនុគមន៍នឹង x:

(a) មុំ ADE (b) មុំ DAE (c) មុំ EAB (d) មុំ AOE

#G7.

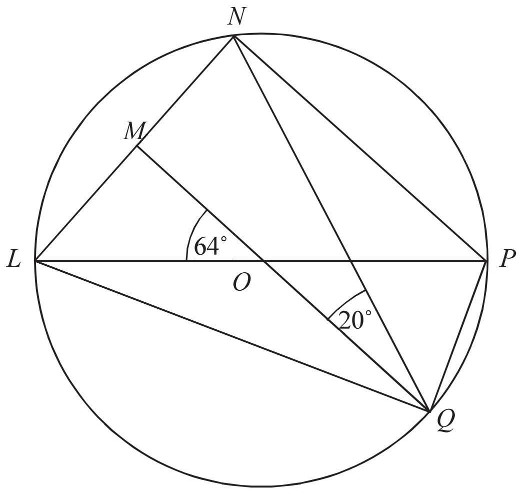


ក្នុងដ្យាក្រាមខាងលើ យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ កំណត់ BA ស្របនឹង CD និងមុំ CBD = 45°

a. ចូរគណនាតម្លៃ x និង y

b. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាការេ

#G8.



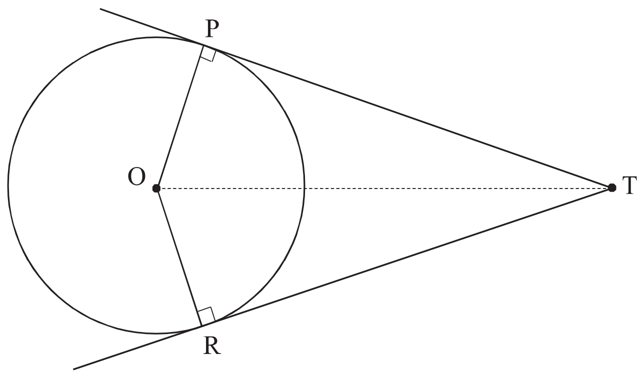
ក្នុងដ្យាក្រាមខាងលើ យករង្វង់ $LNPQ$ មានផ្ចិត O, មុំ $NQM = 20°$ និងមុំ $MOL = 64°$ ។

ចូរគណនារង្វាស់មុំ ខាងក្រោមគិតជាដឺក្រេ៖

a. OLQ
b. NQP
c. NLP
d. NPL

4. រង្វង់ និង បន្ទាត់ប៉ះ

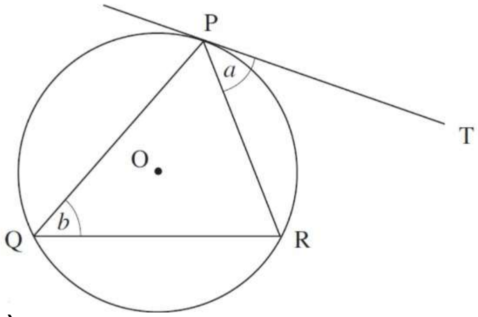
1. បើបន្ទាត់ប៉ះពីរ ដែលគូសចេញពីចំណុច T ទៅកាន់រង្វង់ដែលមានផ្ចិត O យក P និង R គឺជាចំណុចប៉ះរង្វង់ នោះដោយប្រើលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី៖



(a) PT = RT

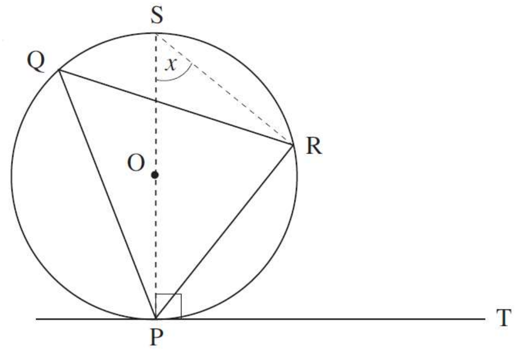
(b) ត្រីកោណ TPO និងត្រីកោណ TRO ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា ។

2. មុំរវាងបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ និងអង្កត់ធ្នូ ស្មើនឹងមុំមានកំពូលលើរង្វង់ ដែលស្កាត់ដោយអង្កត់ធ្នូនោះ ។
(i.e. $a = b$ ក្នុងរូប)



(Alternate Segment Theorem/tangent-chord theorem)

សម្រាយ.



សង់អង្កត់ផ្ចិត POS ។ គេមាន

មុំ $SRP = 90^\circ$

ព្រោះ PS ជាអង្កត់ផ្ចិត ។ ដូច្នេះ

មុំ PSR = មុំ $PQR = x^\circ$

ដូច្នេះ

មុំ $SPR = 180^\circ < 90^\circ < x$

តែ $= 90^\circ < x^\circ$

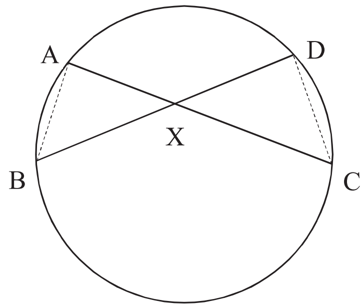
មុំ $RPT = 90^\circ < (\text{angle } SPR)$

$= 90^\circ < (90^\circ < x^\circ)$

$= x^\circ$

= មុំ PQR

3. ចំពោះអង្កត់ធ្នូពីរប្រសព្វគ្នា ដូចក្នុងរូប៖



$$\boxed{AX \times CX = BX \times DX}$$

សម្រាយ.

ក្នុងត្រីកោណ AXB និងត្រីកោណ DXC គេបាន

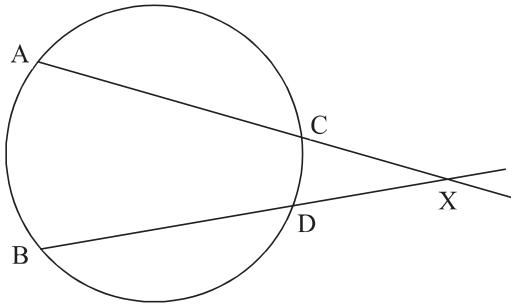
មុំ BAC = មុំ BDC

មុំ ABD = មុំ ACD

ដោយ AXB និង DXC ជាត្រីកោណដូចគ្នា គេបាន

$$\frac{AX}{BX} = \frac{DX}{CX} \Rightarrow AX.CX = BX.DX$$

ទ្រឹស្តីខាងលើ នៅតែពិតដដែល ពេលដែលបន្លាយនៃអង្កត់ធ្នូប្រសព្វគ្នានៅក្រៅរង្វង់ (មើលរូប)

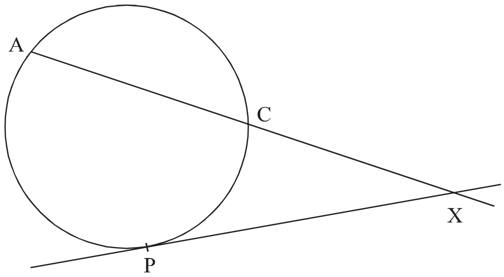


នៅពេលណាអង្កត់ធ្នូ BD ក្លាយជាបន្ទាត់ប៉ះ នោះចំណុច B និង D ត្រួតស៊ីគ្នាត្រង់ P ។ គេបាន

$$AX \times CX = PX \times PX$$

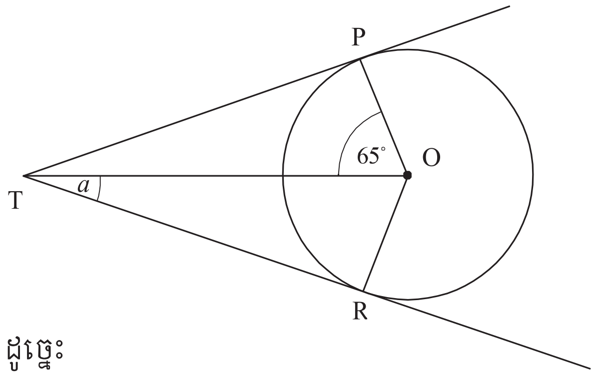
ឬ

$$\boxed{AX \times CX = PX^2}$$



ឧទាហរណ៍ 1.

ចូរគណនាមុំ a ក្នុងដ្យាក្រាម?



ចម្លើយ.

ត្រីកោណ TOR និង TOP ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា។ដូច្នេះ

$$\text{មុំ } TOR = 65^\circ$$

ដោយ TR ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ ហើយ OR ជាកាំ គេបាន

$$\text{មុំ } TRO = 90^\circ$$

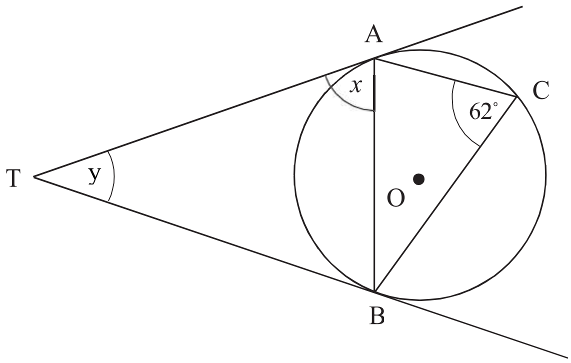
ដូច្នេះ

$$a = 180^\circ < 90^\circ < 65^\circ$$

$$= 25^\circ$$

ឧទាហរណ៍ 2.

ចូរគណនាតម្លៃ x និង y ក្នុងរូប?



ចម្លើយ.

តាមទ្រឹស្តីបទ **tangent-chord** ខាងលើ គេបាន

$$x = 62°$$

ដោយអង្កត់ TA និង TB មានរង្វាស់ស្មើគ្នា ដូច្នេះ ត្រីកោណ TAB គឺជាត្រីកោណសមាបាត។ គេបាន

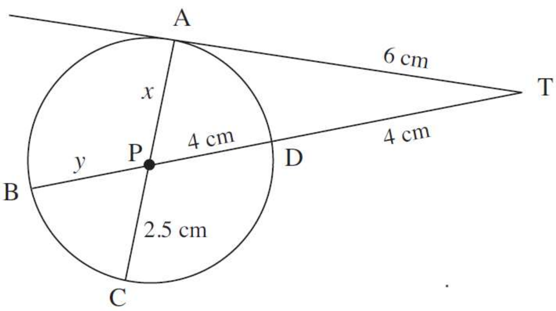
មុំ $\mathrm{ABT} = x = 62°$

ដូច្នេះ

$$y + 62° + 62° = 180°$$
$$y = 56°$$

ឧទាហរណ៍ 3.

ចូរគណនារង្វាស់ប្រវែង x និ y ដូចក្នុងរូប?



ចម្លើយ.

ដោយ AT ជាបន្ទាត់ប៉ះ គេបាន

$$AT^2 = BT.DT$$
$$36 = BT \times 4$$
$$BT = 9$$

ដូច្នេះ

$$y + 8 = BT = 9$$
$$y = 1\ \mathrm{cm}$$

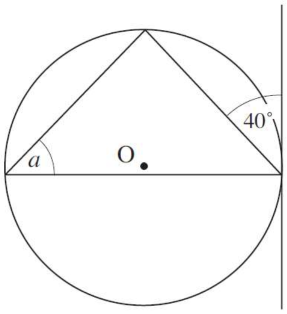
ដោយអង្កត់ធ្នូ AC និង BD ប្រសព្វគ្នា គេបាន

$$AP.PC = BP.PD$$
$$2.5x = 1 \times 4$$
$$x = 1.6\ \mathrm{cm}$$

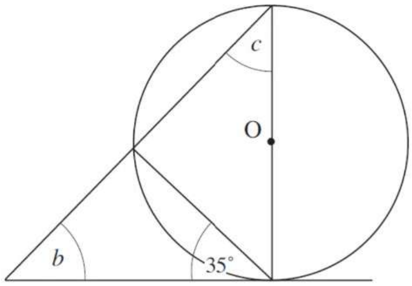
Practice No. 4

#G1. គណនាមុំក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ដោយយក O ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់។

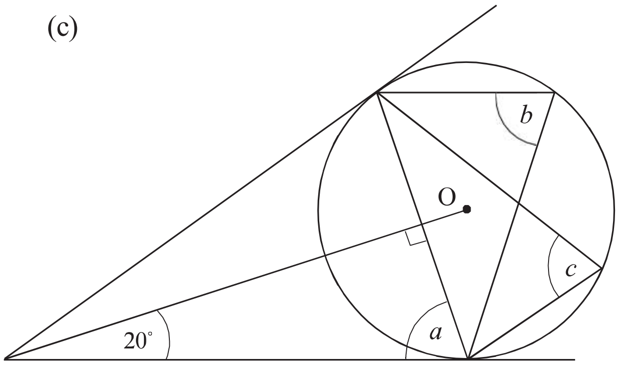
(a)



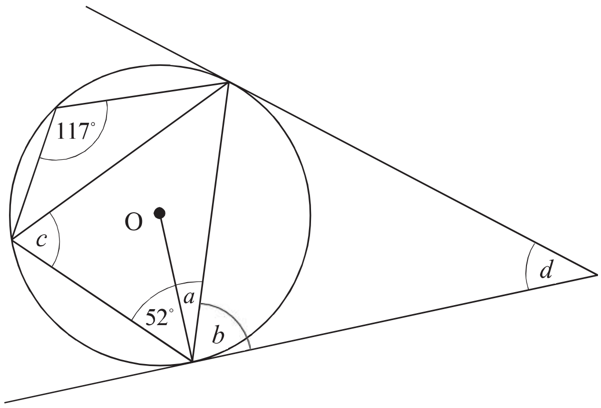
(b)



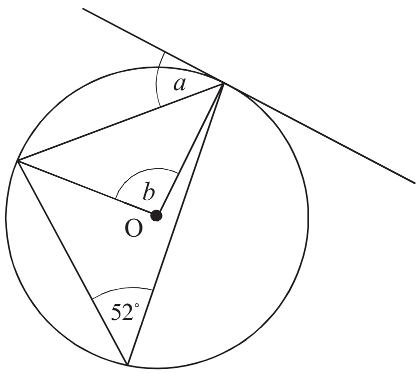
(c)



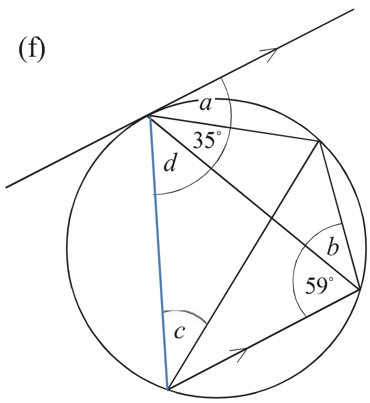
(d)



(e)

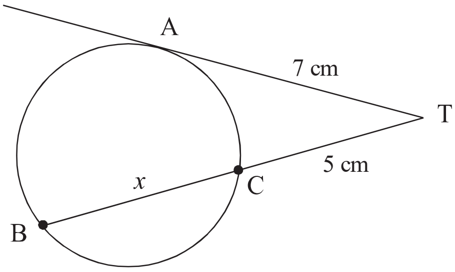


(f)

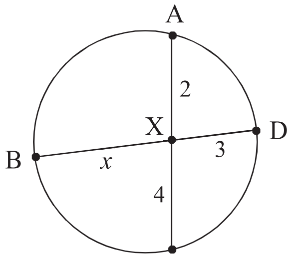


#G2. ចូរគណនារង្វាស់ប្រវែងក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

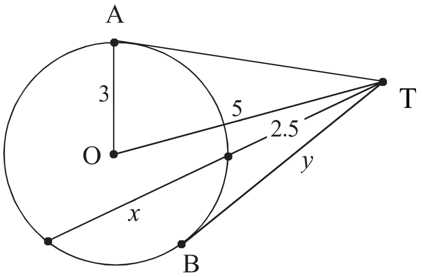
(a)



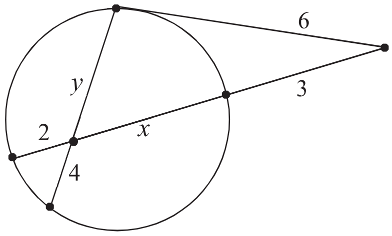
(b)



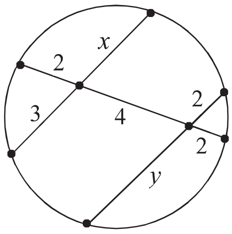
(c)



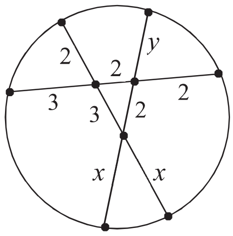
(d)



(e)



(f)



#G3. ក្នុងដ្យាក្រាម យក TAD ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

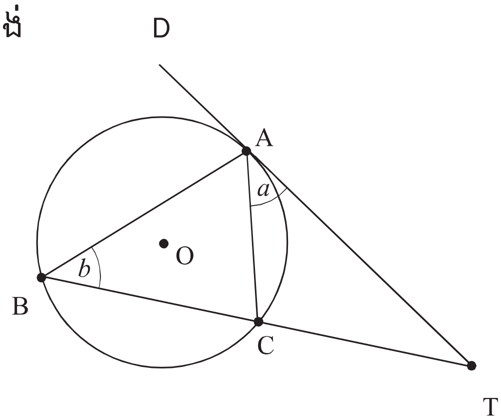
(a) បង្ហាញថា $a = b$

(b) បង្ហាញថា ត្រីកោណ BTA និង ACT ជាត្រីកោណដូច។

(c) បើ

$BC = 5$ cm
$CT = 4$ cm

ចូរគណនាប្រវែងអង្កត់ AT

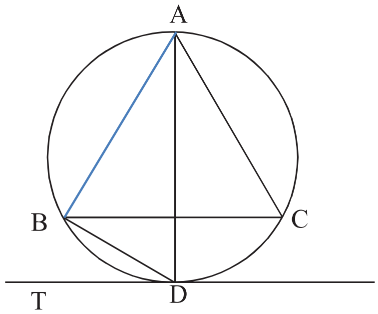


#G4. យកត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

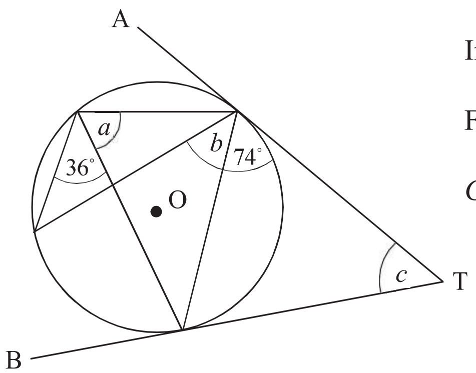
បន្ទាត់ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ BAC

(a) ចូរបង្ហាញថា បន្ទាត់ AD គឺជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់។

(b) ចូរគណនាមុំ BDT ដែល DT គឺជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់។



#G5.



In the diagram, TA and TB are tangents.

Find the angles *a*, *b* and *c*.

Give reasons for your answers.

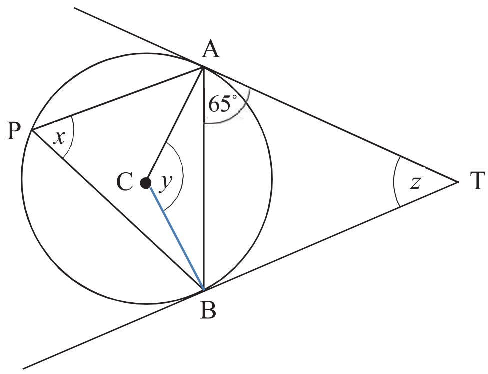
#G6. AT and BT are tangents to the circle, centre C.

P is a point on the circumference, as shown.

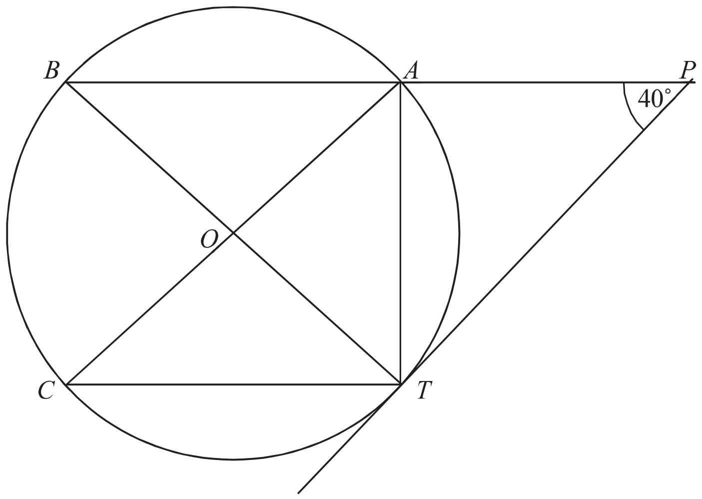
Angle BAT = 65°

Calculate the size of

(a) x (b) y (c) z



#G7.



In the diagram above, **not drawn to scale**, *ABCT* is a circle. *AC* and *BT* are diameters. *TP,* the tangent at *T,* meets *BA* produced at *P,* so that $\angle APT = 40°$.

Calculate, **giving reasons for all statements**, the size of

(a) $\angle$ BTP

(b) $\angle$ BAT

(c) $\angle$ ABT

(d) $\angle$ ACT

ជំពូក ៣

លំហអាហ្វីន

ដោយការសន្មតៈ លំហវិចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់ កំណត់លើកាយ $\mathbb{R}$ តាងដោយអក្សរធំដិត $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \ldots$ ដើម្បីញែកចេញពីសំណុំចំណុចទាំងឡាយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យ **លំហអាហ្វីន** ឬ **លំហអាហ្វីនរង** តំណាងដោយអក្សរផ្ចង់ $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$ ។ ដូចគ្នានេះដែរ ចំណុចតាងដោយអក្សរធំ $M, N, \ldots$ ហើយ វិចទ័រ ត្រូវប្រើសញ្ញា "ព្រួញ" ដូចជាៈ $\vec{u}, \vec{v} \ldots$ ។

៣.១ លំហអាហ្វីន - លំហរងអាហ្វីន

និយមន័យ ៣.១.

លំហអាហ្វីន (affine space) គឺជាសំណុំមិនទទេ $\mathcal{E}$ ដែលភ្ជាប់ជាមួយលំហវិចទ័រ $\mathbf{E}$ កំណត់លើកាយ $\mathbb{R}$ (ហៅថា "លំហទិសដៅ" តាងដោយ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) និងប្រមាណវិធីក្រៅ

$$\begin{aligned} \tilde{+} : \mathcal{E} \times \mathbf{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (P, \vec{u}) &\longmapsto \tilde{+}(P, \vec{u}) = P \tilde{+} \vec{u} \end{aligned}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ៈ

(i) គ្រប់ $P, Q \in \mathcal{E}$ មានវិចទ័រតែមួយគត់ $\vec{u} \in \mathbf{E}$ ដែល $Q = P \tilde{+} \vec{u}$ ។ (ក្រោយមក គេតាងវិចទ័រ $\vec{u}$ នេះដោយ $\overrightarrow{PQ}$)

(ii) គ្រប់ $P \in \mathcal{E}$ និងគ្រប់ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{E}$ គេបានៈ $P \tilde{+} (\vec{u} + \vec{v}) = (P \tilde{+} \vec{u}) \tilde{+} \vec{v}$ ។

សម្គាល់.

- យើងសន្មតជានិច្ច $\mathbf{E}$ ជាលំហវិុចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់ ដែលវិមាត្រនេះ ក៏ជាវិមាត្ររបស់លំហ $\mathcal{E}$ ដែរ ។ លំហ $\mathcal{E}$ ហៅថា លំហអាហ្វីនតាមទិសដៅ $\mathbf{E}$ ។ ធាតុរបស់ $\mathcal{E}$ ហៅថា ចំណុច ហើយធាតុរបស់ $\mathbf{E}$ ហៅថា វ៉ិចទ័រ ។

- យើងហៅថា **បន្ទាត់អាហ្វីន** និង **ប្លង់អាហ្វីន** ពេលណាលំហទិសដៅ $\mathbf{E}$ មានវិមាត្រ 1 និង 2 រៀងគ្នា។

- យើងតាង *ប្រមាណវិធីក្រៅ* ដោយសញ្ញា $(\tilde{+})$ សូមកុំច្រឡំជាមួយនឹងផលបូកនៃវ៉ិចទ័រ ដែលសញ្ញា $(+)$ ជា *ប្រមាណវិធីក្នុង* កំណត់លើលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ ។ តែដើម្បីងាយស្រួលសិក្សា ក្រោយមកយើងសន្មតតាងសញ្ញាណតែមួយគត់គឺ $(+)$ សម្រាប់ប្រមាណវិធីទាំងពីរៈ ក្នុង និង ក្រៅ។ ដូច្នេះ យើងសរសេរ $Q = P + \vec{u}$ ជំនួសឱ្យ $Q = P \tilde{+} \vec{u}$ ។

- តាមស្វ័យសត្យ (i) ខាងលើ គេទាញបានដោយសន្មតៈ $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ។ ដូច្នេះ គេសង្កេតបានៈ *(a) ចំណុចបូកវ៉ិចទ័រ បានចំណុច។ (b) ចំណុចដកចំណុច បានវ៉ិចទ័រ។ តែគេមិនអាចបូកចំណុចនិងចំណុច បានទេ។*

ទំនាក់ទំនងសាល.

- ចំពោះគ្រប់ចំណុច $A, B, C \in \mathcal{E}$ គេបានៈ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- គ្រប់ $M \in \mathcal{E}$ គេបានៈ $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ ។ ដូច្នេះ $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ មានន័យថាៈ $M + \vec{0} = M$ ។

និយមន័យ ៣.២.

យក $\vec{u} \in \mathbf{E}$ ។ គេកំណត់អនុគមន៍

$$\begin{array}{rccl} t_{\vec{u}}: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & P & \longmapsto & t_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u} \end{array}$$

ហៅថា *បម្លែងកិល* ចំណុច P តាមទិសដៅ $\vec{u}$ ។

ចំណាំ. អនុគមន៍ $t_{\vec{u}}$ ខាងលើ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ (i.e., ពេញ & ប្រកាន់) ។

លំហាត់ ១. គេឲ្យ $\mathcal{E}$ និង $\mathcal{F}$ ជាលំហអាហ្វីនពីរ មានវិមាត្រដូចគ្នា។ យកចំណុច $P_0 \in \mathcal{E}$ និង

$Q_0 \in \mathcal{F}$ ។ ចូរបង្ហាញថាមានអ៊ីសូម៉ូភីស φ ពីលំហ $\mathbf{E} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ ទៅលំហ $\mathbf{F} = \overrightarrow{\mathcal{F}}$ ដែលអនុគមន៍

$$\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \quad \text{កំណត់ដោយ} \quad P \mapsto Q_0 \,\tilde{+}\, \varphi\left(\overrightarrow{P_0P}\right)$$

ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយពី $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{F}$?

ឧទាហរណ៍ ៧.

១. យក $\mathbf{E}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រ។ គេអាចកំណត់ទម្រង់លំហអាហ្វីន តាមទិសដៅ $\mathbf{E}$ ខ្លួនវា ដោយ **ប្រមាណវិធីក្រៅ** : $\vec{u} \,\tilde{+}\, \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$ ។ ដូច្នេះ ស្វ័យសត្យ (i) ក្នុងនិយមន័យខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់។

២.

៣.

លំហអាហ្វីនរង

និយមន័យ ៣.៣.

គេឱ្យ $\mathbf{E}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រ និង $\mathbf{F}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររង ហើយកំណត់ $x_0 \in \mathbf{E}$ ។ គេបានសំណុំ

$$\mathcal{F} = x_0 + \mathbf{F}$$

មានទម្រង់ជាលំហអាហ្វីនតាមទិសដៅរបស់លំហវ៉ិចទ័ររង $\mathbf{F}$ ដែលប្រមាណវិធីក្រៅនៅក្នុង $\mathbf{F}$ ដូចគ្នានឹងប្រមាណវិធីក្នុងរបស់ $\mathbf{E}$ ។ គេថា $\mathcal{F}$ គឺជា **លំហអាហ្វីនរង** របស់ E ។

សម្គាល់.

- លំហអាហ្វីនរង $\mathcal{F}$ គឺជាសំណុំចំណុច បានមកដោយបូកបន្ថែមវ៉ិចទ័ររបស់លំហវ៉ិចទ័ររង $\mathbf{F}$ ទៅនឹងចំណុចគល់ $x_0 \in \mathbf{E}$ ។ ទិសដៅរបស់សំណុំចំណុចនេះ គឺជាលំហរង $\mathbf{F}$ ខ្លួនឯង។ វិធីដែលយើងបូកផ្គុំវ៉ិចទ័រ (ដូចជា គុណនឹងស្កាលែរជាដើម) គឺដូចគ្នានឹងប្រមាណវិធីទាំងឡាយរបស់លំហវ៉ិចទ័រទិសដៅ $\mathbf{E}$ ដែរ។ មានន័យថា៖ ប្រមាណវិធីក្រៅ នៅក្នុង $\mathbf{F}$ គឺដូចគ្នាបេះបិទទៅនឹង ប្រមាណវិធីក្នុង របស់ $\mathbf{E}$។

- វាជាគំនិតទូទៅនៃការបង្កើត បន្ទាត់ ឬ ប្លង់ នៅក្នុងលំហអឺគ្លីដ ដោយមិនគិតពីសញ្ញាណនៃចម្ងាយ ឬ មុំ នោះឡើយ។

សំណើ. បើ $\mathcal{F}_1$ និង $\mathcal{F}_2$ គឺជាលំហអាហ្វីនរងពីររបស់លំហ $\mathcal{E}$ នោះ $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ អាចស្មើទទេ ឬជាលំហអាហ្វីនរងមួយ ដែលមានទិសដៅ $\overrightarrow{\mathcal{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}_2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់.

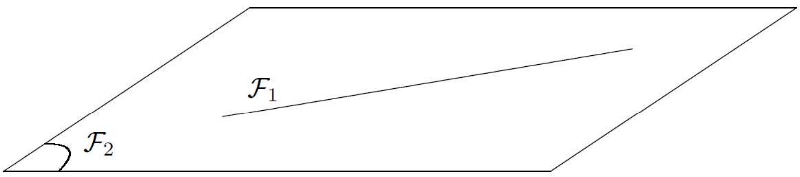
និយមន័យ ៣.៤.

គេឱ្យ $\mathcal{F}_1$ និង $\mathcal{F}_2$ ជាលំហអាហ្វីនរងពីររបស់លំហ $\mathcal{E}$ ។ គេថា $\mathcal{F}_1$ ស្របនឹង $\mathcal{F}_2$ គេសរសេរ $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ បើលំហទិសដៅ $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ ។

សម្គាល់.

- ទំនាក់ទំនង $\parallel$ គ្មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីទេ (ឧ. បន្ទាត់អាហ្វីន ដែលស្របទៅនឹងប្លង់អាហ្វីនណាមួយ ដែលផ្ទុកបន្ទាត់នេះ)។

- ទំនាក់ទំនង $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ គឺគ្មានលក្ខណៈចាំបាច់ ឬគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីឱ្យបាន $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ឡើយ។



លំហាត់ ២. សន្មត $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$ ឬ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ។

លំហាត់ ៣. បើ A និង B គឺជាចំណុចពីរផ្សេងគ្នាក្នុង $\mathcal{E}$ ចូរបង្ហាញថា មានលំហអាហ្វីនរងតែមួយគត់របស់លំហ $\mathcal{E}$ មានវិមាត្រ 1 (គឺជាបន្ទាត់ affine) ដែលកាត់តាមចំណុច A និង B ។ គេតាងដោយ (AB) ។

និយមន័យ ៣.៥.

បើលំហទិសដៅ $\mathbf{E}$ គឺជាលំហអឺគ្លីដ (ជាលំហបំពាក់ដោយណម) និងបើ (D) គឺជាបន្ទាត់ក្នុង $\mathcal{E}$ នោះបន្ទាត់ (D) មានវ៉ិចទ័រទិសដៅតែពីរប៉ុណ្ណោះ ដែលមានណមស្មើ 1 ។ បើយើងជ្រើសរើសយកវ៉ិចទ័រមួយ $\vec{u}$ ដើម្បីកំណត់ទិសរបស់បន្ទាត់ (D) នោះគេអាចកំណត់ចម្ងាយ

ពិជគណិត រវាងគូចំណុច (A,B) របស់ $(D)\times(D)$ តាងដោយ $\overline{AB}$ ដែល

$$\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\,.\,\vec{u}$$

It is important to understand that this algebraic distance is not an intrinsic quantity: we need the orientation of D by $\vec{u}$.

៣.១.១ តម្រុយអាហ្វីន

និយមន័យ ៣.៦.

- គេហៅ តម្រុយកាតេសៀន ឬ តម្រុយដេកាត (ឬ តម្រុយអាហ្វីន) តាង $\mathcal{R}=(P_0,f_1,\cdots,f_k)$ របស់លំហអាហ្វីន $\mathcal{E}$ បើមានចំណុច $P_0\in\mathcal{E}$ និងគោល $(f_1,\ldots,f_k)$ របស់លំហវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ ។
- កូអរដោនេរបស់ចំនុច $M\in\mathcal{E}$ នៅក្នុងតម្រុយនេះគឺជា ស្កាលែរ $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖
$$\overrightarrow{P_0M}=\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_kf_k$$
គេតាងកូអរដោនេរបស់ចំណុច $M\in\mathcal{E}$ ដោយ $M(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)_{\mathcal{R}}$ ឬដើម្បីងាយស្រួល តាងដោយ $M(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ ។

សម្គាល់.

- យើងត្រូវបែងចែកការសរសេរ $M=(x_0,y_0)$ មានន័យថា M គឺជាធាតុរបស់លំហ $\mathbb{R}^2$ ហើយការសរសេរ $M(x_0,y_0)$ មានន័យថា M មានកូអរដោនេ (x_0,y_0) ក្នុងតម្រុយដេកាតណាមួយ ក្នុងលំហអាហ្វីន ដែលមិនចាំបាច់ជាលំហ $\mathbb{R}^2$ នោះទេ។
- ការតាងទូទៅ៖ បើស្គាល់គោល $\mathcal{B}=(f_1,\ldots,f_k)$ របស់លំហ $\mathbf{E}$ នោះការតាងវ៉ិចទ័រ

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\quad\text{មានន័យថា}\quad \vec{u}=\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_kf_k$$

តែជាទូទៅ គេបំភ្លេចសំណេរ $\mathcal{B}$ ចោល ។

លំហាត់ ៤. គេអោយតម្រុយ $\mathcal{R} = (P_0, \mathcal{B})$ ដែល $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយរបស់លំហ $\mathbf{E}$ និងយកចំណុច $A\left(x_1, \cdots, x_n\right)_{\mathcal{R}}$ និង $B\left(y_1, \ldots, y_n\right)_{\mathcal{R}}$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

អនុវត្តន៍. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយ ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រ និងទម្រង់អាហ្វីនកាណូនិក។ តម្រុយធម្មជាតិមួយ (យើងនឹងហៅថា តម្រុយកាណូនិក) គឺជាតម្រុយ $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2)$ ដែល $O = (0,0), e_1 = (1,0)$ និង $e_2 = (0,1)$ ។ គេមានតម្រុយមួយទៀត គឺ $\mathcal{R}_1 = (P_0, f_1, f_2)$ ដែល $P_0(2,1)_{\mathcal{R}_0}$ (i.e., $P_0 = (2,1)$), $f_1 = (2,1)$ និង $f_2 = (1,-3)$។ គេសន្មត $M(x,y)_{\mathcal{R}_0}$ និង $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1}$ ។ ចូរសរសេរ X និង Y ជាអនុគមន៍ទៅនឹង x និង y និង ច្រាសមកវិញ។

៣.១.២ លំហរងអាហ្វីនរបស់ $\mathbb{R}^2$

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងតាង $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$ ដែលមានទម្រង់អាហ្វីនកាណូនិក ។ ដូច្នេះ លំហទិសដៅរបស់វា គឺ $\mathbb{R}^2$ ហើយយកតម្រុយកាតេសៀន $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

លំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$ មានវិមាត្រ 0 គឺជា ចំណុច មានវិមាត្រ 1 គឺជា បន្ទាត់ ឬមានវិមាត្រ 2 គឺជា លំហ $\mathcal{E}$ ទាំងមូល ។ យើងនឹងពិភាក្សាតាមពីររបៀប អំពីធាតុរបស់បន្ទាត់ គឺជាសំណុំ $\Delta=P+\mathbb{R}\vec{u}$ ដែលមាន $P\,(x_P,y_P)$ និង $\vec{u}\binom{u_x}{u_y}$ ដូចខាងក្រោម៖

- **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ.** តាមនិយមន័យ គេថា $M(x,y)\in\Delta$ លុះត្រាតែគ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ ដែល $M=P+t\vec{u}$ គឺ :
$$\begin{cases} x &= x_P+tu_x \\ y &= y_P+tu_y \end{cases}$$

- **សមីការដេកាត ឬកាតេសៀន.** គេថាចំណុចមួយ $M\in\Delta$ លុះត្រាតែគេកំណត់បានវ៉ិចទ័រ $(\overrightarrow{PM},\vec{u})$ ដែលអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា គឺមានន័យថា៖
$$\begin{vmatrix} x-x_P & u_x \\ y-y_P & u_y \end{vmatrix}=0$$
ឬថា $\varphi(M)=\varphi(P)$ ដែល
$$\varphi:\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R},\quad M(x,y)\longmapsto xu_y-yu_x.$$

ឧទាហរណ៍ ៨. គេអោយបន្ទាត់បួន $(D_1),(D_2),(\Delta_1),(\Delta_2)$ ដែលមានសមីការ
$$(D_i):\begin{cases} x=\alpha_i t+\beta_i \\ y=\gamma_i t+\delta_i \end{cases}\quad \text{និង}\quad (\Delta_i):\ a_ix+b_iy=c_i$$

(i) ចូរបង្ហាញថា $(D_1)\parallel(D_2)$ លុះត្រាតែ $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=0$ ។

(ii) ចូរបង្ហាញថា $(\Delta_1)\parallel(\Delta_2)$ លុះត្រាតែ $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ ។

សំណើ. គេអោយបីចំណុច $M_i\,(x_i, y_i)$ កំណត់ក្នុងតម្រុយ $\mathcal{R}$ ។ គេថា ចំណុចទាំងបីមិនរត់ត្រង់គ្នា លុះត្រាតែ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

លំហាត់ ៥. គេអោយបន្ទាត់ affine ចំនួនបីក្នុងលំហ $\mathcal{E}_2$ មានសមីការរៀងៗគ្នា៖ $\Delta_i : a_i x + b_i y = c_i\ (i = 1, 2, 3, a_i, b_i \in \mathbb{R})$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ទាំងបីប្រសព្វគ្នា ឬស្របគ្នា ប្រសិនបើ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

៣.១.៣ លំហរងអាហ្វីនរបស់ $\mathbb{R}^3$

យក $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ ប្រដាប់ដោយតម្រុយកាតេសៀន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ យើងនឹងពិភាក្សាអំពី ប្លង់ និង បន្ទាត់ ក្នុង $\mathcal{E}$ ។

សមីការប្លង់ (Plane)

យើងនឹងសរសេរតាមពីររបៀប ធាតុទាំងឡាយរបស់ប្លង់

$$\Pi = P + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$$

ដែល $(\vec{u}, \vec{v})$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា និងមាន $P\,(x_P, y_P, z_P)$ និង $\mathrm{Mat}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}$

(i) **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ.** តាមនិយមន័យ គេថា $M(x, y) \in \Delta$ លុះត្រាតែមាន $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $M = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$ ។ មានន័យថា

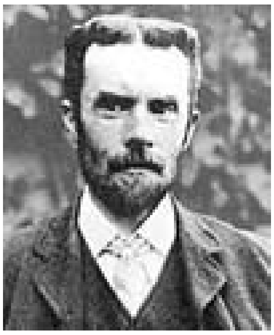
$$\begin{cases} x = x_P + t_1 u_x + t_2 v_x \\ y = y_P + t_1 u_y + t_2 v_y \\ z = z_P + t_1 u_z + t_2 v_z \end{cases}$$

Session II.

៣.៣ គណនាវ៉ិចទ័រ

William Rowan Hamilton

លោក William Hamilton (1805-1865) ជនជាតិ អៀរឡង់ គឺជា មនុស្ស ដំបូង គេ ដែល ប្រើពាក្យ *វ៉ិចទ័រ* ហើយ គាត់ ប្រហែលជា អ្នកបង្កើត ពាក្យ នេះ (គឺមកពីភាសាឡាតាំង *vehere* មានន័យថា '**ដឹក**")។ លោក Hermann Grassman (1809-1877) ជនជាតិអាឡឺម៉ង់ បានប្រើសញ្ញាណវ៉ិចទ័រ នៅក្នុងចំណោទរូបវិទ្យា។ រូបវិទូ ជនជាតិ អាមេរិក Gibbs (1839-1903) និងវិស្វករ អង់គ្លេស Heaviside (1850-1925) ដែលសិស្សរបស់ Hamilton បានចូលរួមចំណែកក្នុងការបង្កើតការគណនាវ៉ិចទ័រ ជា ទម្រង់ ចុងក្រោយ។ ទោះ យ៉ាងណាក៏ដោយ របៀប នៃ"ការ គណនា" នេះ ចំណាយពេលខ្លះដែរ ដើម្បី ទទួល បានការ ទទួលយក នៅប្រទេស បារាំង។ លោក Michel Chasles (1793-1880) បានទទួលស្គាល់រួចទៅហើយ អំពីសារៈសំខាន់នៃគោលការណ៍ណែនាំតាមទិសដៅមួយ ទោះបីជាគាត់មិនបានប្រើគោលគំនិតនៃវ៉ិចទ័រច្បាស់លាស់បែបណាក៏ដោយ។



Oliver Heaviside

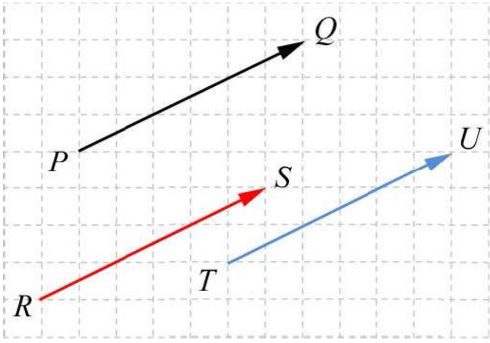
ដើមឡើយ *វ៉ិចទ័រ* គឺជាវត្ថុមួយ នៅក្នុង ធរណីមាត្រ Euclid ។ ចំពោះពីរ ចំណុចទូទៅ លោក Euclid អាចកំណត់បានចម្ងាយមួយ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ចំនុចមួយគូកំណត់បានព័ត៌មានបន្ថែមច្រើនៈ កំណត់បានទិសដៅ និងទិសផងដែរ។ ដូច្នេះ ពាក្យវ៉ិចទ័របានសំយោគនូវព័ត៌មានទាំងនេះ។

សញ្ញាណនៃវ៉ិចទ័រ ត្រូវ បាន កំណត់ ក្នុង លំហវិមាត្រ ពីរ (គឺ ប្លង់) ឬ លំហវិមាត្រ បី (គឺ លំហអឺគ្លីដងាយ)។ វាកំណត់បានទូទៅកម្ម ចំពោះលំហមានវិមាត្រណាក៏ដោយ។ សញ្ញាណនេះបានក្លាយជាវត្ថុអរូបី និងត្រូវបានបង្ហាញឡើង តាមរយៈប្រព័ន្ធស្វ័យសត្យទាំងឡាយ ដែលបង្កើតជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃមុខវិជ្ជាមួយ គឺ ពិជគណិតលីនេអ៊ែរ។ នៅក្នុងរូបវិទ្យាវិញ វ៉ិចទ័រអាចឱ្យយើងបង្កើតគំរូបរិមាណនានា ដែលមិនអាចកំណត់បានពេញលេញតាមតម្លៃលេខ ឬអនុវត្តមន៍អ្វីមួយ។ ឧទាហរណ៍ ដើម្បីបញ្ជាក់ពីបម្លាស់ទី ល្បឿន

កម្លាំង ឬដែនអគ្គិសនី ទាំងទិសដៅ និងទិស គឺត្រូវការជាចាំបាច់។ ន័យវ៉ិចទ័រ គឺផ្ទុយទៅនឹងចំនួនស្កាលែរ ដែលបញ្ជាក់បានជាលេខតែមួយ ដូចជាៈ ម៉ាស់ សីតុណ្ហភាព។ល។

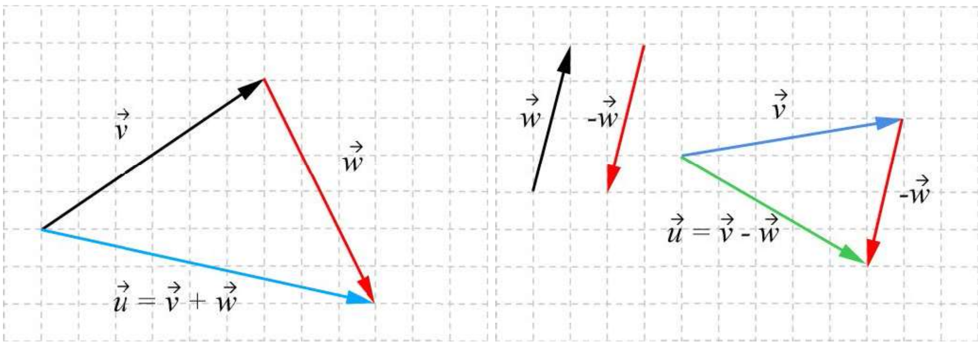
- ក្នុងន័យសាមញ្ញ *វ៉ិចទ័រ គឺជាបរិមាណដែលមានអាំងតង់ស៊ីតេ ទិស និងទិសដៅ*។ ជាការងាយស្រួល គេប្រើសញ្ញាព្រួញ ដើម្បីតំណាងវា។

- វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ស្មើគ្នា ប្រសិនវាមានអាំងតង់ស៊ីតេដូចគ្នា (ប្រវែង) ទិសដូចគ្នា និងទិសដៅដូចគ្នា។

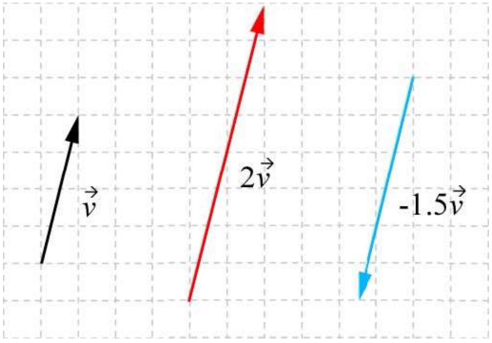


- វ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែង 0 ហៅថា "វ៉ិចទ័រសូន្យ" ហើយតាងដោយ $\vec{0}$ ។ វ៉ិចទ័រសូន្យ គ្មានទិសដៅ និងទិសទេ។

ផលបូកវ៉ិចទ័រ



ផលគុណវ៉ិចទ័រនិងស្កាលែរ



បើ λ ជា scalar និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រ នោះផលគុណ $\lambda\vec{v}$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

(i) បើ $\lambda > 0$ នោះផលគុណ $\lambda\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រ មានអាំងតង់ស៊ីតេស្មើ λ ដងនៃអាំងតង់ស៊ីតេរបស់ $\vec{v}$ ហើយមានទិសដៅដូចគ្នាទៅនឹងទិសដៅរបស់ $\vec{v}$ ដែរ។ ករណី $\lambda > 1$ គេហៅ $\lambda\vec{v}$ ថា **ពង្រីក** របស់វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ហើយ ករណី $0 < \lambda < 1$ គេហៅ $\lambda\vec{v}$ ថា **បង្រួម** របស់វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ។

(ii) បើ $\lambda < 0$ នោះផលគុណ $\lambda\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រមានអាំងតង់ស៊ីតេស្មើ λ ដងនៃអាំងតង់ស៊ីតេរបស់ $\vec{v}$ ហើយមានទិសដៅគឺផ្ទុយពី $\vec{v}$ ។

(iii) បើ $\lambda = 0$ ឬ បើ $\vec{v} = \overrightarrow{0}$ នោះផលគុណ $\lambda\vec{v}$ គឺជា វ៉ិចទ័រសូន្យ។

ទំនាក់ទំនងសាល

Michel Chasles (1793 - 1880)

គ្រប់ចំណុច A, B និង C នៃលំហអាហ្វីនមួយ គេបាន៖

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ទំនាក់ទំនងពីរ ខាងក្រោម ត្រូវបានទាញចេញពីទំនាក់ទំនង Chasles ។ ចំណុចទូទៅ A និង B នៅក្នុងប្លង់ មានគល់តម្រុយ O យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងពីរដូចខាងក្រោម៖

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

ការតាងវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់

យើងប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេចតុកោណ ដើម្បីតំណាងឱ្យវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហ។ គេហៅ $\vec{i}$ វ៉ិចទ័រឯកតា មានទិសដៅតាមអ័ក្ស Ox និង $\vec{j}$ វ៉ិចទ័រឯកតា មានទិសដៅតាមអ័ក្ស Oy។

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

នៅក្នុងលំហវិមាត្រពីរ វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ បង្កើតបានគោលកាណូនិចមួយ ។ វាជាគោលអរតូនរមេ មានន័យថា វ៉ិចទ័រទាំងពីរអរតូកូណាល់គ្នា និងមានប្រវែង ១។

បើ $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រដែលមានចំណុចគល់របស់វានៅគល់អ័ក្ស O ហើយចំនុចចុងរបស់វានៅត្រង់ $P(a,b)$ នោះយើងអាចតាង $\vec{v}$ ដោយបន្សំលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រទាំងពីរ $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

គេហៅស្កាលែរ a និង b ថា កំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ដែល a ជាកំប៉ូសង់ក្នុងទិសដៅ $\vec{i}$ និង b ជាកំប៉ូសង់ក្នុងទិសដៅ $\vec{j}$ ។ នៅក្នុងវិមាត្រ n វ៉ិចទ័រមួយ ត្រូវមានកំប៉ូសង់ចំនួន n ។

ទ្រឹស្តីបទ.

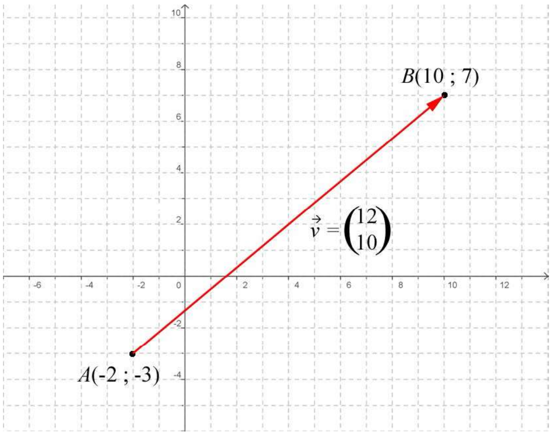
- ឧបមាថា វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ មានចំណុចគល់ $P_1(x_1, y_1)$ និងចំនុចចុង $P_2(x_2, y_2)$។ ដូច្នេះ

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

- វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ កំប៉ូសង់ត្រូវគ្នារបស់វាស្មើគ្នា។
- គ្រប់វ៉ិចទ័រមិនសូន្យ គេបានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតា ដែលមានទិស និងទិសដៅដូច $\vec{v}$ ។

ណមរបស់វ៉ិចទ័រ

ពាក្យចំនួនបួនត្រូវបានគេប្រើ ក្នុងន័យដូចគ្នាគឺ៖ ណម (norme), អាំងតង់ស៊ីតេ (intensité), ប្រវែង (longueur) និង ម៉ូឌុល (module) ។



ប្រសិនបើ $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមួយ នោះយើងប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\|\vec{v}\|$ តាងឱ្យណម (ប្រវែង) នៃ $\vec{v}$ ។ ដោយ $\|\vec{v}\|$ ជាប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ នោះណមរបស់វ៉ិចទ័រ ត្រូវមានលក្ខណៈប្រាំយ៉ាង ដូចខាងក្រោមៈ ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ និងគ្រប់ស្កាលែរ λ គេបាន

i) $\|\vec{v}\| \geq 0$

ii) $\|\vec{v}\| = 0$ លុះត្រាតែ $\vec{v} = \overrightarrow{0}$

iii) $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

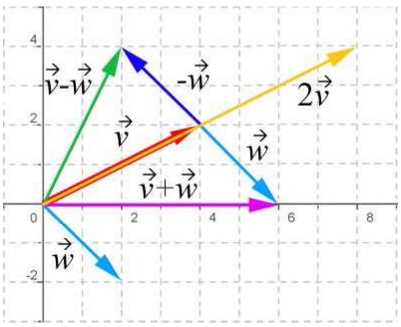
iv) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,|\,\|\vec{v}\|$

v) $\|\overrightarrow{v+w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (វិសមភាពត្រីកោណ)

ចំពោះវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ មួយដែលមានណម $\|\vec{v}\| = 1$ ហៅថា **វ៉ិចទ័រឯកតា** ។ ចំពោះប្លង់ដែលមានតម្រុយអរតូនរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេបាន

$$\boxed{\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

ឧទាហរណ៍ ១. ពិនិត្យរូបខាងក្រោមៈ



$$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$
$$2\vec{v} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\vec{v}-\vec{w} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$
$$\|2\vec{v}\| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

- បើ $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ គេបាន វ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតា ដែលមានទិស និងទិសដៅដូច $\vec{v}$ ។

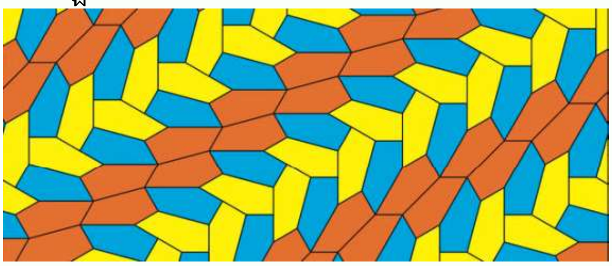
ឧទាហរណ៍ ២. យក $\vec{v} = \binom{1}{-1}$ ។ គេបាន $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ ។ វ៉ិចទ័រឯកតាដែលមានទិស និងទិសដៅដូច $\vec{v}$ គឺ៖

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

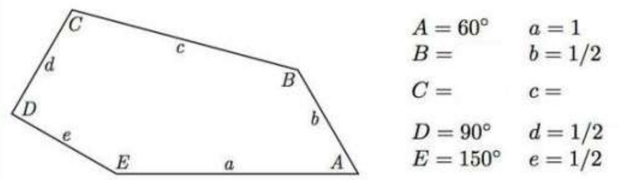
គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

អនុវត្តន៍ ៣.១.

ក្នុងឆ្នាំ 2015 ក្រុមគណិតវិទូមួយក្រុម បានធ្វើអោយកក្រើកពិភពគណិតវិទ្យា ដោយបានរកឃើញបញ្ចកោណប្រភេទថ្មីមួយ ដែលអាចតម្រៀបជាប្លង់រាបបាន៖ ឥដ្ឋការ៉ូមានរាងជាបញ្ចកោណនេះ អាចតម្រៀបបញ្ចូលគ្នា បានផ្ទៃរាបស្មើ ដោយមិនមានការគងជាន់គ្នា ឬសល់ចន្លោះប្រហោងឡើយ។



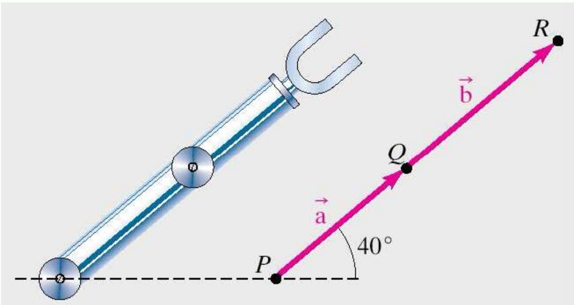
រូបតំណាងការ៉ូរាងបញ្ចកោណខាងលើ មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖



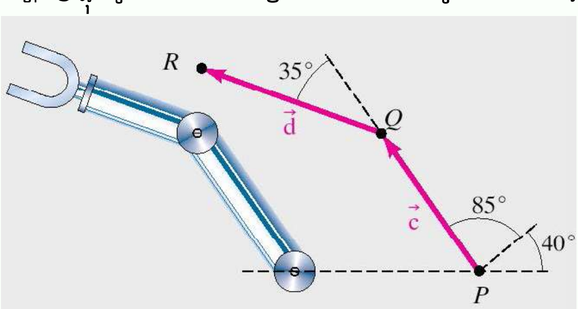
ចូរគណនាមុំ B និងមុំ C រួចរកប្រវែងជ្រុង C ?

អនុវត្តន៍ ៣.២.

(a) រូបទីមួយតំណាងឱ្យដៃមនុស្សយន្ត។ ដៃនេះអាចបង្វិលនៅតំណ P និង Q ។ ដើមដៃ (តាងដោយ $\vec{a}$) មានប្រវែង 37.5 cm និងកំភួនដៃរួមទាំងម្រាមដៃ (តាងដោយ $\vec{b}$) មានប្រវែង 42.5 cm ។ គណនាកូអរដោនេរបស់ចំនុច R ដែលមានទីតាំងនៅចុងដៃ។



(b) ផ្តើមពីទីតាំងខាងលើ ដើមដៃត្រូវបានបង្វិលតាមមុំ $85°$ និងកំភួនដៃបង្វិលតាមមុំ $35°$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទីពីរ ខាងក្រោម។ គណនាកូអរដោនេថ្មីនៃចំណុច R នេះ។



ផលគុណស្កាលែរ

ផលគុណស្កាលែរ គឺជាប្រមាណវិធីពិជគណិតមួយ ដែលបន្ថែមទៅលើប្រមាណវិធីទាំងឡាយអនុវត្តក្នុងវ៉ិចទ័រ។ ប្រមាណវិធីនេះ ភ្ជាប់វ៉ិចទ័រពីរដោយផលគុណរបស់វា ចេញជាលេខ (ឬហៅថា *ស្កាលែរ*) ។ វាអាចអោយយើងទាញរកសញ្ញាណនៃធរណីមាត្រ Euclid បានមួយចំនួន ដូចជា៖ ប្រវែង, មុំ និងភាពអរតូកូណាល់។

គេអោយវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{v} = \binom{a}{b}$ និង $\vec{w} = \binom{c}{d}$ ក្នុងប្លង់មួយ។ គេបាន ផលគុណស្កាលែររវាង $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ កំណត់ដោយ :

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = ac + bd}$$

សម្គាល់. ពេលខ្លះអ្នកគណិតវិទ្យាតាងផលគុណស្កាលែរនៃពីរវ៉ិចទ័រដោយ៖

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle \quad \text{ឬ} \quad (\vec{u},\vec{v}) \quad \text{ឬ} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}$$

ឧទាហរណ៍ ៣. យក $\vec{v} = \binom{2}{-3}$ និង $\vec{w} = \binom{5}{3}$ ។ គណនា

ក) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

ខ) $\vec{w}\cdot\vec{v}$

គ) $\vec{v}\cdot\vec{v}$

ឃ) $\vec{w}\cdot\vec{w}$

ង) $\|\vec{v}\|$

ច) $\|\vec{w}\|$

លក្ខណៈ: យកវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ។ គេបានលក្ខណៈរបស់ផលគុណស្កាលែរ ដូចខាងក្រោម៖

i. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

ii. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

iii. $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

iv. $\vec{0}\cdot\vec{v} = 0$

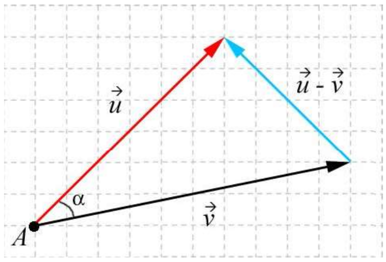
v. $(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})$

មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរ ដែលមានចំណុចគល់រួម A ។ វ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{u}-\vec{v}$ បង្កើតជាត្រីកោណមួយ ។ មុំ α ត្រង់ចំណុច A គឺជាមុំដែលផ្តុំដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស គេបាន៖

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

តាម $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$ នោះគេបាន



$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

តែអង្គខាងឆ្វេង គេសរសេរបាន៖

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

គេបាន៖

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

និយមន័យ ៣.១.

យកពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

- មុំ $\alpha, 0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ដែលផ្គុំដោយរវាងពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ៖

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$$

- វ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរស្របគ្នា (ឬហៅថា **កូលីនេអ៊ែរគ្នា**) បើមានស្កាលែរមួយមិនសូន្យ λ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ ។

- វ៉ិចទ័រពីរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ អរតូកូណាល់គ្នា លុះត្រាតែ $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤. ចូរគណនាផលគុណស្កាលែរ $\vec{v}\cdot\vec{w}$ និងមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$៖

a. $\vec{v} = \vec{i}-\vec{j}, \quad \vec{w} = \vec{i}+\vec{j}$

b. $\vec{v} = \binom{1}{1}, \vec{w} = \binom{-1}{1}$

c. $\vec{v} = 2\vec{i}+\vec{j}, \vec{w} = \vec{i}+2\vec{j}$

d. $\vec{v} = \binom{2}{2}, \vec{w} = \binom{1}{2}$

e. $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{w} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

f. $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$

g. $\vec{v} = \binom{1}{-1}, \vec{w} = \binom{4}{-3}$

h. $\vec{v} = \vec{i}, \vec{w} = -3\vec{j}$

ឧទាហរណ៍ ៥. វ៉ិចទ័រ $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ និង $\vec{w} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរស្របគ្នា ព្រោះ $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{w}$ ។

ដូច្នេះ គេបាន

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{-18-2}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{-20}{\sqrt{400}} = -1$$

គេទាញបាន មុំ α ផ្គុំឡើងរវាង $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ស្មើ $180°$ ។

អនុវត្តន៍ ៣.៣.

(១) ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Pythagore :

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2$$

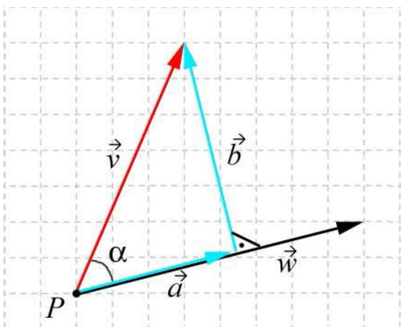
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$$

(២) នៅក្នុងលំហវិមាត្របី ចូរគណនាមុំស្រួចរវាងវ៉ិចទ័រ

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{និង} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ចំណោលវ៉ិចទ័រ



គេឱ្យ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរមិនសូន្យ ដែលមានចំណុចគល់ P ។ យើងនឹងបំបែកវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ទៅជាវ៉ិចទ័រពីរគឺ $\vec{a}$ ស្របគ្នានឹង $\vec{w}$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{w}$ ។ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ គឺជាចំណោលរបស់ $\vec{v}$ ទៅលើ $\vec{w}$ ។

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

គេបានៈ

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{w} = \vec{a}\cdot\vec{w} + \vec{b}\cdot\vec{w}$$

ដោយ $\vec{b}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{w}$ នោះ $\vec{b}\cdot\vec{w} = 0$ ។ ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\vec{a}$ ស្របទៅនឹង $\vec{w}$ គេបាន $\vec{a} = \lambda\vec{w}$ ដែល λ ជាស្កាលែរមួយ ដែលយើងនឹងកំណត់រក។ ដូច្នេះ

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{a}\cdot\vec{w} = \lambda\vec{w}\cdot\vec{w} = \lambda\|\vec{w}\|^2$$

គេទាញបាន

$$\lambda = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$$

ដូច្នេះ យើងសរសេរ $\vec{a}$ ជាអនុគមន៍ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ដូចខាងក្រោមៈ

$$\vec{a} = \lambda\vec{w} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$$

និយមន័យ ៣.២.

- យក $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរមិនសូន្យ។ វ៉ិចទ័រចំណោលរបស់ $\vec{v}$ លើ $\vec{w}$ កំណត់ដោយ

$$\mathrm{proj}_{\vec{w}}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$$

- យក α ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរមិនសូន្យពីរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ។ ដូច្នេះ ម៉ូឌុលវ៉ិចទ័រចំណោលរបស់ $\vec{v}$ លើ $\vec{w}$ កំណត់ដោយ

$$\|\,\mathrm{proj}_{\vec{w}}\,\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

ឧទាហរណ៍ ៦. Décomposez le vecteur $\vec{v}$ en deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, avec $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, où $\vec{a}$ est parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{w}$.

១. $\vec{v} = \binom{2}{-3}, \vec{w} = \binom{1}{-1}$

២. $\vec{v} = \binom{-3}{2}, \vec{w} = \binom{2}{1}$

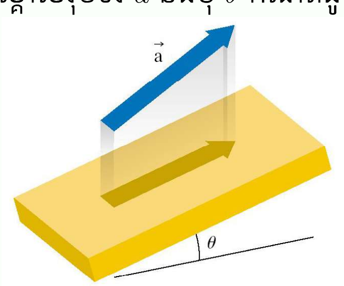
៣. $\vec{v} = \binom{1}{-1}, \vec{w} = \binom{1}{2}$

៤. $\vec{v} = \binom{2}{-1}, \vec{w} = \binom{1}{-2}$

Faites un dessin et vérifiez (par calcul et sur votre dessin) que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.

អនុវត្តន៍ ៣.៤.

(១) គេ អនុវត្តវ៉ិចទ័រ នៅក្នុង *វិទ្យាសាស្ត្ររូបភាពកុំព្យូទ័រ* (computer imaging) ដើម្បីគណនារកប្រវែងស្រមោលមួយ នៅលើផ្ទៃរាបស្មើ។ ក្នុងរូបខាងក្រោម ប្រភពពន្លឺចាំងមកលើវត្ថុមួយ (តាងដោយ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$) ហើយចោលស្រមោលរបស់វាកែងនឹងផ្ទៃដី។ យក θ គឺជាមុំរវាងផ្ទៃដី និងអ័ក្សដេក។ គណនាប្រវែងស្រមោលនៅលើផ្ទៃដី បើគេស្គាល់វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និងមុំ θ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖



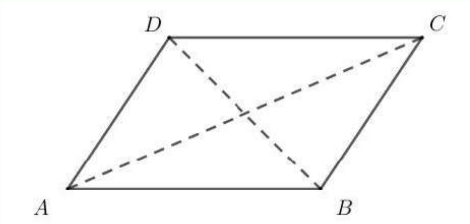
(a) $\vec{a} = \binom{2.6}{4.5}, \theta = 0°$

(b) $\vec{a} = \binom{25.7}{-3.9}, \theta = 12°$

(c) $\vec{a} = \binom{-13.8}{19.4}, \theta = -17°$

(២) ចូរ ស្រាយ បញ្ជាក់ លក្ខណៈរបស់ ប្រលេឡូក្រាម ខាងក្រោម ដោយ ប្រើប្រាស់ផលគុណស្កាលែរ៖

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$



ជំពូក ៣

លំហអាហ្វីន

ដោយការសន្មតៈ លំហវ៉ិចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់ កំណត់លើកាយ $\mathbb{R}$ តាងដោយអក្សរធំដិត $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \ldots$ ដើម្បីញែកចេញពីសំណុំចំណុចទាំងឡាយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យ **លំហអាហ្វីន** ឬ **លំហអាហ្វីនរង** តំណាងដោយអក្សរផ្ចង់ $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$ ។ ដូចគ្នានេះដែរ ចំណុចតាងដោយអក្សរធំ $M, N, \ldots$ ហើយ វ៉ិចទ័រ ត្រូវប្រើសញ្ញា "ព្រួញ" ដូចជាៈ $\vec{u}, \vec{v} \ldots$ ។

៣.១ លំហអាហ្វីន - លំហរងអាហ្វីន

និយមន័យ ៣.១.

លំហអាហ្វីន (affine space) គឺជាសំណុំមិនទទេ $\mathcal{E}$ ដែលភ្ជាប់ជាមួយលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ កំណត់លើកាយ $\mathbb{R}$ (ហៅថា "លំហទិសដៅ" តាងដោយ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) និងប្រមាណវិធីក្រៅ

$$\begin{array}{rccl} \tilde{+} : & \mathcal{E} \times \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & (P, \vec{u}) & \longmapsto & \tilde{+}(P, \vec{u}) = P \tilde{+} \vec{u} \end{array}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ៈ

(i) គ្រប់ $P, Q \in \mathcal{E}$ មានវ៉ិចទ័រតែមួយគត់ $\vec{u} \in \mathbf{E}$ ដែល $Q = P \tilde{+} \vec{u}$ ។ (ក្រោយមក គេតាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ នេះដោយ $\overrightarrow{PQ}$)

(ii) គ្រប់ $P \in \mathcal{E}$ និងគ្រប់ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{E}$ គេបានៈ $P \tilde{+} (\vec{u} + \vec{v}) = (P \tilde{+} \vec{u}) \tilde{+} \vec{v}$ ។

សម្គាល់.

- យើងសន្មតជានិច្ច $\mathbf{E}$ ជាលំហវិចទ័រមានវិមាត្ររាប់អស់ ដែលវិមាត្រនេះ ក៏ជាវិមាត្ររបស់លំហ $\mathcal{E}$ ដែរ ។ លំហ $\mathcal{E}$ ហៅថា លំហអាហ្វីនតាមទិសដៅ $\mathbf{E}$ ។ ធាតុរបស់ $\mathcal{E}$ ហៅថា ចំណុច ហើយធាតុរបស់ $\mathbf{E}$ ហៅថា វិចទ័រ ។

- យើងហៅថា **បន្ទាត់អាហ្វីន** និង **ប្លង់អាហ្វីន** ពេលណាលំហទិសដៅ $\mathbf{E}$ មានវិមាត្រ 1 និង 2 រៀងគ្នា។

- យើងតាង *ប្រមាណវិធីក្រៅ* ដោយសញ្ញា $(\tilde{+})$ សូមកុំច្រឡំជាមួយនឹងផលបូកនៃវិចទ័រដែលសញ្ញា $(+)$ ជា *ប្រមាណវិធីក្នុង* កំណត់លើលំហវិចទ័រ $\mathbf{E}$ ។ តែដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាក្រោយមកយើងសន្មតតាងសញ្ញាណតែមួយគត់គឺ $(+)$ សម្រាប់ប្រមាណវិធីទាំងពីរ៖ ក្នុង និង ក្រៅ។ ដូច្នេះ យើងសរសេរ $Q = P + \vec{u}$ ជំនួសឱ្យ $Q = P \tilde{+} \vec{u}$ ។

- តាមស្វ័យសត្យ (i) ខាងលើ គេទាញបានដោយសន្មត៖ $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ។ ដូច្នេះ គេសង្កេតបាន៖ *(a) ចំណុចបូកវិចទ័រ បានចំណុច។ (b) ចំណុចដកចំណុច បានវិចទ័រ។ តែគេមិនអាចបូកចំណុចនិងចំណុច បានទេ។*

ទំនាក់ទំនងសាល.

- ចំពោះគ្រប់ចំណុច $A, B, C \in \mathcal{E}$ គេបាន៖ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- គ្រប់ $M \in \mathcal{E}$ គេបាន៖ $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$ ។ ដូច្នេះ $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ មានន័យថា៖ $M + \vec{0} = M$ ។

និយមន័យ ៣.២.

យក $\vec{u} \in \mathbf{E}$ ។ គេកំណត់អនុគមន៍

$$\begin{array}{rccl} t_{\vec{u}} : & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & P & \longmapsto & t_{\vec{u}}(P) = P + \vec{u} \end{array}$$

ហៅថា *បម្លែងកិល* ចំណុច P តាមទិសដៅ $\vec{u}$ ។

ចំណាំ. អនុគមន៍ $t_{\vec{u}}$ ខាងលើ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ (i.e., ពេញ & ប្រកាន់) ។

លំហាត់ ១. គេឲ្យ $\mathcal{E}$ និង $\mathcal{F}$ ជាលំហអាហ្វីនពីរ មានវិមាត្រដូចគ្នា។ យកចំណុច $P_0 \in \mathcal{E}$ និង

$Q_0 \in \mathcal{F}$ ។ ចូរបង្ហាញថាមានអ៊ីសូម៉ូភីស φ ពីលំហ $\mathbf{E} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ ទៅលំហ $\mathbf{F} = \overrightarrow{\mathcal{F}}$ ដែលអនុគមន៍

$$\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \quad \text{កំណត់ដោយ} \quad P \mapsto Q_0 \,\tilde{+}\, \varphi\left(\overrightarrow{P_0P}\right)$$

ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយពី $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{F}$?

ឧទាហរណ៍ ៧.

១. យក $\mathbf{E}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រ។ គេអាចកំណត់ទម្រង់លំហអាហ្វីន តាមទិសដៅ $\mathbf{E}$ ខ្លួនវា ដោយ **ប្រមាណវិធីក្រៅ** : $\vec{u} \,\tilde{+}\, \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$ ។ ដូច្នេះ ស្វ័យសត្យ (i) ក្នុងនិយមន័យខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់។

២.

៣.

លំហអាហ្វីនរង

និយមន័យ ៣.៣.

គេឱ្យ $\mathbf{E}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រ និង $\mathbf{F}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររង ហើយកំណត់ $x_0 \in \mathbf{E}$ ។ គេបានសំណុំ

$$\mathcal{F} = x_0 + \mathbf{F}$$

មានទម្រង់ជាលំហអាហ្វីនតាមទិសដៅរបស់លំហវ៉ិចទ័ររង $\mathbf{F}$ ដែលប្រមាណវិធីក្រៅនៅក្នុង $\mathbf{F}$ ដូចគ្នានឹងប្រមាណវិធីក្នុងរបស់ $\mathbf{E}$ ។ គេថា $\mathcal{F}$ គឺជា **លំហអាហ្វីនរង** របស់ E ។

សម្គាល់.

- លំហអាហ្វីនរង $\mathcal{F}$ គឺជាសំណុំចំណុច បានមកដោយបូកបន្ថែមវ៉ិចទ័ររបស់លំហវ៉ិចទ័ររង $\mathbf{F}$ ទៅនឹងចំណុចគល់ $x_0 \in \mathbf{E}$ ។ ទិសដៅរបស់សំណុំចំណុចនេះ គឺជាលំហរង $\mathbf{F}$ ខ្លួនឯង។ វិធីដែលយើងបូកផ្គុំវ៉ិចទ័រ (ដូចជា គុណនឹងស្កាលែរជាដើម) គឺដូចគ្នានឹងប្រមាណវិធីទាំងឡាយរបស់លំហវ៉ិចទ័រទិសដៅ $\mathbf{E}$ ដែរ។ មានន័យថាៈ ប្រមាណវិធីក្រៅ នៅក្នុង $\mathbf{F}$ គឺដូចគ្នាបេះបិទទៅនឹង ប្រមាណវិធីក្នុង របស់ $\mathbf{E}$។

- វាជាគំនិតទូទៅនៃការបង្កើត បន្ទាត់ ឬ ប្លង់ នៅក្នុងលំហអឺគ្លីដ ដោយមិនគិតពីសញ្ញាណនៃចម្ងាយ ឬ មុំ នោះឡើយ។

សំណើ. បើ $\mathcal{F}_1$ និង $\mathcal{F}_2$ គឺជាលំហអាហ្វីនរងពីររបស់លំហ $\mathcal{E}$ នោះ $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ អាចស្មើទទេ ឬជាលំហអាហ្វីនរងមួយ ដែលមានទិសដៅ $\overrightarrow{\mathcal{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}_2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់.

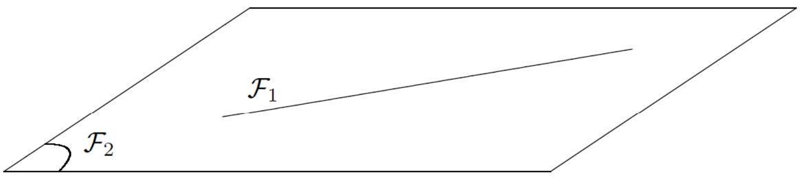
និយមន័យ ៣.៤.

គេឱ្យ $\mathcal{F}_1$ និង $\mathcal{F}_2$ ជាលំហអាហ្វីនរងពីររបស់លំហ $\mathcal{E}$ ។ គេថា $\mathcal{F}_1$ ស្របនឹង $\mathcal{F}_2$ គេសរសេរ $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ បើលំហទិសដៅ $\overrightarrow{\mathcal{F}}_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_2$ ។

សម្គាល់.

- ទំនាក់ទំនង $\parallel$ គ្មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីទេ (ឧ. បន្ទាត់អាហ្វីន ដែលស្របទៅនឹងប្លង់អាហ្វីនណាមួយ ដែលផ្ទុកបន្ទាត់នេះ)។

- ទំនាក់ទំនង $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ គឺគ្មានលក្ខណៈចាំបាច់ ឬគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីឱ្យបាន $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ឡើយ។



លំហាត់ ២. សន្មត $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$ ឬ $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ។

លំហាត់ ៣. បើ A និង B គឺជាចំណុចពីរផ្សេងគ្នាក្នុង $\mathcal{E}$ ចូរបង្ហាញថា មានលំហអាហ្វីនរងតែមួយគត់របស់លំហ $\mathcal{E}$ មានវិមាត្រ 1 (គឺជា *បន្ទាត់ affine*) ដែលកាត់តាមចំណុច A និង B ។ គេតាងដោយ (AB) ។

និយមន័យ ៣.៥.

បើលំហទិសដៅ $\mathbf{E}$ គឺជាលំហអឺគ្លីដ (ជាលំហបំពាក់ដោយណម) និងបើ (D) គឺជាបន្ទាត់ក្នុង $\mathcal{E}$ នោះបន្ទាត់ (D) មានវ៉ិចទ័រទិសដៅតែពីរប៉ុណ្ណោះ ដែលមានណមស្មើ 1 ។ បើយើងជ្រើសរើសយកវ៉ិចទ័រមួយ $\vec{u}$ ដើម្បីកំណត់ទិសរបស់បន្ទាត់ (D) នោះគេអាចកំណត់ចម្ងាយ

ពិជគណិត រវាងគូចំណុច (A, B) របស់ $(D) \times (D)$ តាងដោយ $\overrightarrow{AB}$ ដែល

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{u}$$

៣.១.១ តម្រុយអាហ្វីន

និយមន័យ ៣.៦.

- គេហៅ **តម្រុយកាតេសៀន** ឬ *តម្រុយដេកាត* (ឬ *តម្រុយអាហ្វីន*) តាងដោយ $\mathcal{R} = (P_0, \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k)$ របស់លំហអាហ្វីន $\mathcal{E}$ មានវិមាត្រ k បើមាន ៖
  - ចំណុច $P_0 \in \mathcal{E}$ និង
  - គោល $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ របស់លំហវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
- កូអរដោនេរបស់ចំនុច $M \in \mathcal{E}$ នៅក្នុងតម្រុយ $\mathcal{R}$ នេះ គឺជា ស្កាលែរ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖
$$\overrightarrow{P_0M} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k$$
- គេតាងកូអរដោនេរបស់ចំណុច $M \in \mathcal{E}$ មានវិមាត្រ k ដោយ $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)_{\mathcal{R}}$ ឬដើម្បីងាយស្រួល តាងដោយ $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ។

សម្គាល់.

- យើងត្រូវបែងចែកការសរសេរ $M = (x_0, y_0)$ មានន័យថា M គឺជាធាតុរបស់លំហ $\mathbb{R}^2$ ហើយ $M(x_0, y_0)$ គឺចង់សំដៅថា M មានកូអរដោនេ (x_0, y_0) ក្នុងតម្រុយ ដេកាតណាមួយរបស់លំហអាហ្វីន។ ក្នុងន័យនេះដែរ ចំពោះលំហ $\mathbb{R}^n$ ។
- **ការតាងទូទៅ៖** បើគេស្គាល់គោល $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ របស់លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ នោះការសរសេរវ៉ិចទ័រ

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{គឺចង់សំដៅ} \quad \vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k$$

តែជាទូទៅ គេបំភ្លេចសំណេរ $\mathcal{B}$ ចោល គឺ $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}$ ឬក៏ $\vec{u}\,(\lambda_1\cdots,\lambda_k)$ ។

លំហាត់ ៤. គេឱ្យតម្រុយ $\mathcal{R}=(P_0,\mathcal{B})$ ដែល $\mathcal{B}$ ជាគោលមួយរបស់លំហ $\mathbf{E}$ និងយកចំណុច $A\,(x_1,\cdots,x_n)_{\mathcal{R}}$ និង $B\,(y_1,\ldots,y_n)_{\mathcal{R}}$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}y_1-x_1\\ \vdots\\ y_n-x_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍. ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រ និងទម្រង់អាហ្វីនកាណូនិក។ តម្រុយធម្មជាតិមួយ (យើងនឹងហៅថា *តម្រុយកាណូនិក*) គឺជាតម្រុយ $\mathcal{R}_0=(O,e_1,e_2)$ ដែលមាន $O=(0,0)$ វ៉ិចទ័រ $e_1=(1,0)$ និង $e_2=(0,1)$ ។ គេមានតម្រុយមួយទៀតគឺ $\mathcal{R}_1=(P_0,f_1,f_2)$ ដែល $P_0(2,1)_{\mathcal{R}_0}$ (i.e., $P_0=(2,1)$), $f_1=(2,1)$ និង $f_2=(1,-3)$។ គេយក $M(x,y)_{\mathcal{R}_0}$ និង $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1}$ ។ ចូរសរសេរ X និង Y ជាអនុគមន៍ទៅនឹង x និង y និង ច្រាសមកវិញ។

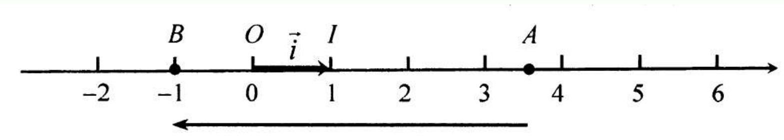
អនុវត្តន៍ ៣.៨. (តម្រុយរបស់ចំណុច និង វ៉ិចទ័រ)

ដើម្បីកំណត់ទីតាំងចំណុច ឬ វ៉ិចទ័រមួយ គេត្រូវដឹងមធ្យោបាយកំណត់ណាមួយ ដោយបំបាត់ភាពមិនច្បាស់លាស់ចេញ ដោយប្រើប្រព័ន្ធលេខ ដែលហៅថា “**កូអរដោនេចំណុច**” ឬ “**កុំប៉ូសង់វ៉ិចទ័រ**” ។

(i) **តម្រុយរបស់ចំណុច និង វ៉ិចទ័រ នៅលើបន្ទាត់មួយ.** កាលណាគេស្គាល់ *អ័ក្ស* (Axis)[a] គេអាចកំណត់ទីតាំងចំណុច និងវ៉ិចទ័រ ចេញពីសមាសធាតុពីរគឺៈ

- ចំណុច O ជាគល់អ័ក្ស
- វ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ (ប្រវែងឯកតា) ដែលកំណត់បានឯកតា និងទិសរបស់អ័ក្ស។

តម្រុយរបស់បន្ទាត់មួយតាងដោយ $(O,\vec{i})$ ដែល $\vec{i}$ ហៅថា *វ៉ិចទ័រឯកតា* របស់អ័ក្ស។



អាប់ស៊ីសរបស់ចំណុច — កុំប៉ូសង់របស់វ៉ិចទ័រ

អាប់ស៊ីស x របស់ចំណុច M នៅលើអ័ក្សមួយ ត្រូវបានកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងវ៉ិចទ័រៈ

$$\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}$$

គេបាន O មានអាប់ស៊ីស 0 និង I មានអាប់ស៊ីស 1។ កុំប៉ូសង់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺជាផលសង $X=(x_B-x_A)$ រវាងអាប់ស៊ីសរបស់ B និង A ហើយតាមទំនាក់ទំនងរបស់សាល គេបាន ៖

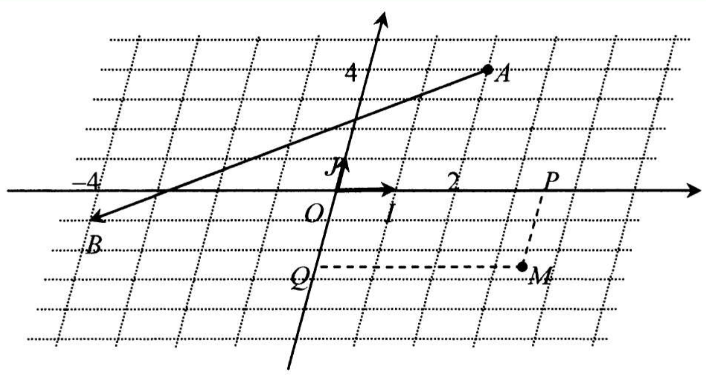
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}=X\cdot\vec{i}$$

ក្នុងរូបខាងលើ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ មានកុំប៉ូសង់ $X=-4.5$ ។

(ii) **តម្រុយរបស់ប្លង់.** ដើម្បីកំណត់ទីតាំងរបស់ប្លង់មួយ គេត្រូវជ្រើសរើស ៖

- ចំណុចគល់ O

- វ៉ិចទ័រពីរមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា $\{\vec{i},\vec{j}\}$ ដែល កំណត់បានវ៉ិចទ័រឯកតាពីរនៅលើអ័ក្សពីរមិនស្របគ្នា។



ក្នុងរូបខាងលើ គេដៅទីតាំងចំណុច I និង J ដែលកំណត់បាន $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ និង $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ ។

– យើងកំណត់ទីតាំងចំណុច M ក្នុងប្លង់មួយ ដោយធ្វើចំណោលស្របនឹងអ័ក្សទាំងពីរៈ ចំណុច P នៅលើអ័ក្ស $(O,\vec{i})$ ដែល $\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}$ ចំណែកចំណុច Q នៅលើអ័ក្ស $(O,\vec{j})$ ដែល $\overrightarrow{OQ}=y\cdot\vec{j}$ ។ គេបាន $OPMQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ ។ ដូច្នេះ ៖

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

– ដើម្បី កំណត់ ទីតាំងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ មានចំណុចគល់ $A(x_A,y_A)$ និងចំណុចចុង $B(x_B,y_B)$ យើងប្រើទំនាក់ទំនងសាលៈ

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}$$

គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ក្នុងរូបខាងលើ កំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

$$\overrightarrow{AB}=-6\vec{i}-5\vec{j}$$

ចំណាំ. លេខ x និង y ក្នុងរូបខាងលើ គេឱ្យឈ្មោះថា **អាប់ស៊ីស** (abscissa) និង **អរ**

ដោនេ (ordinate) របស់ចំណុច M រៀងគ្នា។ គេហៅ គូធាតុ (x, y) ដូចតទៅ៖

- ឬ **ប្រព័ន្ធកូអរដោនេ** របស់ចំណុច M នៅក្នុង តម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- ឬ **ប្រព័ន្ធកុំប៉ូសង់** របស់វ៉ិចទ័រ (មិនអាស្រ័យលើនៅអ៊ែរ) ដែលតាងដោយ $\overrightarrow{OM}$ ។

ជាឧទាហរណ៍ក្នុងរូបខាងលើ $(-6, -5)$ គឺជាកុំប៉ូសង់របស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

(iii) **តម្រុយរបស់លំហវិមាត្របី.**

(កិច្ចការឆ្លុះបញ្ចាំង) អនុវត្តន៍តាមគម្រូបកស្រាយអំពីតម្រុយ នីមួយៗខាងលើ ចូរពន្យល់អំពីតម្រុយរបស់លំហវិមាត្របីឲ

[a] អ័ក្សគឺជាបន្ទាត់មួយកំណត់ទិសដៅ និងគ្រិតចំណុចស្មើៗគ្នាបន្តបន្ទាប់ (ឬហៅថា number line) ។ គេសន្មតអត្ថន័យរបស់អ័ក្សមួយ ដោយដឹង :

- ចំណុចគល់ O
- អង្កត់ OI មានប្រវែងឯកតា
- ទិសមួយនៅលើបន្ទាត់ កំណត់ពី 0 ទៅចំណុច I ។

៣.១.២ លំហរងអាហ្វីនរបស់ $\mathbb{R}^2$

យើងតាង $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ មានទម្រង់អាហ្វីនកាណូនិក ។ ដូច្នេះ លំហទិសដៅរបស់វា គឺ $\mathbb{R}^2$ ហើយយកតម្រុយកាតេសៀន $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។ ដោយសន្មត់ តាង (D) ឬ (Δ) ជាបន្ទាត់អាហ្វីន ហើយតាង (P) ឬ (Π) ជាប្លង់អាហ្វីន។

លំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$ មានវិមាត្រ 0 គឺជា ចំណុច មានវិមាត្រ 1 គឺជា បន្ទាត់ ឬមានវិមាត្រ 2 គឺជា លំហ $\mathcal{E}$ ទាំងមូល ។ យើងនឹងពិនិត្យតាមពីររបៀប ដែលធាតុនីមួយៗរបស់បន្ទាត់ គឺជាសំណុំ $(\Delta) = P + \mathbb{R} \cdot \vec{u}$ មាន $P\,(x_P, y_P)$ និង $\vec{u} = (u_x, u_y)$ ដូចខាងក្រោម៖

- **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ.** តាមនិយមន័យ គេថា $M(x, y) \in (\Delta)$ លុះត្រាតែគ្រប់ $t \in \mathbb{R}$ ដែល $M = P + t\vec{u}$ គឺ :

$$\begin{cases} x &= x_P + tu_x \\ y &= y_P + tu_y \end{cases}$$

- **សមីការដេកាត ឬ កាតេសៀន.** គេថាចំណុចមួយ $M \in (\Delta)$ លុះត្រាតែគេកំណត់បានវ៉ិចទ័រ $(\overrightarrow{PM}, \vec{u})$ ដែលអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា គឺមានន័យថា៖

$$\begin{vmatrix} x - x_P & u_x \\ y - y_P & u_y \end{vmatrix} = 0$$

ឬថា $\varphi(M) = \varphi(P)$ ដែល

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(x,y) \longmapsto xu_y - yu_x$$

ឧទាហរណ៍ ៨. គេឱ្យបន្ទាត់បួន $(D_1), (D_2), (\Delta_1), (\Delta_2)$ ដែលមានសមីការ

$$(D_i) : \begin{cases} x = \alpha_i t + \beta_i \\ y = \gamma_i t + \delta_i \end{cases} \quad \text{និង} \quad (\Delta_i) : \ a_i x + b_i y = c_i$$

(i) ចូរបង្ហាញថា $(D_1) \parallel (D_2)$ លុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ ។

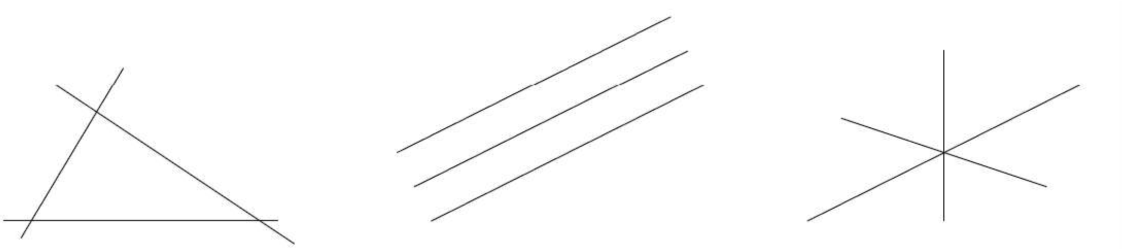
(ii) ចូរបង្ហាញថា $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ លុះត្រាតែ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$។

សំណើ. គេឱ្យបីចំណុច $M_i(x_i, y_i)$ កំណត់ក្នុងតម្រុយ $\mathcal{R}$ ។ គេថា ចំណុចទាំងបីរត់មិនត្រង់គ្នា លុះត្រាតែ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

លំហាត់ ៥. គេឱ្យបន្ទាត់ affine ចំនួនបីក្នុងលំហ $\mathcal{E}_2$ (លំហវិមាត្រ២) មានសមីការរៀងៗគ្នា៖ $\Delta_i : a_i x + b_i y = c_i$ $(i = 1, 2, 3, a_i, b_i \in \mathbb{R})$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ទាំងបីប្រសព្វគ្នា ឬស្របគ្នា ប្រសិនបើ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$



ភាពទូទៅ ភាពស្របគ្នា ភាពកាត់គ្នា

៣.១.៣ លំហរងអាហ្វីនរបស់ $\mathbb{R}^3$

យក $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$ ប្រដាប់ដោយតម្រុយកាតេសៀន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ យើងនឹងពិភាក្សាអំពី ប្លង់ និង បន្ទាត់ ក្នុង $\mathcal{E}$ ។

សមីការប្លង់ (Plane equations)

យើងនឹងសរសេរតាមពីររបៀប ចំពោះធាតុទាំងឡាយរបស់ប្លង់ (Π) គឺ៖

$$(\Pi)=P+\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$$

ដែល $\{\vec{u},\vec{v}\}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា និងមាន $P\,(x_P,y_P,z_P)$ និងម៉ាទ្រីស

$$\text{Mat}(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}$$

(i) **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ.** តាមនិយមន័យ គេថា $M(x,y)\in(\Delta)$ (បន្ទាត់) លុះត្រាតែមាន $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $M=P+t_1\vec{u}+t_2\vec{v}$ គឺ៖

$$\begin{cases} x=x_P+t_1u_x+t_2v_x \\ y=y_P+t_1u_y+t_2v_y \\ z=z_P+t_1u_z+t_2v_z \end{cases}$$

(ii) **សមីការដេកាត.** គេថា ចំណុច $M\in(\Pi)$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{PM}\in\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ គឺមានន័យថា

$\left\{\overrightarrow{PM}, \vec{u}, \vec{v}\right\}$ ជាសំណុំវ៉ិចទ័រអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ដែលអាចកំណត់បានដោយ៖

$$\begin{vmatrix} x - x_P & u_x & v_x \\ y - y_P & u_y & v_y \\ z - z_P & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

យើងអាចកំណត់បាន $\varphi(M) = \varphi(P)$ ដែល

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(x, y, z) \longmapsto x \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}$$

សមីការបន្ទាត់ (Straight line equations)

គេឱ្យ $(D) = P + \mathbb{R} \cdot \vec{u}$ ដែលមានចំណុច $P\,(x_P, y_P, z_P)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$:

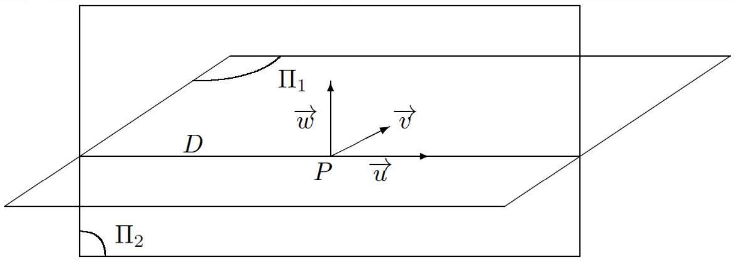
(i) **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ.** តាមនិយមន័យចំណុច $M(x, y) \in (\Delta)$ លុះត្រាតែ មានចំនួនពិត $t \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $M = P + t\vec{u}$ គឺ :

$$\begin{cases} x &= x_P + tu_x \\ y &= y_P + tu_y \\ z &= z_P + tu_z \end{cases}$$

(ii) **សមីការដេកាត.** គេអាចថាបន្ទាត់ (D) គឺជាសំណុំចំណុចទាំងឡាយ បានមកពីប្រសព្វរវាងប្លង់អាភីន $(\Pi_1) = P + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ និង $(\Pi_2) = P + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$ ដែលសំណុំវ៉ិចទ័រ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ជាគោលរបស់លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ (គេមានជម្រើសច្រើន ក្នុងការកំណត់យកវ៉ិចទ័រទាំងពីរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$) ។ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} & M \in (D) = (\Pi_1) \cap (\Pi_2) \\ \iff \quad & M \in (\Pi_1) \ \text{ និង } \ M \in \Pi_2 \end{aligned}$$

លទ្ធផលទទួលបានមកពីប្រសព្វរវាងសមីការពីរមានទម្រង់៖ $ax + by + cz = d$ ។



ចំណោទនៃភាពស្របគ្នា

i) បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយ ទិដ្ឋភាពមួយគឺ *មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ទាំងពីរអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ឬ កូលីនេអ៊ែរគ្នា ឬថា វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសទាំងពីរសមមាត្រគ្នា*។ គឺមានន័យថា ផលគុណវ៉ិចទ័រ (ផលគុណខ្វែង) រវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរត្រូវស្មើសូន្យៈ

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} \text{ ឬ } \vec{u}\times\vec{v} &= (u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+\\ &\qquad (u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & u_1 & v_1\\ \vec{j} & u_2 & v_2\\ \vec{k} & u_3 & v_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

ដែល $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ទាំងពីរ ។

ii) គេថា $(D)\parallel(\Pi)$ គឺសំដៅលើវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (D) អាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នាជាមួយវ៉ិចទ័រពីរទៀតដែលជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់ប្លង់ (Π) ។ ដូច្នេះ **ដេទែរមីណង់របស់វ៉ិចទ័រទាំងបីត្រូវស្មើសូន្យ**។

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}=0$$

ដែល $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (D) ហើយ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ ជាគោលរបស់ប្លង់ (Π) ។

iii) គេឱ្យប្លង់ $\Pi_1=\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ និងប្លង់ $\Pi_2=\text{Vect}\,(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$។ គេថាប្លង់ទាំងពីរ $\Pi_1\parallel\Pi_2$ គឺចង់សំដៅ

$$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$$

គេទាញបានដេទែរមីណង់ចំនួនពីរស្មើសូន្យ គឺៈ

$$\det(\vec{v}_1, \vec{u_1}, \vec{u}_2) = 0 \quad \text{និង} \quad \det(\vec{v}_2, \vec{u_1}, \vec{u}_2) = 0$$

លំហាត់អនុវត្តន៍. គេឱ្យសមីការដេកាតរបស់ប្លង់ (P) មួយ កាត់តាមចំណុច $A(2,0,0)$ និងដឹងថាបន្ទាត់ $(D_1) \parallel (P)$ និង $(D_2) \parallel (P)$ ដែលមានសមីការៈ

$$(D_1): \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{និង} \quad (D_2): \begin{cases} x+y+z &= -1 \\ x-2y+3z &= 2 \end{cases}$$

ចូររកប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយបន្ទាត់ $(D_1), (D_2)$ និង (D_3) ដែល (D_3) ដែលជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $B(1,2,-5)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (1,1,-1)$ ។

ចម្លើយ.

(i) *សមីការប្រសព្វរវាង* (P) *និង* (D_1)*:*

(ii) *សមីការប្រសព្វរវាង* (P) *និង* (D_2)*:*

(iii) *សមីការប្រសព្វរវាង* (P) *និង* (D_1)*:*

៣.២ អនុវត្តន៍អាហ្វីន

និយមន័យ ៣.៧.

យក $\mathcal{E}$ និង $\mathcal{F}$ ជាលំហអាហ្វីនពីរ តាមទិសដៅលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ និង $\mathbf{F}$ រៀងគ្នា ។ អនុវត្តន៍ $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ហៅថា *អនុវត្តន៍អាហ្វីន* បើមានអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ (អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរពីសំណុំ $\mathbf{E}$ ទៅ $\mathbf{F}$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\boxed{\forall (P, \vec{v}) \in \mathcal{E} \times \mathbf{E} : \quad \varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + f(\vec{v})}$$

ក្នុងករណី $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ ហើយ φ មួយទល់មួយ គេហៅ φ ថា **បម្លែងអាហ្វីន** លើសំណុំ $\mathcal{E}$ ។

និយមន័យនេះចង់បញ្ជាក់ថា គេបង្កើតបានអនុវត្តន៍អាភីនមួយ កាលណាគេស្គាល់រូបភាពរបស់ចំណុច P មួយ ព្រមទាំងអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ[១] f មួយ (ចំណុចផ្សេងៗទៀតបានមកពី $P + \vec{v}$ ចំពោះ $\vec{v} \in E$) ។

ឧទាហរណ៍ ៩. ជាទូទៅៈ អនុវត្តន៍អាហ្វីន $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ មានទម្រង់ៈ

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(X) = AX + B}$$

ដែល A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$, B លំដាប់ $m \times 1$ ហើយ $B = f(0)$ ដែល 0 ជាវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ ដូច្នេះ អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដៃគូរបស់ φ គឺ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ដែលកំណត់ដោយ

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) = AX$$

ករណី $m = n = 1$ គេកំណត់ $f(x) = -7x + 13$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍អាហ្វីន មានមេគុណ $A = -7$ និង $B = 13$ (សរសេរ $\varphi = f$)។

[១] *អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ ឬ បម្លែងលីនេអ៊ែរ*: $T : V \to W$ ហៅថា អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ ពីលំហ V ទៅលំហ W បើគ្រប់វ៉ិចទ័រ $v_1, v_2 \in V$ និងគ្រប់ស្កាលែរ $c \in \mathbb{R}$ គេបានៈ

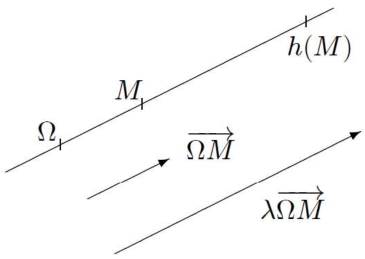
$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ T(cv_1) &= cT(v_1) \end{aligned}$$

សំណើ. លក្ខណៈខាងក្រោម មានសារៈសំខាន់៖

- ក្នុងនិយមន័យខាងលើ កាលណាគេស្គាល់ f នោះវាមានតែមួយគត់។ គេថា f គឺជា *ផ្នែកលីនេអ៊ែររបស់អនុវត្តន៍ φ* ហើយជាញឹកញាប់ គេតាង $f = \vec{\varphi}$ ។
- បើ $A, B \in \mathcal{E}$ នោះ $\varphi(B) = \varphi(A) + \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)$
- រូបភាពរបស់លំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$ តាម អនុវត្តន៍អាហ្វីន ពី $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{F}$ គឺជាលំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{F}$ ។
- រូបភាពច្រាសរបស់លំហអាហ្វីនរង $\mathcal{F}$ តាមអនុវត្តន៍អាភីនមួយ ពីសំណុំ $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{F}$ គឺជា *សំណុំទទេ ឬ ជាលំហរងអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$* ។
- អនុវត្តន៍អាភីន $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ មួយទល់មួយ លុះត្រាតែ $\vec{\varphi}$ គឺជាអ៊ីសូម៉ូភីស ពី $\mathbf{E}$ ទៅ $\mathbf{F}$ (គេបាន $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F}$) ។
- សំណុំនៃបម្លែងអាហ្វីនលើលំហ $\mathcal{E}$ (i.e. អនុវត្តន៍អាហ្វីនពី $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{E}$) គឺជាក្រុមប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $\circ$ (ហៅថា បណ្តាក់) ។ គេហៅ $(\mathcal{E}, \circ)$ ថា **ក្រុមអាហ្វីន** ។
- បម្លែងកិលលើលំហ $\mathcal{E}$ គឺជាបម្លែងអាហ្វីនលើលំហ $\mathcal{E}$ ។

និយមន័យ ៣.៨.

យក $\Omega \in \mathcal{E}$ និង $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ ។ គេហៅ **អូម៉ូតេស៊ី** មានផ្ចិត Ω ទម្រ λ គឺជាអនុវត្តន៍អាហ្វីន $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ កំណត់ដោយ គ្រប់ $M \in \mathcal{E}$: $\varphi(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$ ។



៣.២ អនុវត្តន៍អាហ្វីន

និយមន័យ ៣.៧.

យក $\mathcal{E}$ និង $\mathcal{F}$ ជាលំហអាហ្វីនពីរ តាមទិសដៅលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ និង $\mathbf{F}$ រៀងគ្នា ។ អនុវត្តន៍ $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ហៅថា *អនុវត្តន៍អាហ្វីន* បើមានអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ (អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរពីសំណុំ $\mathbf{E}$ ទៅ $\mathbf{F}$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\boxed{\forall (P, \vec{v}) \in \mathcal{E} \times \mathbf{E} : \quad \varphi(P + \vec{v}) = \varphi(P) + f(\vec{v})}$$

ក្នុងករណី $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ ហើយ φ មួយទល់មួយ គេហៅ φ ថា **បម្លែងអាហ្វីន** លើសំណុំ $\mathcal{E}$ ។

និយមន័យនេះចង់បញ្ជាក់ថា គេបង្កើតបានអនុវត្តន៍អាភីនមួយ កាលណាគេស្គាល់រូបភាពរបស់ចំណុច P មួយ ព្រមទាំងអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ[១] f មួយ (ចំណុចផ្សេងៗទៀតបានមកពី $P + \vec{v}$ ចំពោះ $\vec{v} \in \mathbf{E}$) ។ ដូច្នេះ គ្រប់ $M, P \in \mathcal{E}$ និងគ្រប់ $\vec{v} \in \mathbf{E}$ ហើយ $M = P + \vec{v}$ គេបាន៖

$$\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(M)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{PM}\right)$$

ព្រោះថា គ្រប់ $M, P \in \mathcal{E}$ គេកំណត់សរសេរខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(M)} &= \varphi(M) - \varphi(P) = \varphi(M) - \varphi(\Omega) - \varphi(P) + \varphi(\Omega) \\
&= f\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) - f\left(\overrightarrow{\Omega P}\right) \\
&= f\left(\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega P}\right) \\
&= f\left(\overrightarrow{PM}\right) = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{PM}\right)
\end{aligned}$$

យើងអាចជ្រើសយក $\Omega \in \mathcal{E}$ បានស្រេចចិត្ត និងតាង $\vec{\varphi} = f$ ។ ដូច្នេះ មានអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $\vec{\varphi}$

[១] *អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ ឬ បម្លែងលីនេអ៊ែរ*: $T : V \to W$ ហៅថា អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ ពីលំហ V ទៅលំហ W បើគ្រប់វ៉ិចទ័រ $v_1, v_2 \in V$ និងគ្រប់ស្កាលែរ $c \in \mathbb{R}$ គេបាន៖

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \text{និង} \quad T(cv_1) = cT(v_1)$$

តែមួយគត់ ដែលមិនអាស្រ័យទៅនឹងការជ្រើសរើសយកចំណុច Ω ឡើយ ។

ក្នុងន័យខាងលើនេះ គេហៅ *អនុវត្តន៍អាភីន $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ បើមានចំណុច $B \in \mathcal{F}$ និងមាន អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $\vec{\varphi} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់* :

$$\boxed{\varphi(M) = \vec{\varphi}(M) + B \quad \text{ឬ} \quad \varphi(M) = \varphi(P) + \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{PM}\right)}$$

ដែល $\varphi(P) = B \in \mathcal{F}$ ។

ជាទូទៅៈ អនុវត្តន៍អាហ្វីន $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ មានទម្រង់ៈ

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(X) = AX + B}$$

ដែល A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$, B លំដាប់ $m \times 1$ ហើយ $B = f(\vec{0})$ ដែល $\vec{0}$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យក្នុង $\mathbb{R}^n$ ។ ដូច្នេះ អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដៃគូរបស់ φ គឺ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ដែលកំណត់ដោយ

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = AX$$

ករណី $m = n = 1$ គេកំណត់ $f(x) = -7x + 13$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍អាហ្វីន មានមេគុណ $A = -7$ និង $B = 13$ (សរសេរ $\varphi = f$)។

ឧទាហរណ៍ ៩. ចូររកអនុវត្តន៍អាភីន f មានមេគុណ -2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(3) = -4$ ។

ចម្លើយ. គេមានទម្រង់ទូទៅៈ

$$f(x) = -2x + b$$

តាមសម្មតិកម្ម $f(3) = -4$ ។ ដោយជំនួស $x = 3$ ក្នុងសមីការខាងលើ គេបាន

$$-2 \cdot 3 + b = -4 \quad \Longrightarrow \quad b = 2$$

ដូច្នេះ អនុវត្តន៍អាភីន $f(x) = -2x + 2$ មានចំណុច $b = 2 \in \mathbb{R}$ និងមានអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $\vec{f}(x) = -2x$ ។

ឧទាហរណ៍ ១០. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍អាភីន ។

ចម្លើយ. ដោយសរសេរប្រព័ន្ធជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស គេបានៈ

អនុវត្តន៍អាហ្វីនសំខាន់ៗ

(i) *អនុគមន៍ថេរ* គឺជាអនុវត្តអាហ្វីនមួយ ដែលភ្ជាប់អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ "សូន្យ" ។

(ii) *បម្លែងកិល* (translation)

និយមន័យ ៣.៨.

បើ $\mathcal{E}$ ជាលំហអាភីន ភ្ជាប់លំហទិសដៅ $\mathbf{E}$ និង $\overrightarrow{u} \in \mathbf{E}$ នោះគេហៅ **បម្លែងកិល** របស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}$ តាងដោយ $t_{\overrightarrow{u}}$ គឺជាអនុវត្តន៍មួយ ដែល

$$\forall\, M \in \mathcal{E}: \quad t_{\overrightarrow{u}}(M) = M + \overrightarrow{u}$$

គេអាចស្រាយបញ្ជាក់បានយ៉ាងងាយ អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរដែលភ្ជាប់នឹងបម្លែងកិល គឺជាអនុវត្តន៍ខ្លួនឯង ។ ផ្ទុយទៅវិញ បើ φ គឺជាអនុវត្តន៍អាភីន ដែលមាន $\overrightarrow{\varphi}$ គឺជាអនុវត្តន៍ខ្លួនឯង នោះគេថា φ គឺជាបម្លែងកិល ។

(iii) បើ $\mathbf{E}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រមួយ ដោយចាត់ទុកថាជាលំហអាភីនមានទិសដៅខ្លួនវា និង φ គឺជាអនុវត្តន៍អាភីន នោះគេបាន៖

$$\forall\, M \in \mathbf{E}: \ \varphi(M) = \varphi(0) + \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \varphi(0) + \overrightarrow{\varphi}(M)$$

Note! បើ φ ជាអនុវត្តន៍អាភីន និងកំណត់យក $\varphi(0) = 0$ នោះ φ ជាអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ។

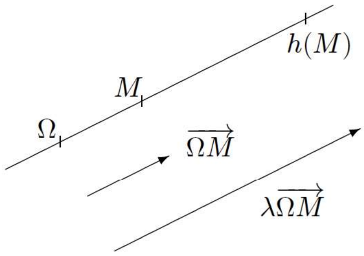
(iv) *អូម៉ូតេស៊ី* (homothety)

និយមន័យ ៣.៩.

យក $\Omega \in \mathcal{E}$ និង $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ ។ គេហៅ **អូម៉ូតេស៊ី** មានផ្ចិត Ω តាមសមាមាត្រ λ គឺជាអនុវត្តន៍អាហ្វីន $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ កំណត់ដោយ៖

$$\forall\, M \in \mathcal{E}: \ h(M) = \Omega + \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

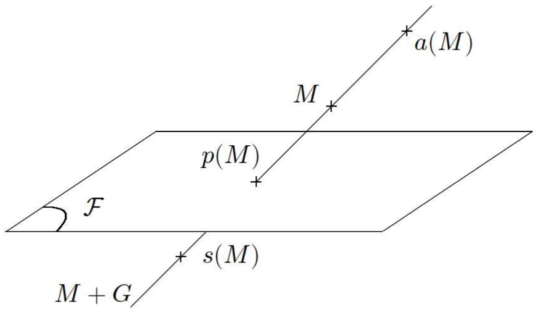
Ω ជាចំណុចនឹង (fixed point) របស់ h និងមានអនុវត្តលីនេអ៊ែរ $\overrightarrow{h} = k \cdot \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ។



(v) *ចំណោលអាភីន.*

និយមន័យ ៣.១០.

បើ $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$ ដែល $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ ជាលំហវ៉ិចទ័ររងរបស់ $\mathbf{E}$, យក $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \mathbf{F}$ និង $M \in \mathcal{E}$ នោះមានចំណុចតែមួយគត់ $M' \in \mathcal{F}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{M'M} \in G$ ។ បើគេតាង $p(M) = M'$ នោះគេហៅអនុវត្តន៍ p ថាជា **ចំណោលអាភីន** លើលំហ $\mathcal{F}$ តាមទិសដៅលំហវ៉ិចទ័ររង $\mathbf{G}$។



- *ចំណោលលើប្លង់ ៖* យក $\mathcal{E}$ ជាលំហអាភីនតាមទិសដៅលំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ ។ យក (P) ជាប្លង់អាភីន និង (Δ) ជាបន្ទាត់អាភីនមិនស្របនឹង (P) ។ ចំណោលអាភីនលើ (P) ស្របនឹងបន្ទាត់ (Δ) គឺជាអនុវត្តន៍ p លើ $\mathcal{E}$ ដែលគ្រប់ចំណុច $M \in \mathcal{E}$ ឱ្យរូបភាព $M' \in \mathcal{E}$ — ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ស្របទៅនឹង (Δ) កាត់តាមចំណុច M ។ គេបាន

$$p(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} M' \in (P) \\ (MM') // (\Delta) \end{cases}$$

NB : M' is the projection of M onto (P) parallel to (Δ)

- *ចំណោលលើបន្ទាត់ ៖* គេឱ្យ (D) ជាបន្ទាត់អាហ្វីន និង (Π) ប្លង់អាហ្វីន ដែលមិនស្របនឹង (D)។ គេហៅ ចំណោលអាហ្វីនលើ (D) ស្របទៅនឹងប្លង់ (Π) គឺជាអនុវត្តន៍ q លើលំហ

អាហ្វីន $\mathcal{E}$ ដែលគ្រប់ចំណុច M ឱ្យរូបភាព M' — ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (D) ជាមួយនឹងប្លង់មួយស្របទៅនឹង (Π) កាត់តាម M ។ គេបាន

$$p(M)=M' \iff \begin{cases} M'\in(D)\\ (MM')\,//(\Pi)\end{cases}$$

NB. M' is the projection of M onto (D) parallel to (Π)

(vi) **អនុវត្តន៍ស៊ីមេទ្រីអាហ្វីន** (affine symmetry)

និយមន័យ ៣.១១.

តាមនិយមន័យខាងលើ បើគេតាង

$$s(M)=M'+\overrightarrow{MM'}$$

នោះអនុវត្តន៍ s ហៅថា **អនុវត្តន៍ស៊ីមេទ្រីអាភីន** ធៀបនឹងលំហរង $\mathcal{F}$ តាមទិសដៅ $\mathbf{G}$។

សម្គាល់. គេអាចកំណត់តម្លៃ $s(M)$ ដែលធ្វើឱ្យ $\overrightarrow{Ms(M)}\in\mathbf{G}$ ហើយចំណុចកណ្តាលរបស់ $[Ms(M)]$ ស្ថិតក្នុងលំហ $\mathcal{F}$ ។ ប៉ុន្តែ ជាចាំបាច់ត្រូវបង្ហាញអំពី *អត្ថិភាពនិងភាពមានតែមួយគត់* របស់ចំណុចមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈទាំងពីរនេះ!

(vii) តាមន័យដូចគ្នា សន្មត $\mathbf{F}$ គឺជាអ៊ីពែរប្លង់មួយរបស់លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbf{E}$ និងយក $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ ។ បើគេតាង

$$a(M)=M'+\lambda\cdot\overrightarrow{M'M}$$

នោះ a *គឺជាអនុវត្តន៍អាភីនមួយ មានគោល $\mathcal{F}$ តាមទិសដៅ $\mathbf{G}$ និងយកសមាមាត្រ λ* ។

(ពិនិត្យរូបខាងលើ!)

លំហាត់អនុវត្តន៍.

(i) គេឱ្យ f ជាអនុវត្តន៍អាភីន ដែលកំណត់ដោយៈ

$$f^2=\mathrm{Id}$$

បង្ហាញថា f កំណត់បានយ៉ាងហោចណាស់ ចំណុចនឹងមួយ។

(ii) ក្នុង $\mathbb{R}^3$ ប្រដាប់ដោយទម្រង់អឺគ្លីដ និង អាភីន និងមានតម្រុយដេកាត $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ គេកំណត់ $f_1 = (-1, 1, 1), f_2 = (1, -1, 1), f_3 = (1, 1, -1)$ និងចំណុច $M_0(3, -1, 0)$ ។ យក $\mathbf{F} = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ និង $\mathbf{G} = \mathbb{R} \cdot f_3$ (ដូច្នេះ $E = F \oplus G$) និង $(\Pi) = M_0 + \mathbf{F}$។
ចូររកកូអរដោនេរបស់ $\varphi(M(x, y, z))$ ជាអនុគមន៍នឹង x, y, z កាលណា φ គឺជា៖

ក) ចំណោលលើ (Π) តាមទិសដៅ $\mathbf{G}$?

ខ) អនុវត្តន៍ឆ្លុះធៀបនឹង (Π) តាមទិសដៅ $\mathbf{G}$?

គ) អនុវត្តន៍អាភីន មានគោល (Π) សមាមាត្រ -2 និងតាមទិសដៅ $\mathbf{G}$?

សរុបលក្ខណៈ: ពិនិត្យលក្ខណៈដូចខាងក្រោម ៖

- ក្នុងនិយមន័យខាងលើ កាលណាគេស្គាល់ f (អនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ) នោះវាមានតែមួយគត់ ។ គេថា f គឺជា *ផ្នែកលីនេអ៊ែររបស់ φ* ហើយជាញឹកញាប់ គេតាង $f = \vec{\varphi}$ ។
- បើ $A, B \in \mathcal{E}$ នោះ $\varphi(B) = \varphi(A) + \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)$
- រូបភាពនៃលំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$ តាមអនុវត្តន៍អាហ្វីន $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ គឺជាលំហអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{F}$ ។
- រូបភាពច្រាសរបស់លំហអាហ្វីនរង $\mathcal{F}$ តាមអនុវត្តន៍អាភីនមួយ ពីសំណុំ $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{F}$ គឺជា *សំណុំទទេ ឬ ជាលំហរងអាហ្វីនរងរបស់ $\mathcal{E}$* ។
- អនុវត្តន៍អាភីន $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ មួយទល់មួយ លុះត្រាតែ $\vec{\varphi}$ គឺជាអ៊ីសូម៉ូភីស ពី $\mathbf{E}$ ទៅ $\mathbf{F}$ (គេបាន $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F}$) ។
- សំណុំនៃបម្លែងអាហ្វីនលើលំហ $\mathcal{E}$ (i.e. អនុវត្តន៍អាហ្វីនពី $\mathcal{E}$ ទៅ $\mathcal{E}$) គឺជាក្រុមប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $\circ$ (ហៅថា បណ្តាក់) ។ គេហៅ $(\mathcal{E}, \circ)$ ថា **ក្រុមអាហ្វីន** ។
- បម្លែងកិលលើលំហ $\mathcal{E}$ គឺជាបម្លែងអាហ្វីនលើលំហ $\mathcal{E}$ ។

សន្មតតាង $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ហៅថា **សំណុំនៃអនុវត្តអាភីនពីលំហអាភីន $\mathcal{E}$ ទៅលំហអាភីន $\mathcal{F}$** ហើយ $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ ហៅថា **សំណុំនៃអនុវត្តអាភីនលើ $\mathcal{E}$** ។ $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ហៅអនុវត្តន៍ខ្លួនឯងលើ $\mathbf{E}$ ។

សម្គាល់. យក $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ ។ គេបាន

i) φ គឺជាបម្លែងកិល លុះត្រាតែ $\vec{\varphi} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ។

ii) φ គឺជាអនុគមន៍ថេរ លុះត្រាតែ $\vec{\varphi} = \vec{0}$ (អនុវត្តន៍សូន្យ)

iii) φ គឺជាអូម៉ូតេស៊ី មានទម្រ $\lambda \notin \{0, 1\}$ លុះត្រាតែ $\vec{\varphi} = \lambda \cdot \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ។

iv) *ចំណុចនឹង* (fixed point) : បើ $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ជាអនុវត្តន៍អាភីន នោះចំណុចនឹងរបស់ φ គឺជាចំណុច $\Omega \in \mathcal{E}$ ដែល $\varphi(\Omega) = \Omega$ ។

៣.៣ បារីសង់

សំណើ. គេឱ្យចំណុច $M_1, \ldots, M_p \in \mathcal{E}$ និងស្កាលែរ $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ដែល $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ ។ ដូច្នេះ គេរកបានចំណុចតែមួយគត់ $G \in \mathcal{E}$ ដែល

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

ម្យ៉ាងទៀត បើ M គឺជាចំណុចទូទៅមួយរបស់ $\mathcal{E}$ គេបាន

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG}$$

សម្រាយបញ្ជាក់. គេយកចំណុចនឹងមួយ $\Omega \in \mathcal{E}$ ។ យក

$$G = \Omega + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_i} \qquad \text{(why?)}$$

ត្រូវបង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$ (ជាអត្ថិភាព) ។ បន្ទាប់មក យកចំណុចទូទៅមួយ $M \in \mathcal{E}$ រួច ប្រើទំនាក់ទំនងសាល (កាត់តាមចំណុច Ω) បង្ហាញថាៈ

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG}$$

ចេញពីទំនាក់ទំនងនេះ គេបង្ហាញភាពមានតែមួយគត់ ។

និយមន័យ ៣.១២.

តាមសញ្ញាណក្នុងសំណើខាងលើ គេហៅ ចំណុច G ថាជា **បារីសង់** (barycentre ឬ centroid ឬ center of mass ឬ center of gravity) នៃគ្រួសារចំណុចមានទម្ងន់ $\{(M_1, \lambda_1), \ldots, (M_p, \lambda_p)\}$ ។

- បើ $\sum \lambda_i \neq 0, 1$ នោះមានចំណុចមួយ G ដែល $\sum \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$ តែគេមាន

ទំនាក់ទំនង

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MM_i} = \sigma\overrightarrow{MG}$$

ដែល $\sigma = \sum \lambda_i$ ។

- ក្នុងករណីដែលទម្ងន់ λ_i ស្មើគ្នា ស្មើនឹង $\frac{1}{p}$ នោះចំណុច G ហៅថា **អ៊ីសូបារីសង់** (isobarycentre) ។
- គេកំណត់សរសេរ បារីសង់ $G = \text{Bar}\big\{(M_1, \lambda_1), \cdots, (M_p, \lambda_p)\big\}$

សម្គាល់. តើគេគណនាកូអរដោនេរបស់ចំណុច G ក្នុងតម្រុយកាតេសៀនបានតាមរបៀបណា? ដើម្បីឆ្លើយនឹងសំណួរនេះ សូមពិនិត្យលក្ខណៈនៃបារីសង់ក្នុងប្លង់ដូចខាងក្រោម៖

បារីសង់ក្នុងប្លង់

បារីសង់នៃពីរចំណុច

- គេឱ្យ A និង B ជាចំណុចពីរក្នុងប្លង់ និង α និង β ជាចំនួនពិត ។ គេថា មានចំណុចតែមួយគត់ G ក្នុងប្លង់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \text{បើ} \quad \alpha + \beta \neq 0$$

ចំណុចនេះ ហៅថាបារីសង់នៃប្រព័ន្ធចំណុចមានទម្ងន់ $(A, \alpha), (B, \beta)$ ដែលតាងដោយ៖

$$G = \text{Bar}\big\{(A, \alpha), (B, \beta)\big\}$$

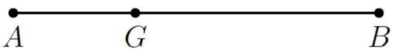
បកស្រាយ. គ្រប់ចំនួនពិត α និង β គេបាន៖

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad &\iff \quad \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff \quad \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \quad (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \\
&\iff \quad (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

i) បើ $\alpha+\beta\neq 0$ នោះគេបាន $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ។ ដូច្នេះ គេបានអត្ថិភាព និងភាពមានតែមួយគត់របស់ចំណុច G ។

ii) បើ $\alpha+\beta=0$ នោះគេបានទំនាក់ទំនង $\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ ។ សមីការនេះ គ្មានចម្លើយទេ ប្រសិនបើ $A\neq B$ និង $\beta\neq 0$ ហើយមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ប្រសិនបើ $A=B$ ឬ $\beta=0$ ។

Ex. គេឱ្យពីរចំណុច A និង B ។ ចូរដៅចំណុច $G=\text{Bar}\big\{(A,2),(B,1)\big\}$ ។



$$\begin{aligned} G=\text{Bar}\{(A,2),(B,1)\} &\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\\ &\iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

- *លក្ខណៈអូម៉ូសែន.* យក $k\in\mathbb{R}$ ។ បើ $k\neq 0$ នោះគេបាន

$$G=\text{Bar}\big\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\big\}$$

បកស្រាយ. បើ $k\neq 0$ គេបាន :

$$\begin{aligned} G=\text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB})=k\overrightarrow{0}\\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff G=\text{Bar}\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}\end{aligned}$$

Ex. គេអាចបង្ហាញថា G ជាបារីសង់នៃ A និង B ដែលមានផលបូកមេគុណស្មើ 1 ។

យក $G=\text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ។ គេបាន៖

$$G=\text{Bar}\left\{\left(A,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right),\left(B,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$$

ដែល $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1$ ។

- *ទីតាំងបារីសង់ — លក្ខណៈ.*

i) បើ $A\neq B$ នោះគេបាន $G\in(AB)$ ឬថា ចំណុច A,B និង G រត់ត្រង់ជួរគ្នា ។ ម្យ៉ាងទៀត បើ α និង β មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះគេបាន $G\in[AB]$ ។

បកស្រាយ. គេបាន

$$G=\operatorname{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{GA}$ និង $\overrightarrow{GB}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា គេបាន G,A និង B រត់ត្រង់ជួរគ្នា ។ ម្យ៉ាងទៀត ៖

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

ដូច្នេះ បើ α និង β មានសញ្ញាដូចគ្នា គេបាន $0<\frac{\beta}{\alpha+\beta}<1$ ។ ដូច្នេះ $G\in[AB]$ ។

ii) បើ $A\neq B$ នោះគ្រប់ចំណុចរបស់ (AB) គឺជាបារីសង់នៃចំណុច A និង B ដែលគេអាចជ្រើសរើស មេគុណបានយ៉ាងងាយ។

បកស្រាយ. បើ $M\in(AB)$ នោះ $\overrightarrow{AM}$ និង $\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរគ្នា ។ ដូច្នេះ មានចំនួនពិត k ដែល

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff \overrightarrow{AM}-k(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{0}\\ &\iff \overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\\ &\iff (k-1)\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

ដោយ $k-1-k=-1\neq 0$ គេបាន

$$M=\operatorname{Bar}\{(A,k-1),(B,-k)\}$$

- *អ៊ីសូបារីសង់.* បើ $\alpha=\beta$ នោះ G ហៅថា អ៊ីសូបារីសង់នៃចំណុច A និង B ។ ដូច្នេះ G គឺជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ $[AB]$ ។

- *ការបង្រួមវិចទ័រ.* គ្រប់ចំណុច M គេបាន៖

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

បកស្រាយ. គ្រប់ចំណុច M ៖

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}&=\alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)\\&=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}\\&=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\underbrace{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

Ex. យក $G=\text{Bar}\{(A,2),(B,5)\}$ ។ ចូរសរសេរ $\overrightarrow{AG}$ ជាអនុគមន៍ទៅនឹង $\overrightarrow{AB}$ ។

- *កូអរដោនេបារីសង់.* យក $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ជាតម្រុយមួយនៅក្នុងប្លង់ និងយក $A\left(x_A,y_A\right)$ និង $B\left(x_B,y_B\right)$ ។ បើ $G=\text{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ នោះគេបាន៖

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta},\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$$

បកស្រាយ. គ្រប់ចំណុច M គេមាន $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ ។ ចំពោះ $M=O$ គេបាន

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$$

ដូច្នេះ

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

គេបាន កូអរដោនេរបស់ $\overrightarrow{OG}$ គឺ៖

$$\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B\\\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A+\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{pmatrix}$$

Ex. ក្នុងតម្រុយមួយក្នុងប្លង់ យក $A(3;-2)$ និង $B(-1;4)$ ។ ចូររកកំណត់កូអរដោនេរបស់ចំណុច G ជាបារីសង់នៃ $(A,2)$ និង $(B,3)$ ។ គេបាន $G\left(\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right)$ ។

បារីសង់នៃបីចំណុច

និយមន័យ និង លក្ខណៈរបស់បារីសង់នៃបីចំណុច ដូចគ្នាទៅនឹងបារីសង់នៃពីរចំណុចក្នុងប្លង់ដែរ ។ ដូច្នេះ យើងបន្តពិនិត្យមើលលក្ខណៈផ្តុំនៃបារីសង់របស់បីចំណុច ។

លក្ខណៈ:. គេឱ្យបីចំណុច A, B និង C ។ យក α, β និង γ ជាចំនួនពិតបី ដែល $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ និង $\alpha+\beta \neq 0$ ។

$$\text{បើ } \begin{cases} G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \\ H = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \end{cases} \quad \text{នោះ} \quad G = \mathrm{Bar}\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$$

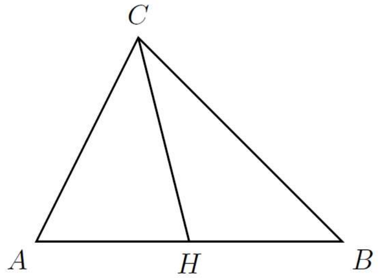
បកស្រាយ. ឧបមាថា $\begin{cases} G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \\ H = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \end{cases}$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{BH} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

សន្និដ្ឋាន៖

$$G = \mathrm{Bar}\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

Ex. គេឱ្យបីចំណុច A, B និង C ។ ចូរដៅចំណុច $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$?



អនុវត្តន៍ ៣.៩. (ពិភាក្សាក្រុម)

(i) *លក្ខណៈអូម៉ូសែន.* យក k ជាចំនួនពិត និង $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ។ បើ $k \neq 0$ ចូរបង្ហាញថា $G = \mathrm{Bar}\{(A,k\alpha),(B,k\beta),(C,k\gamma)\}$ ។

(ii) *ទីតាំងរបស់បារីសង់.* យក $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ។ ចូរបង្ហាញថាបើពាចំណុច A, B និង C មិនរត់ត្រង់ជួរគ្នា នោះគេបាន $G \in (ABC)$ (ប្លង់ ABC) ឬថាចំណុច A, B, C និង G កូប្លានែរនឹងគ្នា ។

(iii) ចូរបង្ហាញថា បើពាចំណុច A, B និង C មិនរត់ត្រង់ជួរគ្នា នោះគ្រប់ចំណុចរបស់ប្លង់ (ABC) គឺជាបារីសង់នៃចំណុច A, B និង C ដែលមានមេគុណនឹងត្រូវបានអ្នកជ្រើសរើស ។

(iv) *អ៊ីសូបារីសង់.* បើ $\alpha = \beta = \gamma$ នោះចំណុច G ហៅថាអ៊ីសូបារីសង់នៃចំណុច A, B និង C។ ចូរបង្ហាញថា ចំណុច G គឺជា ទីប្រជុំទម្ងន់របស់ត្រីកោណ ABC ។

(v) *ការបង្រួមវ៉ិចទ័រ.* ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំណុច M គេបាន $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១១. ប្រៀបធៀបបារីសង់ G_1 របស់ $(M_1,\lambda_1),\dots,(M_p,\lambda_p)$, និងបារីសង់ G_2 របស់ $(M_1,10\lambda_1),\dots,(M_p,10\lambda_p)$ ។

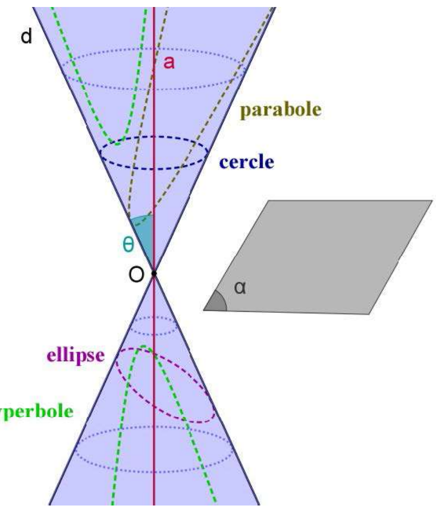
ជំពូក ៤

ផ្នែកកោនិក

៤.១ សេចក្ដីផ្ដើម

ក្នុងមុខវិជ្ជាគណិតវិភាគ គេឃើញខ្សែកោងតាងឱ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ត្រូវបានគេហៅថា ‘parabole” ហើយ អនុគមន៍ខ្លះ ក្រាហ្វមានមែកពីរដូចគ្នា $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ហៅថា ‘hyperbole” ។ រង្វង់ដែលមានផ្ចិត $\Omega(a, b)$ និងកាំ r គឺជាសំណុំចំនុច $M(x, y)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការដឺក្រេទី២ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ។ ក្រៅពីនេះ ចំពោះ «រង្វង់រាងមូលពងក្រពើ» ហៅថា «អេលីប» ។

ខ្សែកោងទាំងអស់នេះ ត្រូវបានគេសិក្សាតាំងពីបុរាណមក ដែលវាមានតួនាទីសំខាន់បម្រើក្នុងវិស័យរូបវិទ្យា (ជាពិសេស ផ្នែកតារាសាស្ត្រ) ។ ខ្សែកោងទាំងនេះ អាចត្រូវបានកំណត់ថា ជាប្រសព្វរវាងកោនពីរទល់កំពូលគ្នា ជាមួយនឹងប្លង់មួយ :



៤.១.១ សមីការកំណុំរបស់កោនិក

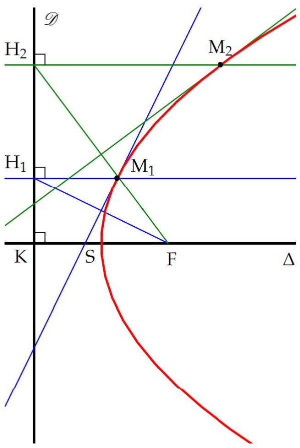
និយមន័យ ៤.១.

គេឱ្យ F ជាចំណុចនឹង, $\mathscr{D}$ ជាបន្ទាត់ និង e ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យ ($F \notin \mathscr{D}$)។ ចំពោះចំណុច M មួយក្នុងប្លង់ តាង H ជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ចំណុច M មកលើ $\mathscr{D}$ ។ កោនិកមួយ ដែលមានកំណុំ F គឺជាសំណុំចំណុច M ទាំងឡាយណា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

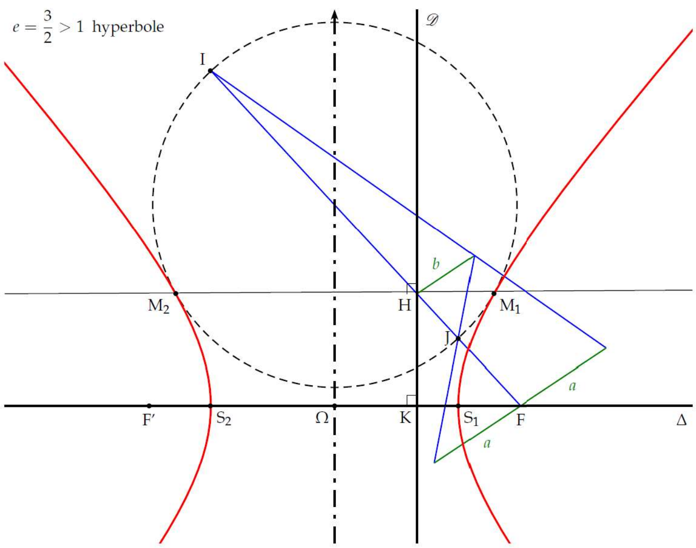
$$\Gamma = \left\{ M : \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

ដែល e ហៅថា **អេសង់ទ្រីស៊ីតេ** (eccentricity) ហើយបន្ទាត់ $\mathscr{D}$ ហៅថា **ប្រាប់ទិស** (ឬ ឌីរិកទ្រីក = directrix) របស់កោនិក ។ បន្ទាត់ Δ ដែលកាត់កែងនឹង $\mathscr{D}$ កាត់តាមកំណុំ F ហៅថា **អ័ក្សកំណុំ** របស់កោនិក ។ ក្នុងករណី ៖

- បើ $0 < e < 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *អេលីប* (ellipse)
- បើ $e = 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *ប៉ារាបូល* (parabola)
- បើ $e > 1$ នោះសំណុំ Γ ហៅថា *អ៊ីពែរបូល* (hyperbola)



$e = 1: \ MF = MH$



$e \neq 1: \ MF = eMH$

អេសង់ទ្រីស៊ីតេ និង កំណុំ

ទ្រឹស្តីបទ ១.១: (អេសង់ទ្រីស៊ីតេ និង កំណុំ)

តាង p ជាចម្ងាយពីកំណុំ F ទៅប្រាប់ទិស $\mathscr{D}$ ។ អាស្រ័យលើតម្លៃរបស់អេសង់ទ្រីស៊ីតេ e គេទទួលបានកោនិក ដូចខាងក្រោម៖

(i) បើ $e=1$ នោះកោនិក ជាប៉ារ៉ាបូល ដែលមានសមីការ $Y^2=2pX$ នៅក្នុងតម្រុយ $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$។ S ជាចំណុចកំពូលរបស់ប៉ារ៉ាបូល។

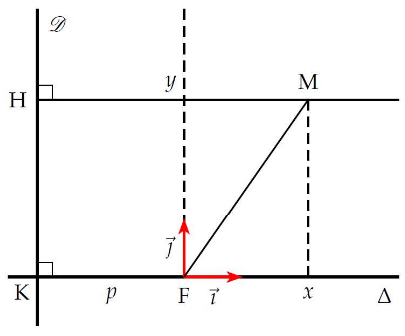
(ii) បើ $e\neq 1$ នោះ កោនិកមានផ្ចិត Ω និងកំណុំទីពីរ F' ឆ្លុះគ្នានឹងកំណុំ F ធៀបនឹង Ω ។ សមីការរបស់វានៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ មានទម្រង់ ៖

- បើ $e<1$ នោះសមីការកោនិក $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ជា អេលីប ។
- បើ $e>1$ នោះសមីការកោនិក $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ជា អ៊ីពែបូល ។

ដូច្នេះ គេបាន៖

$$a^2=\frac{e^2p}{(1-e^2)^2}\quad\text{និង}\quad b^2=\frac{e^2p}{|1-e^2|}$$

NB: អថេរ X និង Y បានមកពីការប្តូរគោល!



តាង p ជាចម្ងាយរវាង F និងប្រាប់ទិសរបស់កោនិក។ ចំនុច M មានកូអរដោនេ (x,y) នៅក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ $\left(F,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេបាន M ស្ថិតនៅលើកោនិកដែលមានកំណុំ F, ប្រាប់ទិស $\mathscr{D}$ និង

អេសង់ទ្រីស៊ីតេ e លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{aligned}\frac{MF}{MH}=e &\iff MF^2=e^2MH^2\\ &\iff x^2+y^2=e^2(x+p)^2\\ &\iff x^2+y^2=e^2x^2+2e^2px-e^2p^2=0\\ &\iff \left(1-e^2\right)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0\end{aligned}$$

សិក្សាករណីនីមួយៗ៖

i) បើ $e=1$ គេបាន៖

$$S\left(-\frac{p}{2},0\right) \quad \text{និង} \quad \begin{cases} X=x+\frac{p}{2}\\ Y=y\end{cases}$$

ក្នុងតម្រុយ $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$: សមីការ $Y^2=2pX$ គឺជាប៉ារ៉ាបូល មានអ័ក្ស Δ និងកំពូល S ។

ii) ករណី $e\neq 1$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned}\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2&=0\\ \left(1-e^2\right)\left(x^2-\frac{2e^2p}{1-e^2}x\right)+y^2&=e^2p^2\\ \left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2-\frac{e^4p^2}{1-e^2}+y^2&=e^2p^2\\ \left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^4p^2}{1-e^2}+e^2p^2\\ \left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^4p^2+e^2p^2-e^4p^2}{1-e^2}\\ \left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2+y^2&=\frac{e^2p^2}{1-e^2}\end{aligned}$$

ដូច្នេះតាង $\Omega\left(\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$ និង $\begin{cases} X=x-\frac{e^2p}{1-e^2}\\ Y=y\end{cases}$

ក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេបានសមីការ

$$\left(1-e^2\right) X^2 + Y^2 = \frac{e^2 p}{1-e^2}$$

ដែល

$$\frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}} = 1, \tag{a}$$

ដែលអាស្រ័យទៅនឹងសញ្ញារបស់ $1-e^2$ ។

- ករណី $1-e^2 > 0 \Leftrightarrow e < 1$ គេបាន :

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2} \quad \text{និង} \quad b^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

  ដូច្នេះសមីការ (a) : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ គឺជាអេលីប មានផ្ចិត Ω និងអ័ក្សឆ្លុះ (ΩX) និង (ΩY) ។

- ករណី $1-e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1$ គេបាន :

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2} \quad \text{និង} \quad b^2 = -\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

  ដូច្នេះសមីការ (a) : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ គឺជាអ៊ីពែរបូល មានផ្ចិត Ω និងអ័ក្សឆ្លុះ (ΩX) និង (ΩY) ។

៤.២ ធាតុសម្គាល់ (Characteristic elements)

៤.២.១ ប៉ារ៉ាបូល

ឧទាហរណ៍ ១២. ចូរកំណត់ធាតុសម្គាល់របស់ប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោមៈ

$$y^2 - 3x - 4y - 2 = 0$$

គេរកចំណុចកំពូល S របស់ប៉ារ៉ាបូលៈ

$$\begin{aligned} y^2-3x-4y-2=0 &\Leftrightarrow (y-2)^2-4-3x-2=0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2=3(x+2) \end{aligned}$$

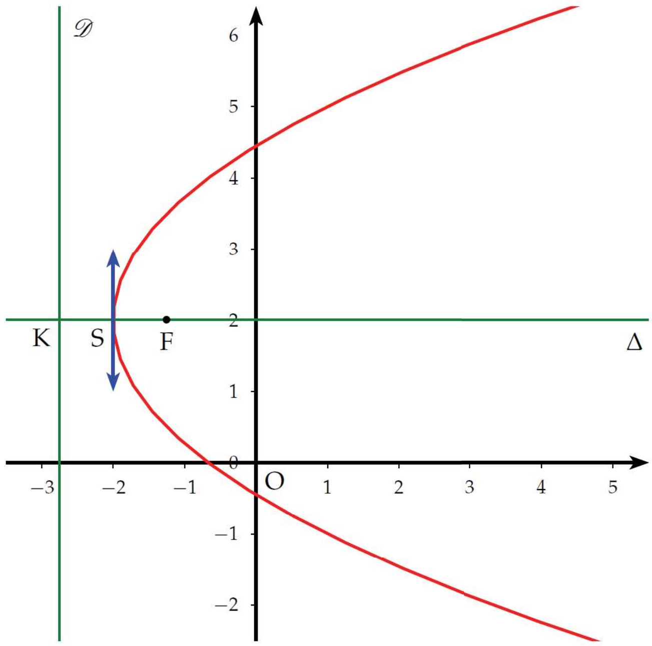
ដូច្នេះ $S(-2;2)$ និងដោយប្តូរអថេរ $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y-2 \end{cases}$ នោះគេបានសមីការ : $Y^2=3X$ ដែល $3=2p \Leftrightarrow p=\frac{3}{2}$ ។

ដោយ S កណ្ដាល់ $[KF]$ គេបាន :

$$K=\left(x_S-\frac{p}{2},y_S\right)=\left(-\frac{11}{4},2\right)$$

និង

$$F=\left(x_S+\frac{p}{2},y_S\right)=\left(-\frac{5}{4},2\right)$$



៤.២.២ អេលីប

ទ្រឹស្តីបទ ២.១: (អេលីប)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ដែល } a^2 > b^2$$

នោះសមីការនេះជាសមីការ អេលីប។
បើគេតាង $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ នោះគេទទួលបានធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{និង} \quad \Omega F = c$$

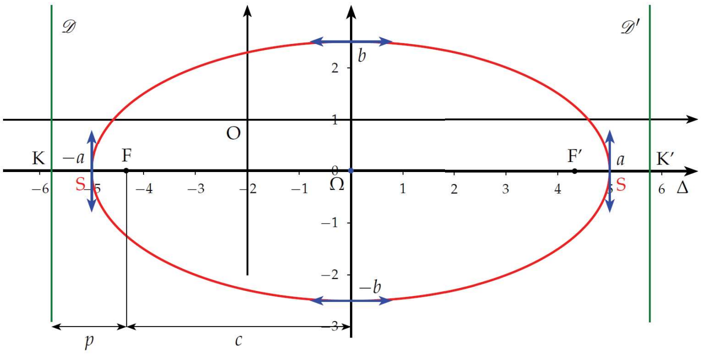
សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ ក្នុងទម្រង់៖ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអេលីប ។ លើសពីនេះ បើ កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x នោះអ័ក្សសំខាន់ (major axis) របស់អេលីប ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x ដូច្នេះ $a^2 > b^2$ ។

ដោយ $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ ។ ដូច្នេះ ៖

- $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2 = a^2 - b^2$ គេបាន $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e = \frac{c}{a}$ ។
- $b^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2\left(1-e^2\right)}{e^2} = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega F = \frac{e^2p}{1-e^2} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

ឧទាហរណ៍ ១៣. ចូរកំណត់ធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 25 = 0$$



សមីការកោនិកជាអេលីប មាន $a = 5$ និង $b = \frac{5}{2}$ ៖

$$c = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \quad \Omega F = c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

៤.២.៣ អ៊ីពែរបូល

ទ្រឹស្តីបទ ២.២: (អ៊ីពែរបូល)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយនៅក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

នោះសមីការកោនិកនេះជា អ៊ីពែរបូល ។

បើគេតាង $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ នោះគេបាន ធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{et} \quad \Omega F = c$$

គេបានសមីការអាស៊ីមតូត : $Y = \frac{b}{a}X$ និង $Y = -\frac{b}{a}X$

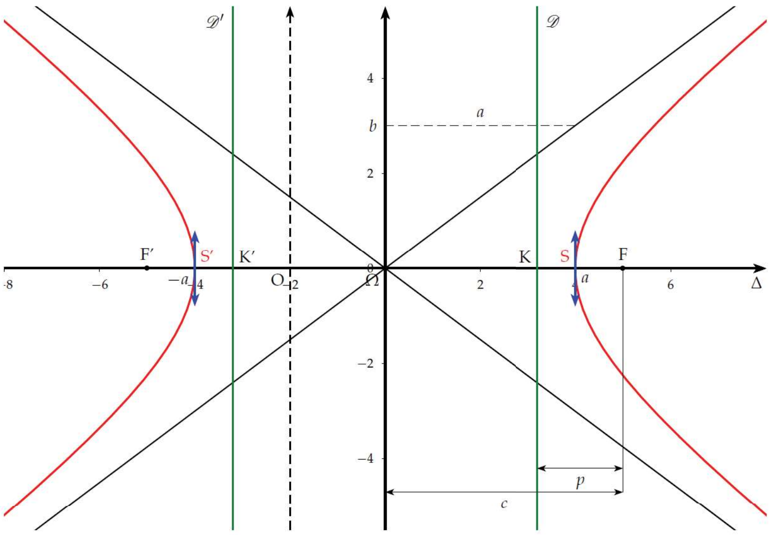
សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ ក្រោមទម្រង់ : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអ៊ីពែរបូល ។ ដោយគេមាន $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ ។ គេបាន :

- $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2 = a^2 + b^2$ នោះគេបាន $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e = \frac{c}{a}$ ។

- $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2(e^2-1)}{e^2} = \frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega\mathrm{F} = \frac{e^2p}{e^2-1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

ឧទាហរណ៍ ១៤. ចូរគណនាធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$



គេមាន $a = 4$ និង $b = 3$ ។ ដូច្នេះ

$$c = 5,\quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4},\quad p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5},\quad \Omega F = c = 5,\quad \text{អាស៊ីមតូត}:\ \mathrm{T}Y = \pm\frac{3}{4}$$

៤.៥ ខ្សែកោងដឺក្រេទី២មានពីរអថេរ

និយមន័យ ៤.៣.

គេហៅខ្សែកោងដឺក្រេទីពីរថាជា **កោនិក** បើខ្សែកោងនេះ គឺជាសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ស្ថិតក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេអរតូនរមេ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអាំព្លីស៊ីតខាងក្រោម ៖

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad \text{ដែល} \quad |a| + |b| \neq 0$$

ដែលមេគុណ a, b, c, d និង e គឺជាចំនួនពិត ។

សម្គាល់.

- កោនិកកំណត់បានឈ្មោះផ្សេងៗគ្នា អាស្រ័យទៅតាមកំណាត់កោននីមួយៗ បង្កើតដោយប្លង់មួយ ។ ជនជាតិក្រិច ជាអ្នកកំណត់ឈ្មោះកោនិកនេះ ថាជា៖ អេលីប (ellipse), អ៊ីពែរបូល (hyperbola) និង ប៉ារ៉ាបូល (parabola) ។
- លក្ខខណ្ឌ ដែល $|a| + |b| \neq 0$ មានន័យថា a និង b មិនអាចស្មើសូន្យព្រមគ្នានោះទេ ។

Conic sections without a center

ទ្រឹស្តីបទ ៥.១

នៅពេលផលគុណ $ab = 0$ ដែល $|a| + |b| \neq 0$ នោះគេបាន :

(i) ករណី $a = 0$ និង $c = 0$ និងតាមសញ្ញារបស់ $\Delta_1' = d^2 - be$ នោះ

- បើ $\Delta_1' > 0$ គេបានបន្ទាត់ដេកពីរ $y = y_1$ និង $y = y_2$
- បើ $\Delta_1' = 0$ គេបានបន្ទាត់ដេកមួយ $y = y_0$
- បើ $\Delta_1' < 0$ នោះមិនមានចំណុចណាមួយកើតឡើងទេ។

(ii) ករណី $a = 0$ និង $c \neq 0$ នោះគេបានប៉ារ៉ាបូល ដែលមានអ័ក្សស្របទៅនឹងអ័ក្ស (Ox) មានសមីការ $Y^2 = 2pX$

(iii) ករណី $b = 0$ និង $d = 0$ និងតាមសញ្ញារបស់ $\Delta_2' = c^2 - ae$ នោះ

- បើ $\Delta_2' > 0$ គេបានបន្ទាត់ឈរពីរ $x = x_1$ និង $x = x_2$
- បើ $\Delta_2' = 0$ គេបានបន្ទាត់ឈរមួយ $x = x_0$
- បើ $\Delta_1' < 0$ នោះមិនមានចំណុចណាមួយកើតឡើងទេ។

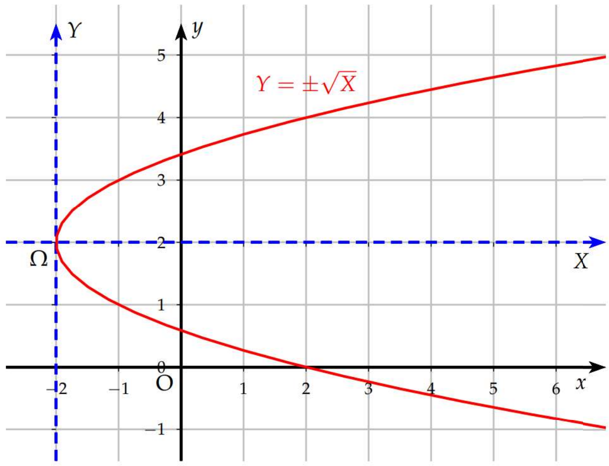
(iv) ករណី $b = 0$ និង $d \neq 0$ នោះគេបានប៉ារ៉ាបូលមួយ ដែលមានអ័ក្សស្របទៅនឹងអ័ក្ស (Oy) មានសមីការ $Y = \alpha X^2$

ឧទាហរណ៍ ១៥. ចូរសង់ parabole មានសមីការ $y^2 - x - 4y + 2 = 0$

គេមានទម្រង់ :

$$(y-2)^2 - 4 - x + 2 = 0 \iff (y-2)^2 = x + 2$$

ដោយប្តូរគោលរបស់តម្រុយ ៖ $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ និងកំណត់យក $\Omega(-2; 2)$ គេបាន ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $Y^2 = X$ ឬ $Y = \pm\sqrt{X}$ ។



Conic sections with a center

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២

នៅពេលផលគុណ $ab \neq 0$ នោះកោនិកត្រូវមានផ្ចិតមួយ និងមានសមីការក្រោមទម្រង់

ខាងក្រោម ៖

$$aX^2 + bY^2 = k \quad \text{មានផ្ចិត} \quad \Omega\left(-\frac{c}{a}, -\frac{d}{b}\right)$$

(i) ករណី $ab > 0$:

- បើ $k = 0$ នោះគេបាន កោនិកបង្រួមមកនៅត្រឹមមួយចំណុច Ω
- បើ $k < 0$ នោះគ្មានចំណុចណាមួយរបស់កោនិកកើតឡើងទេ
- បើ $k > 0$ នោះគេបាន កោនិកគឺជាអេលីប មានសមីការ $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$

(ii) ករណី $ab < 0$:

- បើ $k = 0$ នោះកោនិកគឺជាបណ្តុំរបស់បន្ទាត់ពីរ មានសមីការ $Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$ ហើយឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស (ΩX) និង (ΩY)
- បើ $k \neq 0$ នោះកោនិកគឺជាអ៊ីពែរបូល មានសមីការ $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ និងមានសមីការអាស៊ីមតូត $Y = \pm\frac{\beta}{\alpha}X$ ។

សម្គាល់. គ្រប់កោនិកទាំងអស់មានអ័ក្សឆ្លុះចំនួនពីរគឺ (ΩX) និង (ΩY) ។

ឧទាហរណ៍ ១៦. ចូរសង់ខ្សែកោងខាងក្រោម ៖

a) $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0$

b) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0$

ចម្លើយ.

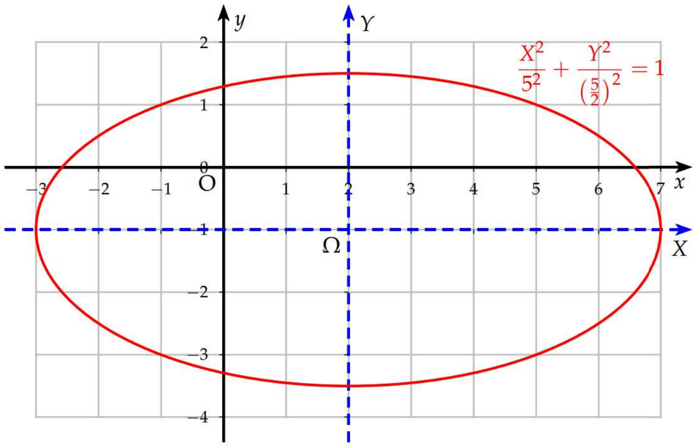
a) គេបាន

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4\left(y^2 + 2y\right) - 17 = 0$$
$$(x-2)^2 - 4 + 4(y+1)^2 - 4 - 17 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 25$$

ដោយតាង $\alpha^2 = 25$ និង $\beta^2 = \frac{25}{4}$ និងដោយប្តូរគោលរបស់តម្រុយ :

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

និងយក $\Omega(2;-1)$ គេបានអេលីបមានសមីការ $\frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$ ។



b)

គេរកចំណុចកំពូល S របស់ប៉ារ៉ាបូលៈ

$$\begin{aligned} y^2 - 3x - 4y - 2 = 0 &\iff (y-2)^2 - 4 - 3x - 2 = 0 \\ &\iff (y-2)^2 = 3(x+2) \end{aligned}$$

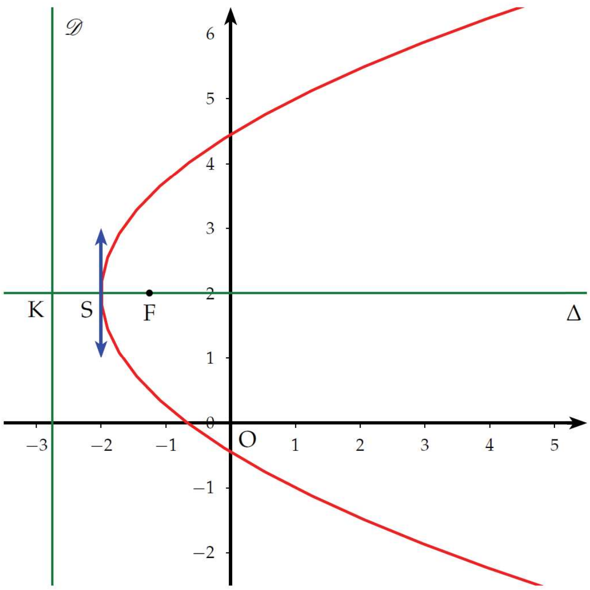
ដូច្នេះ $S(-2,2)$ និងដោយប្តូរអថេរ $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-2 \end{cases}$ នោះគេបានសមីការ : $Y^2 = 3X$ ដែល $3 = 2p \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$ ។

ដោយ S កណ្តាល $[KF]$ គេបាន :

$$K = \left(x_S - \frac{p}{2}, y_S\right) = \left(-\frac{11}{4}, 2\right)$$

និង

$$F = \left(x_S + \frac{p}{2}, y_S\right) = \left(-\frac{5}{4}, 2\right)$$



៤.២.២ អេលីប

ទ្រឹស្តីបទ ២.១: (អេលីប)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{ដែល } a^2>b^2$$

នោះសមីការនេះជាសមីការ អេលីប។

បើគេតាង $c=\sqrt{a^2-b^2}$ នោះគេទទួលបានធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e=\frac{c}{a} \quad , \quad p=\frac{b^2}{c} \quad \text{និង} \quad \Omega F=c$$

សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ក្នុងទម្រង់៖ $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអេលីប ។ លើសពីនេះ បើកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x នោះអ័ក្សធំ (major axis) របស់វា ស្ថិតនៅលើអ័ក្ស x ដូច្នេះ $a^2>b^2$ ។

ដោយ $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$ ។ គេបាន ៖

- $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2=a^2-b^2$ គេបាន $e^2=\frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e=\frac{c}{a}$ ។
- $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}\Leftrightarrow p^2=\frac{b^2\left(1-e^2\right)}{e^2}=\frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^4}{c^2}\Leftrightarrow p=\frac{b^2}{c}$
- $\Omega F=\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{b^2}{p}=b^2\times\frac{c}{b^2}=c$

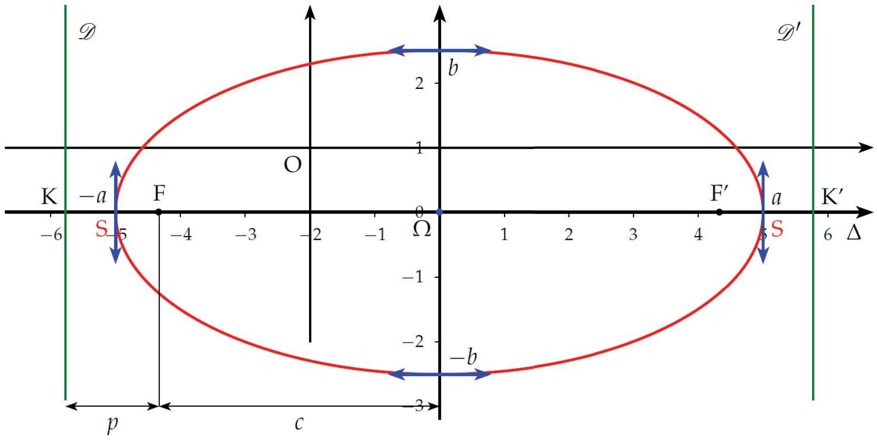
ឧទាហរណ៍ ១៣. ចូរកំណត់ធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$(x-2)^2+4(y+1)^2-25=0$$

យក $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y+1 \end{cases}$ គេបាន $\Omega(2,-1)$ ។ ដូច្នេះ៖

$$X^2+4Y^2=25 \Longleftrightarrow \frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$$

ដូច្នេះ សមីការកោនិកជាអេលីប មាន $a=5$ និង $b=\frac{5}{2}$ ៖



ហើយធាតុសំខាន់ៗរួមមាន៖

$$c = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \quad \Omega F = c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

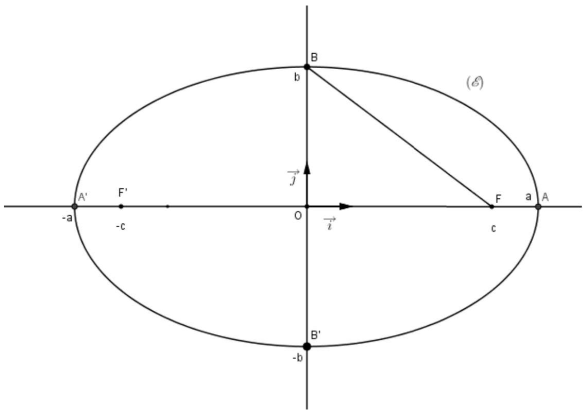
តារាងសង្ខេបនៃធាតុសម្គាល់៖ ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេបាន

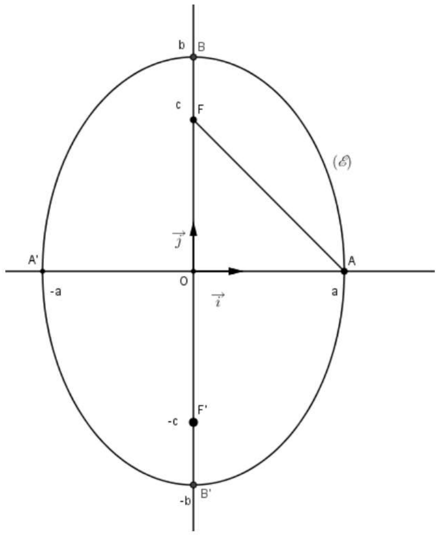
- ករណី $a > b$, ផ្ចិត $O(0,0)$:

សមីការ	$(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
ប្រវែងពាក់កណ្ដាលកំណុំ	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
អិចសង់ទ្រីស៊ីតេ	$e = \frac{c}{a}$
កំពូល	$A(a,0); A'(-a,0)$ — $B(0,b); B'(0,-b)$
ផ្ចិត	$O(0,0)$
អ័ក្ស	អ័ក្សកំណុំ : (AA') — អ័ក្សធំ : $[AA']$ — អ័ក្សតូច : $[BB']$
កំណុំ	$F(c,0)$ និង $F'(-c,0)$
បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	$(\mathscr{D}) : x = \frac{a^2}{c}$ និង $(\mathscr{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$
ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ	$p = \frac{b^2}{c}$
រង្វង់សំខាន់ៗ	រង្វង់ធំ : $\mathscr{C}(0;a)$ — រង្វង់តូច : $\mathscr{C}(0;b)$

- ករណី $a < b$, ផ្ចិត $O(0,0)$:

សមីការ	$(\mathscr{E}):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
ប្រវែងពាក់កណ្ដាលកំណុំ	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
អិចសង់ទ្រីស៊ីតេ	$e=\frac{c}{b}$
កំពូល	$A(a,0); A'(-a,0)$ — $B(0,b); B'(0,-b)$
ផ្ចិត	$O(0,0)$
អ័ក្ស	អ័ក្សកំណុំ : (BB') — អ័ក្សធំ : $[BB']$ — អ័ក្សតូច : $[AA']$
កំណុំ	$F(0,c)$ និង $F'(0,-c)$
បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	$(\mathscr{D}): y=\frac{b^2}{c}$ និង $(\mathscr{D}'): y=-\frac{b^2}{c}$
ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ	$p=\frac{a^2}{c}$
រង្វង់សំខាន់ៗ	រង្វង់ធំ : $\mathscr{C}(0;b)$ — រង្វង់តូច : $\mathscr{C}(0;a)$





N.B : ផ្ទៃក្រឡារបស់អេលីប កំណត់ដូចផ្ទៃរបស់រង្វង់ដែរ គឺៈ $\mathscr{A}_{(\mathcal{E})}=\pi a.b$

៤.២.៣ អ៊ីពែរបូល

ទ្រឹស្ដីបទ ២.២: (អ៊ីពែរបូល)

បើគេសង់សមីការកោនិកមួយនៅក្នុងតម្រុយ $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ ក្រោមទម្រង់ៈ

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

នោះសមីការកោនិកនេះជា អ៊ីពែរបូល ។

បើគេតាង $c = \sqrt{a^2+b^2}$ នោះគេបាន ធាតុសម្គាល់ ដូចខាងក្រោម៖

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad p = \frac{b^2}{c} \quad \text{និង} \quad \Omega F = c$$

គេបានសមីការអាស៊ីមតូត : $Y = \frac{b}{a}X$ និង $Y = -\frac{b}{a}X$

សម្រាយបញ្ជាក់. គេដឹងថាសមីការដឺក្រេទី២ ក្រោមទម្រង់ : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ គឺជាអ៊ីពែរបូល ។ ដោយគេមាន $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ និង $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}$ ដូច្នេះ $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ ។ គេបាន :

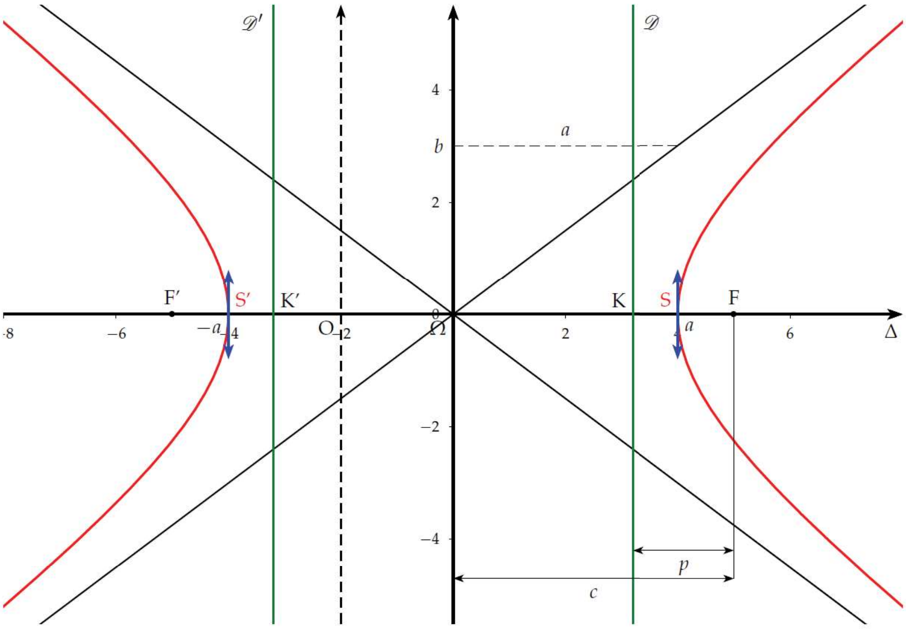
- $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ ដោយតាង $c^2 = a^2+b^2$ នោះគេបាន $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ ដែល $e = \frac{c}{a}$ ។
- $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2\left(e^2-1\right)}{e^2} = \frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$
- $\Omega \mathrm{F} = \frac{e^2p}{e^2-1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$

ឧទាហរណ៍ ១៤. ចូរគណនាធាតុសម្គាល់របស់កោនិកខាងក្រោម៖

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$$

ដោយតាង $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y \end{cases}$ នោះគេបាន $\Omega(2,0)$ ។ ដូច្នេះ គេបានអ៊ីពែរបូល

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$$



គេមាន $a = 4$ និង $b = 3$ ។ ដូច្នេះ

$$c = 5, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}, \quad p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}, \quad \Omega F = c = 5, \quad \text{អាស៊ីមតូត}: \ Y = \pm\frac{3}{4}$$

៤.៣ កំណុំពីររបស់អេលីប និង អ៊ីពែរបូល

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១

គេកំណត់បានទំនាក់ទំនងខាងក្រោមៈ

- ផលបូកចម្ងាយពីចំណុច M នៅលើអេលីបទៅកំណុំទាំងពីររបស់វា F និង F' គឺស្មើនឹងប្រវែងអ័ក្សធំរបស់វា។

  $$MF + MF' = 2a$$

  ច្រាសមកវិញ គ្រប់ចំណុច M ដែលមានផលបូកចម្ងាយទៅចំណុចថេរ ពីរ F និង F' មានតម្លៃថេរ គឺជាចំណុចនៅលើអេលីប ដែលមានកំណុំ F និង F' ។

- ផលសងរវាងចម្ងាយពីចំណុច M នៅលើអ៊ីពែរបូលមួយ ទៅកំណុំទាំងពីរ F និង F'

ស្មើនឹងប្រវែងរវាងចំណុចកំពូលទាំងពីររបស់វា ។

$$\left|MF - MF'\right| = 2a$$

ច្រាសមកវិញ គ្រប់ចំណុច M ដែលមានផលសងចម្ងាយទៅចំណុចថេរ ពីរ F និង F' មានតម្លៃថេរ គឺជាចំណុចនៅលើអ៊ីពែរបូលមានកំណុំ F និង F' ។

សម្រាយបញ្ជាក់.

i/ *ចំពោះអេលីប* ៖ គេមាន

$$\frac{MF}{MH} = e \quad \text{ដែល} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

គេបាន $MF = eMH$ និង $MF' = eMH'$ ។ ដូច្នេះ

$$MF + MF' = e(MH + MH')$$

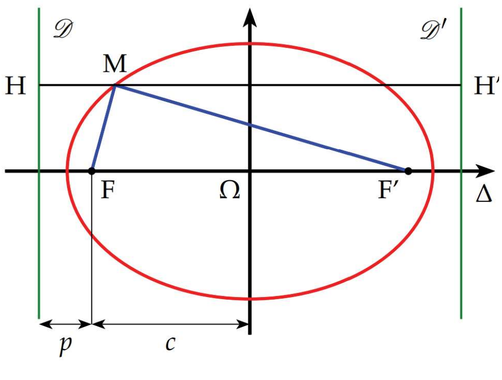
ឬ

$$\begin{aligned} MH + MH' = HH' &= 2(p + c) \\ &= 2\left(\frac{b^2}{c} + c\right) = 2\left(\frac{b^2 + c^2}{c}\right) = \frac{2a^2}{c} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$MF + MF' = e \times \frac{2a^2}{c} = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$$

ច្រាសមកវិញ ក៏ពិតដែរ!



ចំណាំ. វិធីងាយមួយដើម្បីគូសអេលីប គឺត្រូវចងខ្សែមួយទៅនឹងចំណុចបង្គោលពីរ ដោយបន្ទូរទុកប្រវែងខ្សែវែងជាងចម្ងាយរបស់ចំណុចទាំងពីរ ។ បន្ទាប់មកយកចុងប៊ិចទាញខ្សែឱ្យតឹង រួចបង្វិលចុងប៊ិចជុំវិញចំណុចទាំងពីរនេះ ។

ii/ *ចំពោះអ៊ីពែរបូល*៖ គេមាន

$$\frac{MF}{MH} = e \quad \text{ដែល } c^2 = a^2 + b^2$$

គេបាន $MF = eMH$ និង $MF' = eMH'$ ។ ដូច្នេះ

$$|MF - MF'| = e\,|MH - MH'|$$

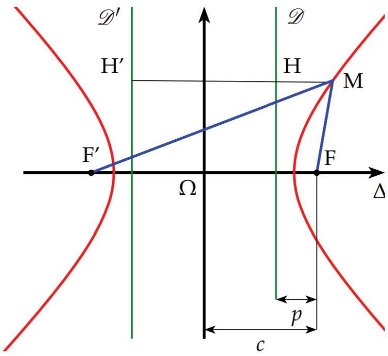
ឬ

$$\begin{aligned}|MH - MH'| = HH' &= 2(c-p)\\ &= 2\left(c - \frac{b^2}{c}\right) = 2\left(\frac{c^2-b^2}{c}\right)\\ &= \frac{2a^2}{c}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$|MF - MF'| = e \times \frac{2a^2}{c} = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$$

ច្រាសមកវិញ ពិត!



៤.៤ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់កោនិក

• សមីការអេលីប

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១

អេលីបមួយមានសមីការ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ កំណត់ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ៖

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{ដែល} \quad t\in[0,2\pi[$$

ជំនួសសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទៅក្នុងសមីការដេកាត គេបាន៖

$$\begin{aligned} \frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2} &= 1 \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2} &= 1 \\ \Longleftrightarrow \quad \cos^2 t+\sin^2 t &= 1 \end{aligned}$$

ឯកលក្ខណភាពនេះ ពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $t\in[0,2\pi[$ ។

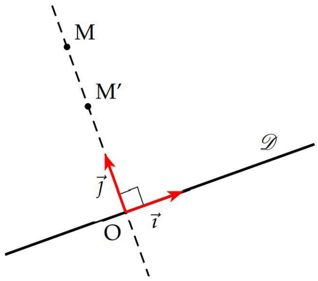
អនុគមន៍អាហ្វីនអរតូកូណាល់

និយមន័យ ៤.២.

យក $\mathscr{D}$ ជាបន្ទាត់មួយ ។ គេហៅថា *អនុគមន៍អាភីនអរតូកូណាល់លើអ័ក្ស $\mathscr{D}$ តាមសមាមាត្រ $k\in\mathbb{R}^*$* គឺជាអនុគមន៍អាភីន f ដែលគ្រប់ចំណុច M កំណត់បានចំណុច M' ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ ដែល O គឺជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ M មកលើ $\mathscr{D}$ ។

ដ្យាក្រាមខាងក្រោម មានសមាមាត្រ k នៅចន្លោះ 0 និង 1។ ម៉ាទ្រីសដែលទាក់ទងនឹងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ កំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

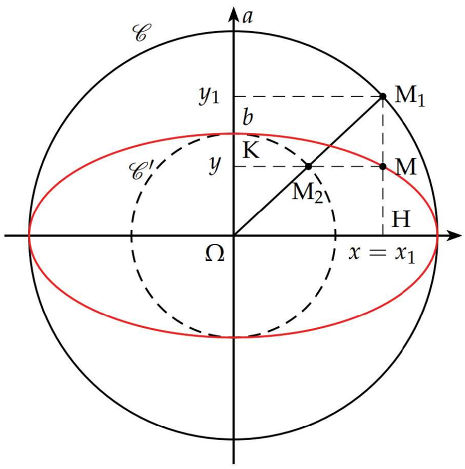


ទ្រឹស្តីបទ ៤.២

ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{j}\right)$ គេកំណត់

- រង្វង់ $(\mathcal{C})$ មានកាំ a
- អេលីប $(\mathcal{E})$ មានសមីការ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ដែល $a > b$

ដូច្នេះ អេលីប $(\mathcal{E})$ គឺជាបម្លែងរបស់រង្វង់ $(\mathcal{C})$ តាមអនុគមន៍អាភីនអរតូកូណាល់លើអ័ក្ស (Ωx) មានសមាមាត្រ $\frac{b}{a}$ ។



Note. To determine a point M of the ellipse from a point M_1 of the circle $\mathscr{C}$, we determine the point M_2, intersection of the circle $\mathscr{C}'$ of radius b with $[\Omega M_1]$. The point M is then the intersection of the lines $(M_1 H)$ and $(M_2 K)$.

សម្រាយ. តាមរូបខាងលើ គេតាងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់រង្វង់ $(\mathcal{C})$ និងរង្វង់ $(\mathcal{C})'$ មានកាំរៀងគ្នា

a និង b ដោយ

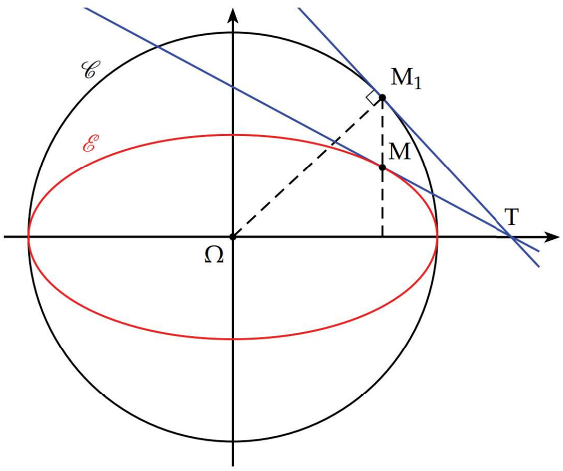
$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x_1 = a\cos t \\ y_1 = a\sin t \end{cases}, \qquad (\mathcal{C}') : \begin{cases} x_2 = b\cos t \\ y_2 = b\sin t \end{cases}$$

ដោយអាប់ស៊ីសរបស់ M គឺជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ M_1 លើ (Ox) ហើយអរដោនេរបស់ M គឺជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ M_2 លើ (Oy) នោះគេបាន កូអរដោនេរបស់ M គឺ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ ដែលត្រូវគ្នានឹងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់អេលីប $(\mathcal{E})$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{y_2}{y_1} = \frac{b\sin t}{a\sin t} = \frac{b}{a}$ ។ ដូច្នេះ ពីរង្វង់ $(\mathcal{C})$ ទៅអេលីប $(\mathcal{E})$ កំណត់បាន អនុគមន៍អាភីនអរតូកូណាល់លើអ័ក្ស (Ωx) តាមសមាមាត្រ $\frac{b}{a}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៣

គេឱ្យ $M_1 \in (\mathcal{C})$ និងកំណត់ M ជាចំណោលអរតូកូណាល់របស់ចំណុច M_1 លើអ័ក្ស (Ωx) តាមសមាមាត្រកំណត់មួយ ។ គេបាន បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច M_1 នៅលើរង្វង់ $(\mathcal{C})$ និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច M នៅលើអេលីប $(\mathcal{E})$ ត្រូវកាត់អ័ក្ស (Ωx) ត្រង់ចំណុចតែមួយ T ។



សម្រាយ.

- ចំពោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់អេលីប $(\mathcal{E})$:

$$\overrightarrow{\Omega M} : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \text{គេបានដេរីវេ} \quad \frac{\mathrm{d}\Omega\vec{M}}{\mathrm{d}t} : \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \end{cases}$$

បន្ទាប់មក សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះអេលីបត្រង់ចំណុច M ដោយស្គាល់មេគុណប្រាប់ទិស $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ និងចំណុចប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស (Ωx) ត្រង់ $(x_T, 0)$?

- ចំពោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្ររបស់រង្វង់ $(\mathcal{C})$:

$$\overrightarrow{\Omega M_1} : \begin{cases} x_1 = a\cos t \\ y_1 = a\sin t \end{cases} \quad \text{គេបានដេរីវេ} \quad \frac{\mathrm{d}\Omega\vec{M}}{\mathrm{d}t} : \begin{cases} x_1' = -a\sin t \\ y_1' = a\cos t \end{cases}$$

រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ចំណុច M_1 ដោយស្គាល់មេគុណប្រាប់ទិស $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}$ និងចំណុចប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស (Ωx) ត្រង់ $(x_{T_1}, 0)$?

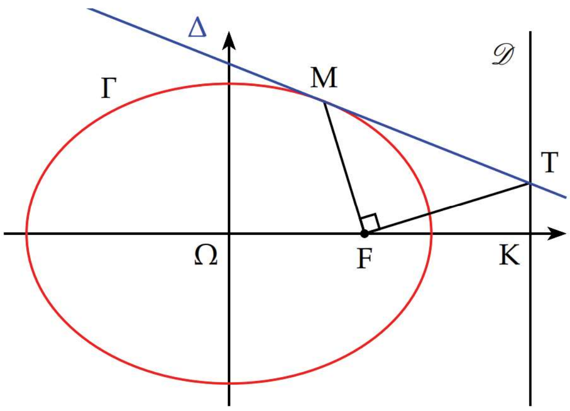
ត្រូវបង្ហាញថា $x_T = x_{T_1}$?

ទ្រឹស្តីសំណង់បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងកោនិកមួយ

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤

យក (Γ) ជាកោនិកមួយ ដែលមានកំណុំ F និងប្រាប់ទិស $(\mathscr{D})$ ។ បន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ទៅនឹងកោនិក (Γ) នៅត្រង់ចំណុច $M \in (\Gamma)$ ដែលមិនស្ថិតនៅលើអ័ក្សកំណុំ ត្រូវប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ $(\mathscr{D})$ ត្រង់ចំណុច T មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$$



យក ចំណុច $M(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ ជាអេលីបមានសមីការ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ។ គេបាន $\Omega K = \frac{a^2}{c}$

និង $\Omega F = c$ ។ ដូច្នេះ

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

និងដេរីវេធៀបនឹង x ត្រង់ x_0 គេបាន ៖

$$2y_0'y_0 = -\frac{2b^2}{a^2}x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_0' = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

ដូច្នេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ M គឺ : $y = y_0'(x - x_0) + y_0$ ។ គេបាន

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow a^2y_0y - a^2y_0^2 = -b^2x_0x + b^2x_0^2$$
$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \Longleftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

ព្រោះ $M(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0x}{a^2}\right)$$

នៅត្រង់ចំណុច T គេបាន $x_T = \frac{a^2}{c}$ ។ ដូច្នេះ $y_T = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right)$ ។ គេបាន កូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ

$$\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{និង} \quad \overrightarrow{FT} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{FM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FT}} &= (x_0 - c)\left(\frac{a^2}{c} - c\right) + b^2\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \\ &= \frac{a^2 - c^2}{c}(x_0 - c) + \frac{b^2}{c}(c - x_0) = 0 \quad \text{ព្រោះ} \quad a^2 - c^2 = b^2 \end{aligned}$$

□

Note. បន្ទាត់ប៉ះចំពោះអ៊ីពែរបូល គឺមានបំណកស្រាយដូចគ្នាដែរ ។

សមីការអ៊ីពែរបូលធៀបនឹងអាស៊ីមតូត

ទ្រឹស្តីបទ ៤.៥

គេឱ្យអ៊ីពែរបូល (Γ) មានសមីការដេកាត ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

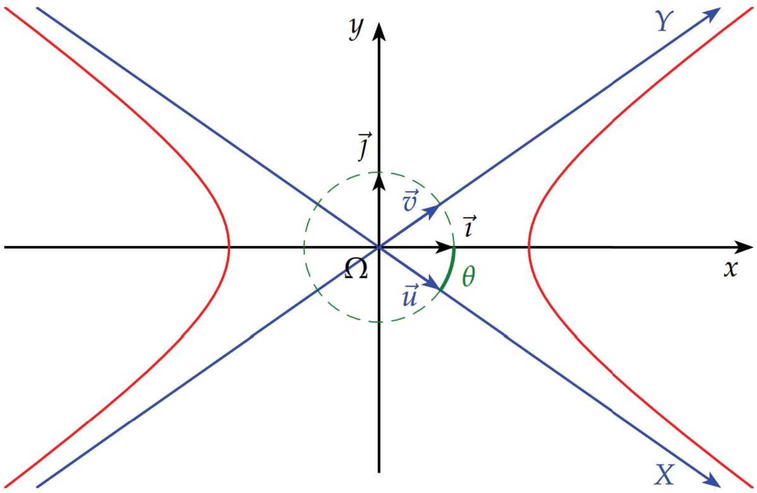
ដូច្នេះ អ៊ីពែរបូល (Γ) ស្ថិតក្នុងតម្រុយនរម៉ាល់ មានគល់ Ω និងមានអាស៊ីមតូតចំនួនពីរ $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ កំណត់ដោយសមីការ ៖

$$XY = \frac{c^2}{4}$$

សំគាល់. ក្នុងតម្រុយ $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ គេមាន ៖

- $(\Gamma) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- អាស៊ីមតូត : $y = \pm\frac{b}{a}x$
- $c^2 = a^2 + b^2$
- $\tan\theta = \frac{b}{a}$

ដូច្នេះ $\frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta}$ ។



សម្រាយ.

គេមាន $\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j} \\ \vec{v} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \end{cases}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

គេបាន $\begin{cases} x = \cos\theta(X+Y) \\ y = \sin\theta(Y-X) \end{cases}$

ចំពោះសមីការរបស់ (Γ) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff (\times a^2) : \quad x^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} \cos^2\theta(X+Y)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}(Y-X)^2 &= a^2 \\ \cos^2\theta(X+Y)^2 - \cos^2\theta(Y-X)^2 &= a^2 \implies \quad XY = \frac{a^2}{4\cos^2\theta} \\ \cos^2\theta\left[(X+Y)^2 - (Y-X)^2\right] &= a^2 \\ \cos^2\theta \times 4XY &= a^2 \end{aligned}$$

តែ $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$ ។

ដូច្នេះសមីការរបស់ (Γ) ក្នុងតម្រុយ $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ គឺ ៖

$$XY = \frac{c^2}{4}$$

□

សម្គាល់.

- គេហៅ *អ៊ីពែរបូលសមមូល* ឬ អ៊ីពែរបូលអេគីឡាទែរ ជាអ៊ីពែរបូលដែលមានអាស៊ីមតូតកែងគ្នា ។

  គេបាន $a = b$ ដូច្នេះ $c^2 = 2a^2$ ។ សមីការរបស់ (Γ) កំណត់ដោយ :

  $$XY = \frac{a^2}{2}$$

- អ៊ីពែរបូលនេះ តាងឱ្យអនុគមន៍អូម៉ូក្រាហ្វិក (អនុគមន៍សនិទាន ដែលជាផលធៀបរវាងអនុគមន៍អាភីនពីរ) មានទម្រង់៖

  $$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$